Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Wir haben die Formel benutzt

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

nach der eine Exponentialzahl potenziert wird, indem man die Exponenten multipliziert. Dann sollte gelten

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m$$

$$x = x^1 = x^{\frac{n}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^n$$

Mit anderen Worten, $x^{1/2}$ ist die Zahl, die quadriert gerade x ergibt *($n = 2$)*.

$x^{1/n}$ ist diejenige Zahl, die zur n-ten Potenz erhoben gerade x ergibt.

Das Symbol $\sqrt{}$ selbst wird als Wurzel bezeichnet; es steht für die Quadratwurzel, das ist die *2-te* Wurzel. $\sqrt[n]{}$ ist das Symbol für die n-te Wurzel. Das Wurzelzeichen erfüllt die Funktion eines Operators, d.h. auf den unter diesem Zeichen stehenden Operanden wird die Operation “Wurzelziehen” angewendet. Der Index n, d.h. die Ordnung der Wurzel, ist immer eine natürliche Zahl.

Wenn aus der Potenzgleichung

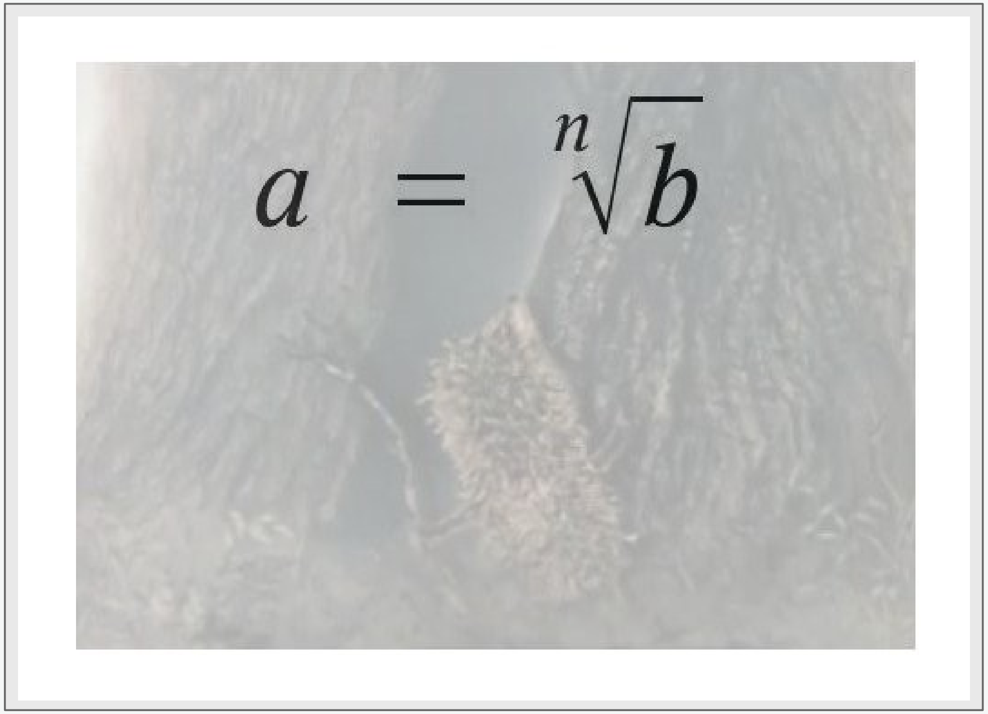
$$a^n = b$$

bei bekannten Exponenten n und bekannten Potenzwert b mit

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}, \qquad b \geqslant 0$$

die Basis ermittelt werden soll, dann wird die zugehörige Rechenart Wurzelrechnung oder Radizieren genannt

$$\boxed{a = \sqrt[n]{b}}$$



http://www.youtube.com/watch?v=JZS1fLK4DYM&feature=related

Dabei nennt man b den Radikanden, n den Wurzelexponenten und a den Wurzelwert (oder kurz die “*n-te* Wurzel”).

Die *n-te* Wurzel aus $b \geq 0$ ist diejenige nicht negative Zahl a, deren *n-te* Potenz den Wert b ergibt, wobei gelten soll:

$$a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Auf Grund der Definition der *n-ten* Wurzel kann man wegen der Forderung, dass $b \geq 0$ sein soll, *keine Wurzeln aus negativen Zahlen* ziehen. Auch der Wurzelwert darf nicht negativ sein (z.B. ist -2 nicht die 3. Wurzel aus -8).

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad m, n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \geqslant 0$$

Alle Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten sind auch für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten gültig.

1. Wurzeln lassen sich nur dann addieren, wenn sie sowohl in ihren Radikanden als auch in ihren Wurzelexponenten übereinstimmen

$$2\sqrt[5]{u} + 3\sqrt[6]{u} - 4\sqrt[5]{u} - 2\sqrt[6]{u} = \sqrt[6]{u} - 2\sqrt[5]{u}$$

2. Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Rechenregeln

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Aufgabe 1:

Der Ausdruck

$$2\sqrt{72} - 3\sqrt{75} - 4\sqrt{32} + 5\sqrt{27}$$

soll soweit wie möglich vereinfacht werden.

Aufgabe 2:

$\sqrt[20]{a^5}$ soll vereinfacht werden.

Aufgabe 3:

Die Ausdrücke sind als Potenzen mit gebrochenem Exponenten darzustellen

$a)\ \sqrt{7}, \quad b)\ \sqrt[3]{2}, \quad c)\ \sqrt[5]{3^4}, \quad d)\ \sqrt[4]{9^5}$

$e)\ \sqrt{a}, \quad f)\ \sqrt[x]{b^y}, \quad g)\ \sqrt{a+b}$

$h)\ \sqrt[4]{(x-y)^3}, \quad i)\ \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad j)\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

$k)\ \frac{1}{\sqrt[5]{a+b}}, \quad l)\ 5\sqrt[3]{5x^5y^3z^6}$

Lösung 1: $2\sqrt{72} - 3\sqrt{75} - 4\sqrt{32} + 5\sqrt{27}$

Es hat den Anschein, als könne hier nichts vereinfacht werden, denn es treten zwar lauter Quadratwurzeln auf, aber die Radikanden sind alle voneinander verschieden. Betrachtet man jedoch die Radikanden genauer, so erkennt man, dass jeder ein Vielfaches von einer Quadratzahl ist

$$2\sqrt{72} - 3\sqrt{75} - 4\sqrt{32} + 5\sqrt{27} =$$

$$= 2\sqrt{36 \cdot 2} - 3\sqrt{25 \cdot 3} - 4\sqrt{16 \cdot 2} + 5\sqrt{9 \cdot 3} =$$

$$= 2 \cdot 6\sqrt{2} - 3 \cdot 5\sqrt{3} - 4 \cdot 4\sqrt{2} + 5 \cdot 3\sqrt{3} = -4\sqrt{2}$$

Lösung 2:

$$\sqrt[20]{a^5} = \left(a^5\right)^{\frac{1}{20}} = a^{\frac{5}{20}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

$a)\ \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}, \qquad b)\ \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \qquad c)\ \sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$

$d)\ \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{3^{10}} = 3^{\frac{10}{4}} = 3^{\frac{5}{2}}$

$e)\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad f)\ \sqrt[x]{b^y} = b^{\frac{y}{x}}$

$g)\ \sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}}, \qquad h)\ \sqrt[4]{(x-y)^3} = (x-y)^{\frac{3}{4}}$

$i)\ \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{5^{-1}} = 5^{-\frac{1}{2}}, \qquad j)\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{x^{3/4}} = x^{-\frac{3}{4}}$

$k)\ \frac{1}{\sqrt[5]{a+b}} = (a+b)^{-\frac{1}{5}}, \qquad l)\ 5\,\sqrt[3]{5\,x^5\,y^3\,z^6} = 5^{\frac{4}{3}}\,x^{\frac{5}{3}}\,y\,z^2$

Mit dem Wurzelzeichen ist zu schreiben:

$a)\ 2^{\frac{1}{2}}, \quad b)\ 3^{\frac{2}{3}}, \quad c)\ 7^{0.5}, \quad d)\ 11^{0.8}$

$e)\ a^{\frac{2}{7}}, \quad f)\ x^{\frac{y}{x}}, \quad g)\ 5\ x^{\frac{3}{8}}, \quad h)\ (5\ x)^{\frac{3}{8}}$

$i)\ 3^{-\frac{1}{4}}, \quad j)\ 5^{-1.25\,a}, \quad k)\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{a}}, \quad l)\ (x+y)^{-\frac{2}{5}}$

$$a)\quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,, \qquad b)\quad 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$c)\quad 7^{0.5} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}\,, \qquad d)\quad 11^{0.8} = 11^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{11^4}$$

$$e)\quad a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}\,, \qquad f)\quad x^{\frac{y}{x}} = \sqrt[x]{x^y}$$

$$g)\quad 5\,x^{\frac{3}{8}} = 5\,\sqrt[8]{x^3}$$

$$h)\quad (5\,x)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{(5\,x)^3} = \sqrt[8]{5^3\,x^3} = \sqrt[8]{125\,x^3}$$

$$i)\quad 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\,, \qquad j)\quad 5^{-1.25\,a} = 5^{-\frac{5}{4}\,a} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^{5\,a}}}$$

$$k)\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{a}} = 5^{\frac{2}{a}} = \sqrt[a]{5^2} = \sqrt[a]{25}$$

$$l)\quad (x+y)^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{(x+y)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(x+y)^2}}$$

Der Radikand ist durch teilweises Wurzelziehen zu vereinfachen:

$a)\ \sqrt{32}, \quad b)\ \sqrt{48}, \quad c)\ \sqrt{54}, \quad d)\ \sqrt{88}$

$e)\ \sqrt{108}, \quad f)\ \sqrt{128}, \quad g)\ \sqrt{250}, \quad h)\ \sqrt{375}$

$i)\ \sqrt[3]{32}, \quad j)\ \sqrt[3]{48}, \quad k)\ \sqrt[3]{54}, \quad l)\ \sqrt[3]{88}$

$$a)\ \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$b)\ \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$c)\ \sqrt{54} = \sqrt{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt{6}$$

$$d)\ \sqrt{88} = \sqrt{22 \cdot 4} = 2\sqrt{22}$$

$$e)\ \sqrt{108} = \sqrt{27 \cdot 4} = \sqrt{3^3 \cdot 2^2} = 6\sqrt{3}$$

$$f)\ \sqrt{128} = \sqrt{2^7} = 2^3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$g)\ \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$$

$$h)\ \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$$

$$i)\ \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$j)\ \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{16 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{6}$$

$$k)\ \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$l)\ \sqrt[3]{88} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 11} = 2\sqrt[3]{11}$$

Aufgabe 6: Der Radikand ist durch teilweises Wurzelziehen zu vereinfachen:

1) $\sqrt{a^5}$, 2) $\sqrt[4]{\%x^7\ y}$, 3) $\sqrt[5]{4\ x^6\ y^5}$

4) $\sqrt{(a+b)^3}$, 5) $\sqrt[3]{24\ x^3\ y}$, 6) $\sqrt[4]{32\ x^5\ y}$

7) $\sqrt[5]{32\ x^5\ y^7}$, 8) $\sqrt[3]{(x^2-4\,x+4)^4}$

Aufgabe 7: Der vor der Wurzel stehende Faktor ist unter die Wurzel zu bringen:

1) $2\sqrt{2}$, 2) $4\sqrt{3}$, 3) $\frac{3}{2}\sqrt{8}$

4) $4\sqrt{0.25}$, 5) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$, 6) $5\sqrt{0.04}$

7) $x\sqrt{x}$, 8) $x\,y\sqrt{z}$, 9) $(x+y)\sqrt{z}$

10) $\frac{x^3}{y}\sqrt{z}$, 11) $x\sqrt{\frac{1}{x}}$, 12) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$

1) $\sqrt{a^5} = a^2\,\sqrt{a}\,,$ 2) $\sqrt[4]{x^7\,y} = x\,\sqrt[4]{x^3\,y}$

3) $\sqrt[5]{4\,x^6\,y^5} = x\,y\,\sqrt[5]{4\,x}$

4) $\sqrt{(a+b)^3} = (a+b)\,\sqrt{a+b}$

5) $\sqrt[3]{24\,x^3\,y} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3\,x^3\,y} = 2\,x\,\sqrt[3]{3\,y}$

6) $\sqrt[4]{32\,x^5\,y} = \sqrt[4]{2\cdot 2^4\,x^5\,y} = 2\,x\,\sqrt[4]{2\,x\,y}$

7) $\sqrt[5]{32\,x^5\,y^7} = \sqrt[5]{2^5\,x^5\,y^7} = 2\,x\,y\,\sqrt[5]{y^2}$

8) $\sqrt[3]{(x^2-4\,x+4)^4} = (x^2-4\,x+4)\,\sqrt[3]{x^2-4\,x+4}$

$$1)\ 2\sqrt{2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}, \qquad 2)\ 4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$$

$$3)\ \frac{3}{2}\sqrt{8} = \sqrt{18}, \qquad 4)\ 4\sqrt{0.25} = \sqrt{4} = 2$$

$$5)\ 3\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}, \qquad 6)\ 5\sqrt{0.04} = \sqrt{1} = 1$$

$$7)\ x\sqrt{x} = \sqrt{x^3}, \qquad 8)\ x\,y\sqrt{z} = \sqrt{x^2\,y^2\,z}$$

$$9)\ (x + y)\sqrt{z} = \sqrt{z\,(x + y)^2}$$

$$10)\ \frac{x^3}{y}\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x^6\,z}{y^2}}, \qquad 11)\ x\sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{x}$$

$$12)\ \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

1) $\dfrac{x^2}{2} \sqrt[3]{\dfrac{16}{x^5}}$

2) $\dfrac{a^3\ b^2}{c^2} \sqrt[3]{\dfrac{c^7}{a^8\ b^5}}$

3) $(a - b) \sqrt[4]{\dfrac{a + b}{(a - b)^3}}$

4) $(u + v) \sqrt[3]{1 - \dfrac{3uv}{(u + v)^2}}$

5) $(\sqrt{2} - 1) \sqrt{\sqrt{2} + 1}$

6) $(\sqrt{5} - 2) \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

1) $\dfrac{x^2}{2}\sqrt[3]{\dfrac{16}{x^5}} = \sqrt[3]{2x}$

2) $\dfrac{a^3\, b^2}{c^2}\sqrt[3]{\dfrac{c^7}{a^8\, b^5}} = \sqrt[3]{a\,b\,c}$

3) $(a-b)\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{(a-b)^3}} = \sqrt[4]{a^2-b^2}$

4) $(u+v)\sqrt[3]{1-\dfrac{3\,u\,v}{(u+v)^2}} = \sqrt[3]{(u+v)^3-3\,u\,v\,(u+v)} = \sqrt[3]{u^3+v^3}$

5) $(\sqrt{2}-1)\sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{\sqrt{2}-1}$

6) $(\sqrt{5}-2)\sqrt{2+\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5}-2}$

Die Ausdrücke sind soweit wie möglich zu vereinfachen:

1) $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{75}$

2) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{432}$

3) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{8} + 4\sqrt{50}$

4) $4\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{81}$

5) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{45} + 4\sqrt{20}$

1) $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{75} = 8\sqrt{3}$

2) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{432} = 9\sqrt[3]{2}$

3) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{8} + 4\sqrt{50} = 28\sqrt{2}$

4) $4\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{81} = 8\sqrt[3]{3}$

5) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{45} + 4\sqrt{20} = 17\sqrt{5}$