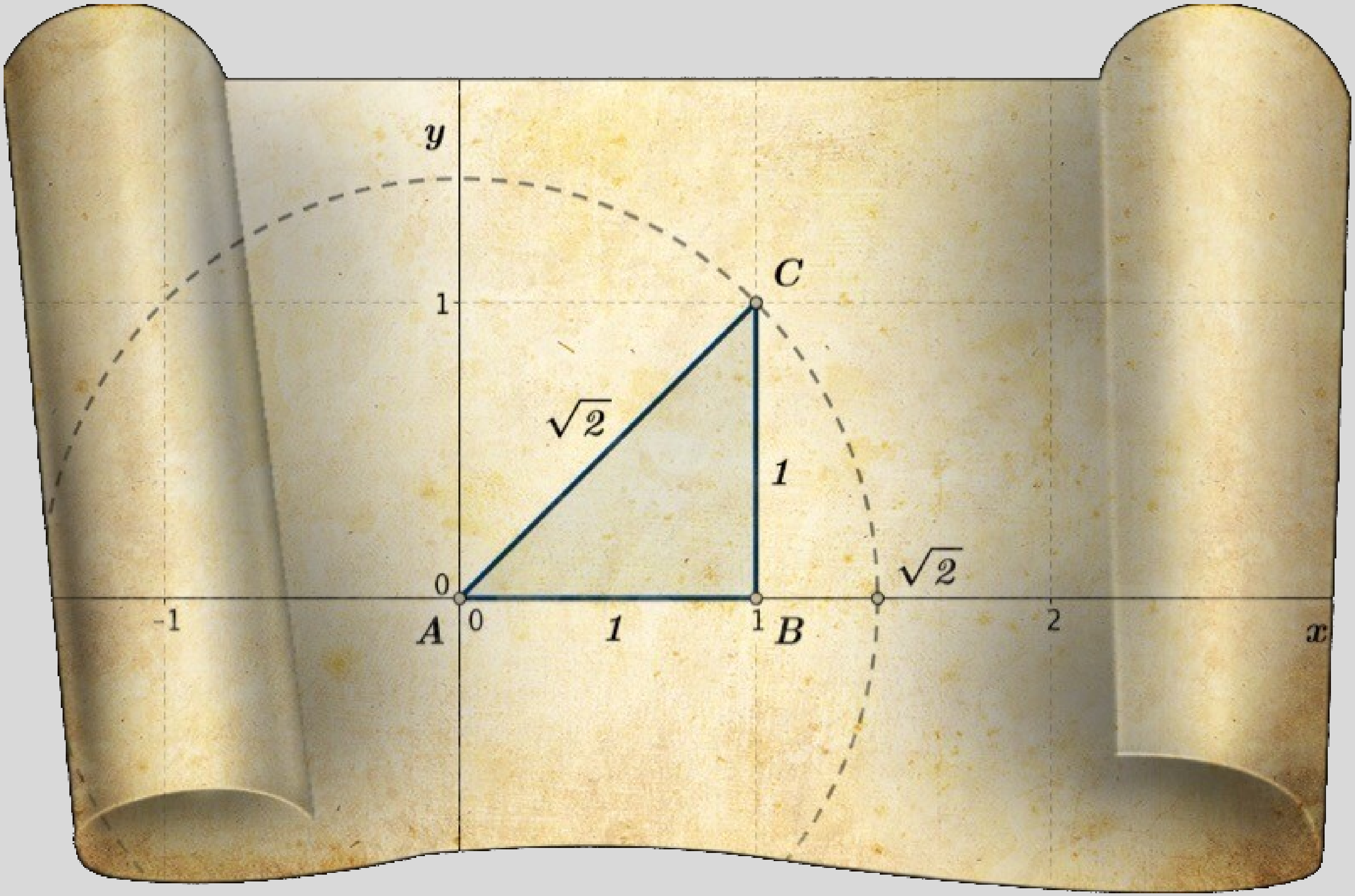


Rationale, irrationale und reelle Zahlen

Der Grund für die Einführung der rationalen Zahlen ist der, dass wir mit ihnen auch Gleichungen der Form $q\,x = p$ lösen können.

$$q\;x = p\,, \qquad x = \frac{p}{q}\,, \qquad q \neq 0\,, \qquad p\,,\; q \in \mathbb{Z}$$

Solche Zahlen werden auch gebrochene Zahlen, Quotienten genannt.

Die Menge der rationalen Zahlen ist eine Menge:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad p\,, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

In der Menge der rationalen Zahlen befinden sich alle möglichen Brüche der Form p/q, wobei p eine beliebige ganze Zahl und q eine beliebige ganze Zahl außer Null ist. Dabei nennt man p den Zähler und q den Nenner des Bruches. Der Buchstabe Q der Mengenbezeichnung $\mathbb{Q}$ kommt vom Wort "Quotient". Die Division durch Null wird ausgeschlossen, was man einfach zeigen kann. Angenommen die Division 7:0 bzw. der Bruch 7/0 wäre eine Zahl, nennen wir sie a: $7/0 = a$. Dann wäre eine Probe $7 = a \cdot 0$. Dies ist aber unmöglich, weil jede Multiplikation mit der Zahl 0 Null ergibt. Die Division durch Null ist daher keine zulässige mathematische Operation, weil sie zu Widersprüchen führt.

Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch ist nicht <u>eindeutig</u>!

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Man kann Brüche kürzen und erweitern, ohne ihren Wert zu verändern. Eine eindeutige Darstellung als Bruch lässt sich durch die Forderung erreichen, dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.

$\frac{p}{1} = p$ – die rationalen Zahlen beinhalten die ganzen Zahlen.

Abbrechende Dezimalbrüche: $\frac{3}{5} = 0.6\,, \qquad \frac{7}{4} = 1.75$

Periodische Dezimalbrüche: $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}\,, \quad \frac{19}{9} = 2.111\ldots = 2.\overline{1}$

Die Periode wird durch Überstreichen der Ziffernfolge, die sich periodisch wiederholt, gekennzeichnet:

$$3.\overline{7} = 3 + \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \ldots, \qquad 0.05\,\overline{31} = \frac{5}{10^2} + \frac{31}{10^4} + \frac{31}{10^6} + \frac{31}{10^8} + \ldots$$

Eigenschaft: Jede rationale Zahl lässt sich durch einen abbrechenden oder periodischen Dezimalbruch darstellen.

Umgekehrt lässt sich jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch als Bruch p/q darstellen.

Die Menge der rationalen Zahlen hat folgende Strukturen und Verknüpfungen:

- Addition
- Multiplikation
- Subtraktion (Existenz von additiven Inversen)
- Division (Existenz von multiplikativen Inversen)
- Ordnungsrelation

Unterschied von der Menge der ganzen Zahlen:

Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine eindeutig bestimmte rationale Zahl b, so dass $a \cdot b = 1$. Man nennt b das multiplikative Inverse von a:

$$a \cdot b = 1, \qquad b = a^{-1}, \qquad a \neq 0$$

Jede Größe, die wir durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division rationaler Zahlen erhalten, entspricht wieder einer rationalen Zahl. Die Menge der rationalen Zahlen ist also “abgeschlossen” gegenüber arithmetischen Operationen, da diese Operationen nicht aus der Menge herausführen.

$x^2 = 2, \qquad x = \pm\sqrt{2}$ Was ist $\sqrt{2}$?

$\sqrt{2} \simeq 1.41, \quad 1.41^2 = 1.9881\,; \qquad \sqrt{2} \simeq 1.414, \quad 1.414^2 = 1.999386$

Die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ ist:

$$x = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753\ldots$$

$$x^2 = 1{,}9999999999999999999999999999999999999999999999\ldots$$

Diese Zahl genügt der Gleichung $x^2 = 2$ mit hoher Genauigkeit, aber nicht exakt. Mit einer endlichen Dezimalentwicklung erhalten wir niemals eine Zahl, die quadriert genau 2 ergibt.

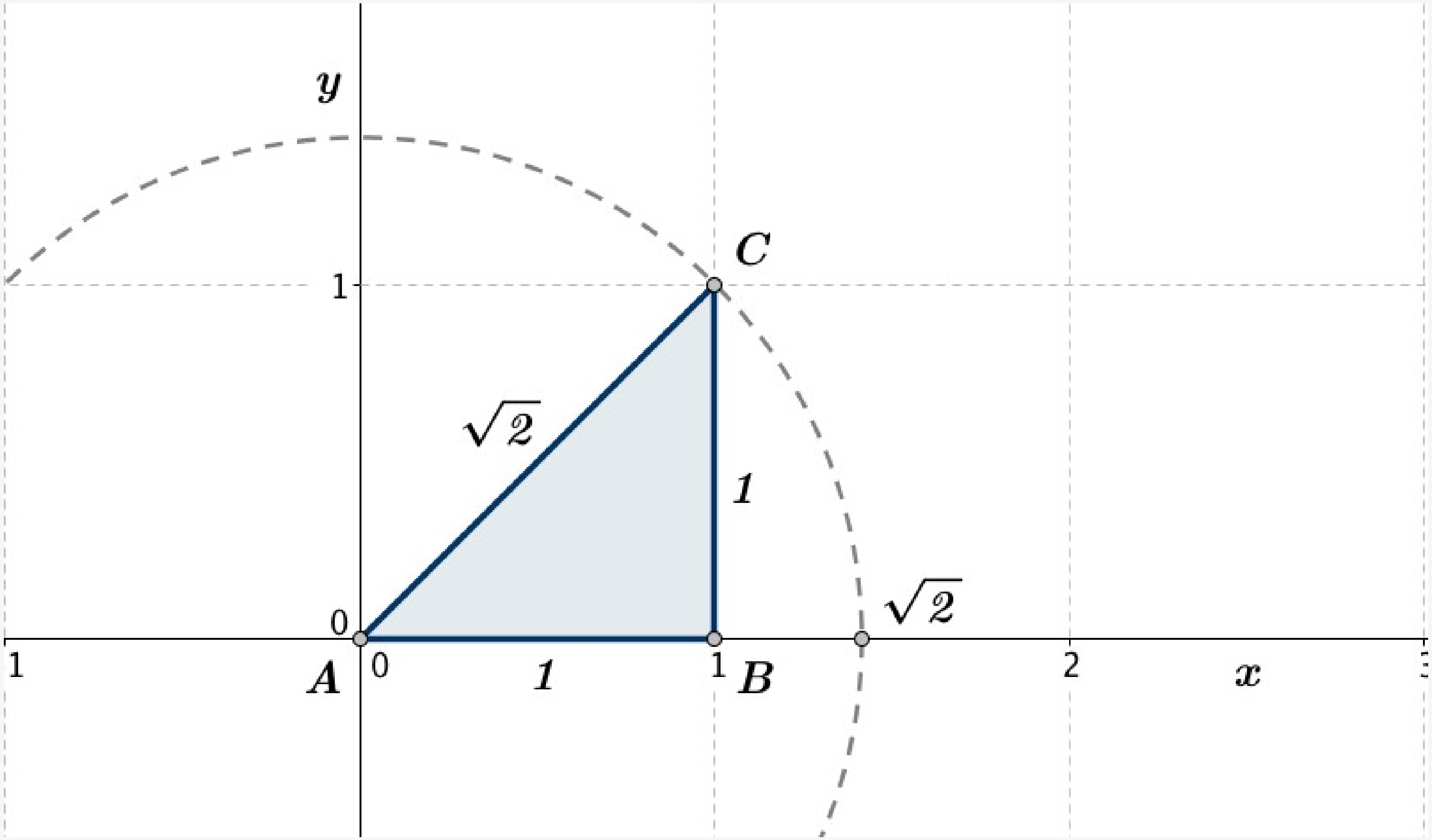


Abb 5-1: Die Zahl √2 als Diagonale und auf der Zahlengerade

Die Länge der Diagonale eines Quadrats der Länge eins (im Bild durch √2 gekennzeichnet) lässt sich nicht als Bruch von zwei natürlichen Zahlen schreiben, d.h. √2 ist keine rationale Zahl (bewiesen geomtrisch schon um 500 v. Chr. und mit Zahlen erst etwa 200 Jahre später von Euklid).

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \qquad |AC| = \sqrt{2}$$

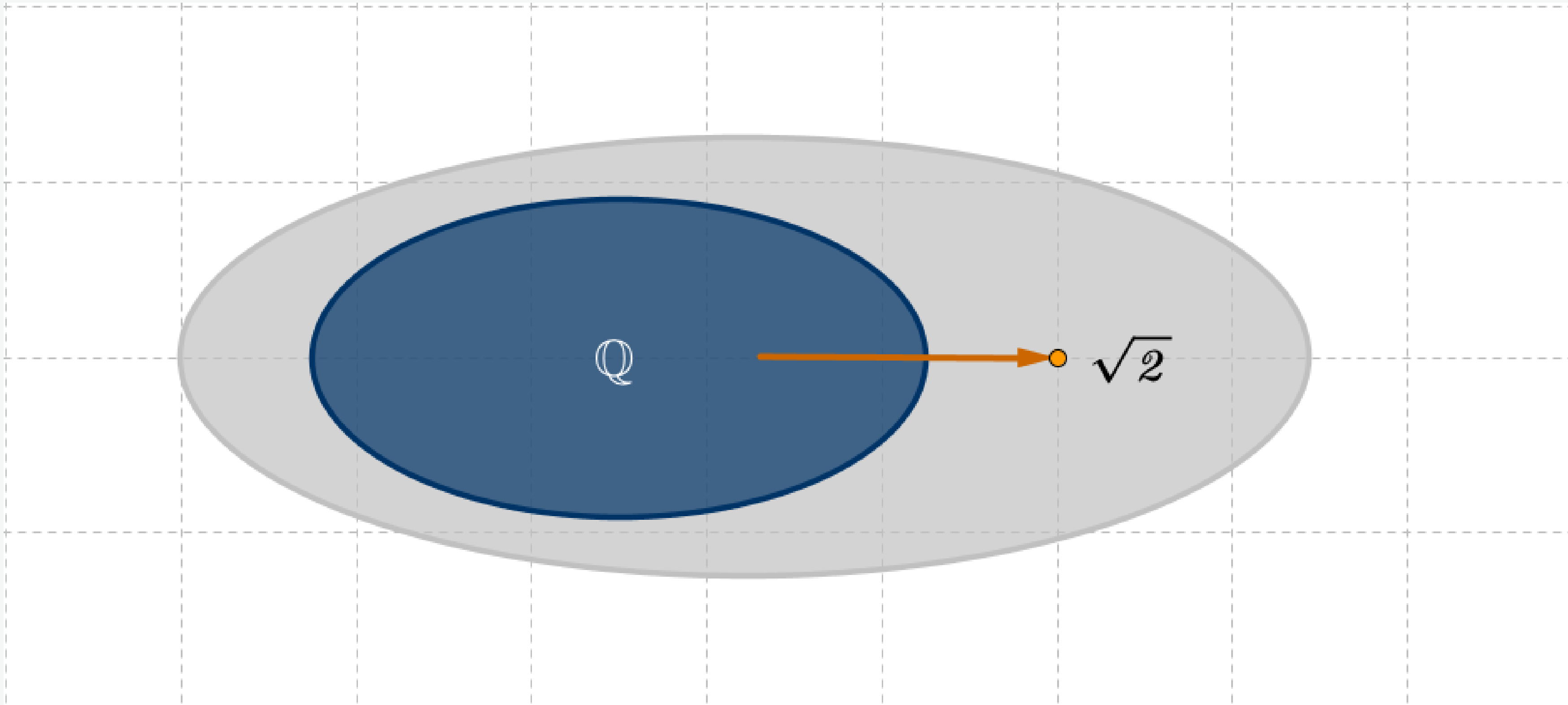
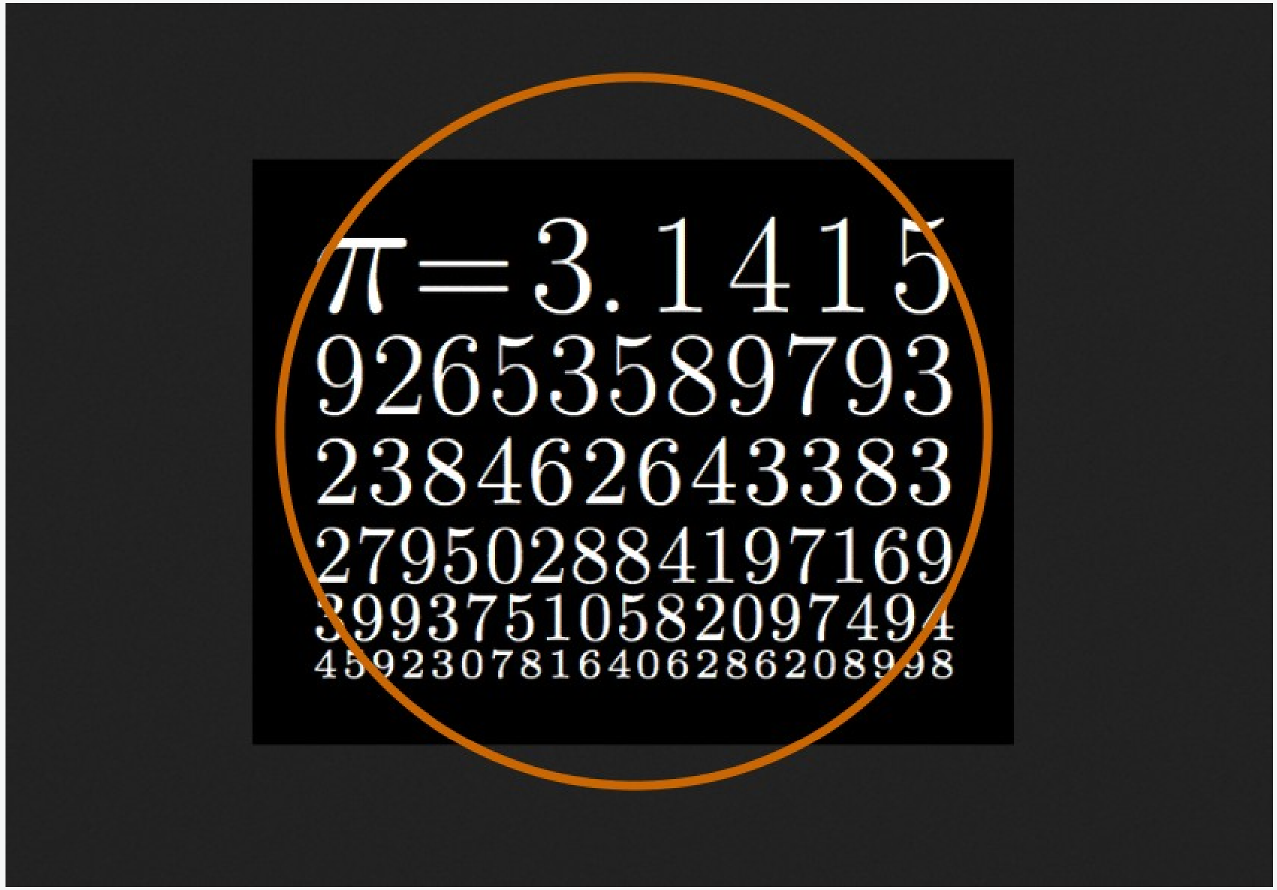


Abb 5-2: √2 gehört nicht der Menge rationalen Zahlen



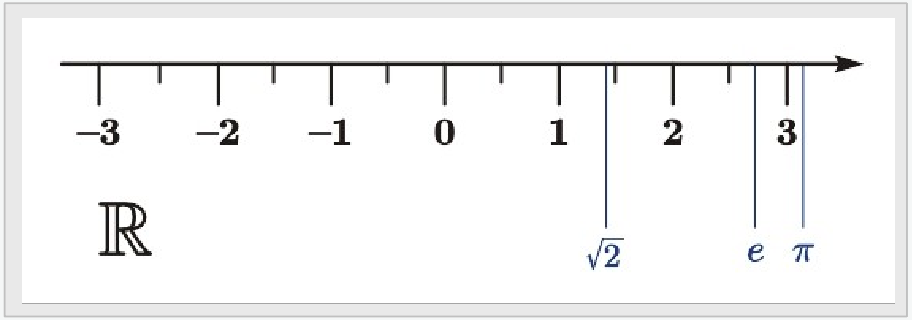
Die irrationalen Zahlen sind unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche.

Die meisten Funktionswerte der Wurzelfunktionen, logarithmischen Funktionen oder trigonometrischen Funktionen, auch die Zahlen π und e sind irrationale Zahlen.

Die Kreiszahl	$\pi = 3.141592654\ldots$
Die Eulersche Zahl	$e = 2{,}718281828459\ldots$

Alle rationalen und irrationalen Zahlen ergeben zusammen die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$.

Die Menge der reellen Zahlen entspricht anschaulich der Menge aller Punkte der Zahlengeraden. Die den reellen Zahlen entsprechenden Punkte bedecken die Zahlengerade lückenlos !



Die Menge der reellen Zahlen hat folgende Strukturen und Verknüpfungen:

- Addition
- Multiplikation
- Subtraktion (Existenz von additiven Inversen)
- Division (Existenz von multiplikativen Inversen)
- Ordnungsrelation

Kommutativgesetze: $a + b = b + a\,,\qquad a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetze: $(a + b) + c = a + (b + c),\qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Existenz von neutralen Elementen 0 bzw. 1: $a + 0 = a\,,\qquad a \cdot 1 = a$

Existenz von inversen Elementen: $a + (-a) = 0,\qquad a \cdot a^{-1} = 1 \quad (a \neq 0)$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Transitivität von $<$: $a < b\,,\quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$

Die Entwicklungsgeschichte des Zahlenbegriffs dauert an. Unsere heutige Zeit ist ebensowenig im Besitz der letztgültigen Charakterisierung der Zahl wie die früheren Zeitalter.


FUJI RTP