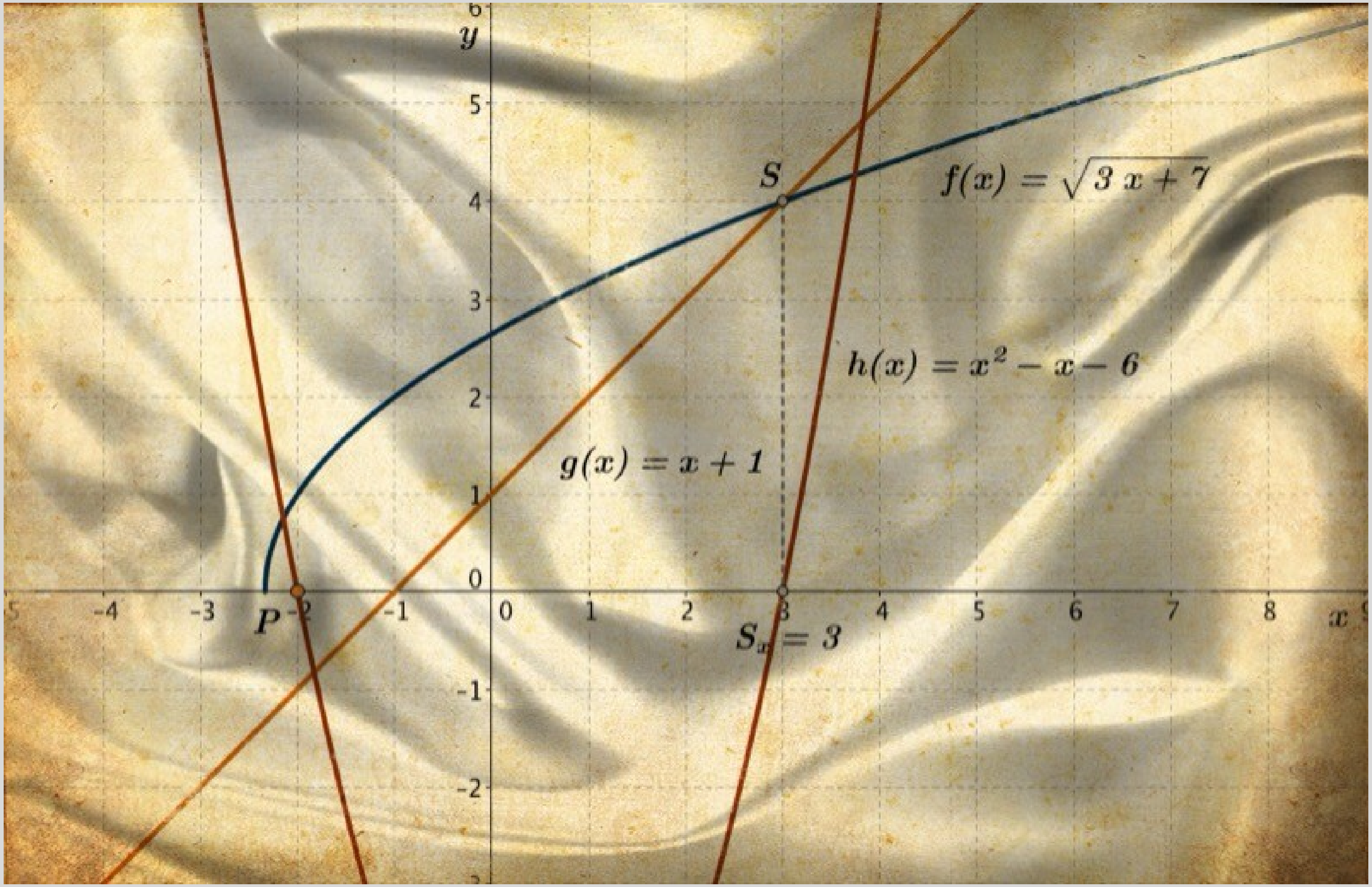

Wurzelgleichungen: Analytische und graphische Lösungen

Definition:

Gleichungen, bei denen die Variable im Argument einer Wurzelfunktion auftritt, heißen Wurzelgleichungen.

Frage:

Welche der gegebenen Gleichungen sind Wurzelgleichungen?

$a)\quad \sqrt{2x-3}+5-3x=0$

$b)\quad \sqrt{21}\,x+x^2-\sqrt{3}\,(x-2)=0$

$c)\quad \sqrt{6x-2}=3+x$

$d)\quad \sqrt{4+x-\sqrt{2+x}}=7$

$e)\quad \sqrt[4]{4+x-\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{3}+x$

$$a)\quad \sqrt{2x-3}+5-3x=0$$

$$b)\quad \sqrt{21}\,x+x^2-\sqrt{3}\,(x-2)=0$$

$$c)\quad \sqrt{6x-2}=3+x$$

$$d)\quad \sqrt{4+x-\sqrt{2+x}}=7$$

$$e)\quad \sqrt[4]{4+x-\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{3}+x$$

Die Gleichungen *a), c), d)* und *e)* sind Wurzelgleichungen, die Variable x tritt im Argument einer Wurzelfunktion auf. Dagegen ist die Gleichung *b)* keine Wurzelgleichung. Die Wurzeln treten zwar auf, aber unter keiner dieser Wurzeln steht die Variable x. Diese Gleichung gehört nicht zu den Wurzelgleichungen, hier handelt es sich um eine quadratische Gleichung.

Lösen einer Wurzelgleichung

Beim Lösen von Wurzelgleichungen nach der Variablen werden die auftretenden Wurzeln durch Potenzieren beseitigt. In einigen Fällen ist sogar mahrfaches Potenzieren nötig. Es kann vorkommen, dass der Definitionsbereich der durch das Potenzieren entstehenden Gleichung umfassender wird als der Definitionsbereich der Ausgangsgleichung. Es können Scheinlösungen entstehen. Deswegen ist es notwendig, nach dem Lösen eine Probe durchzuführen.

- Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!
- Eine Probe ist erforderlich!

Im Folgenden bestimmen wir die Lösungen folgender Wurzelgleichungen

$$a)\quad G_a : \quad \sqrt{x+1} - 2 = 0$$

$$b)\quad G_b : \quad \sqrt{x+1} + 2 = 0$$

$$G_a : \quad \sqrt{x+1} - 2 = 0$$

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad D(G_a) = [-1, \infty)$$

Lösen der Gleichung durch Quadrieren:

1. $(\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0^2$ Man verwendet die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0^2 \quad \to \quad x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0$$

Damit ist man mit der Lösung der gegebenen Gleichung keinen Schritt vorangekommen, denn die Variable x steht immer noch unter dem Wurzelzeichen.

! ! !

Vor dem Quadrieren soll eine solche Gleichung in eine Form gebracht werden, so dass die Wurzel isoliert auf einer Seite der Gleichung steht.

2. $\sqrt{x+1} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = 2$

quadriert:

$$\tilde{G}_a : \; x + 1 = 2^2, \qquad x + 1 = 4, \qquad x = 3$$

$$D(\tilde{G}_a) = \mathbb{R}, \qquad D(G_a) \neq D(\tilde{G}_a)$$

$$L_{\tilde{G}_a} = \{\, 3 \,\}$$

Jetzt müssen wir prüfen, ob die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung und der umgeformten Gleichung gleich sind.

Die Probe für diesen Wert zeigt,

$$x = 3 \quad : \sqrt{3+1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

dass $x = 3$ die Lösung der Ausgangsgleichung ist.

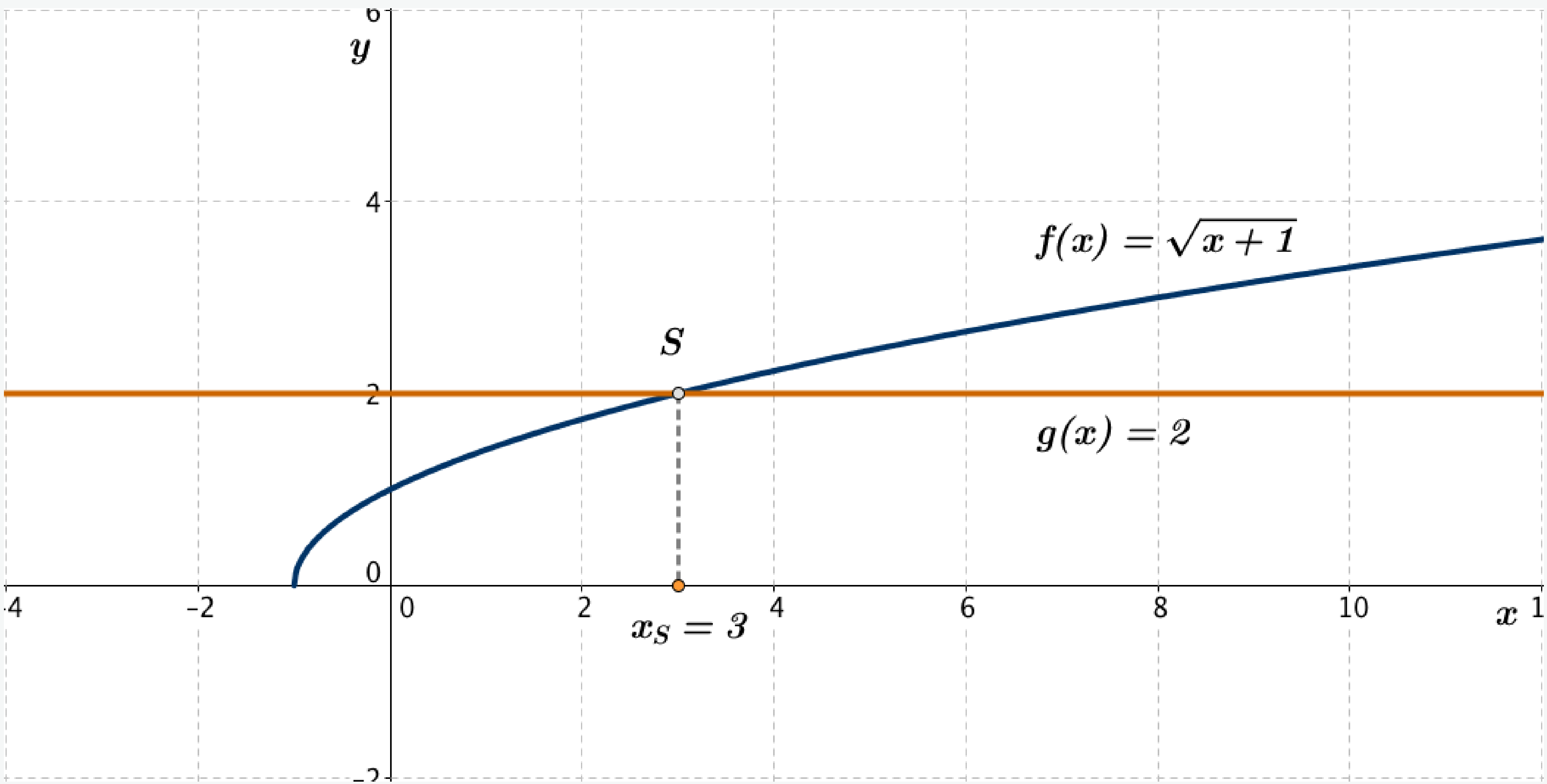

Abb. L-1a: Graphische Lösung der Gleichung a)

$$\sqrt{x+1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x), \quad f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = 2$$

$$G_b: \quad \sqrt{x+1} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = -2$$

$$\tilde{G}_b \quad : x + 1 = (-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 4, \quad x = 3$$

$$D(G_b) = [-1, \infty), \quad D(\tilde{G}_b) = \mathbb{R}, \quad D(G_b) \neq D(\tilde{G}_b)$$

$$L_{\tilde{G}_b} = \{ 3 \}$$

Die Probe für diesen Wert zeigt,

$$x = 3 \quad : \sqrt{3+1} + 2 = 2 + 2 = 0$$

dass $x = 3$ keine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Durch Quadrieren ist eine Scheinlösung entstanden. Die Ausgangsgleichung besitzt keine Lösung

$$L_{G_b} = \{ \emptyset \}$$

Auf dieses Ergebnis konnte man kommen, ohne die Gleichung zu lösen. Die Summe von zwei positiven Größen kann nicht Null sein.

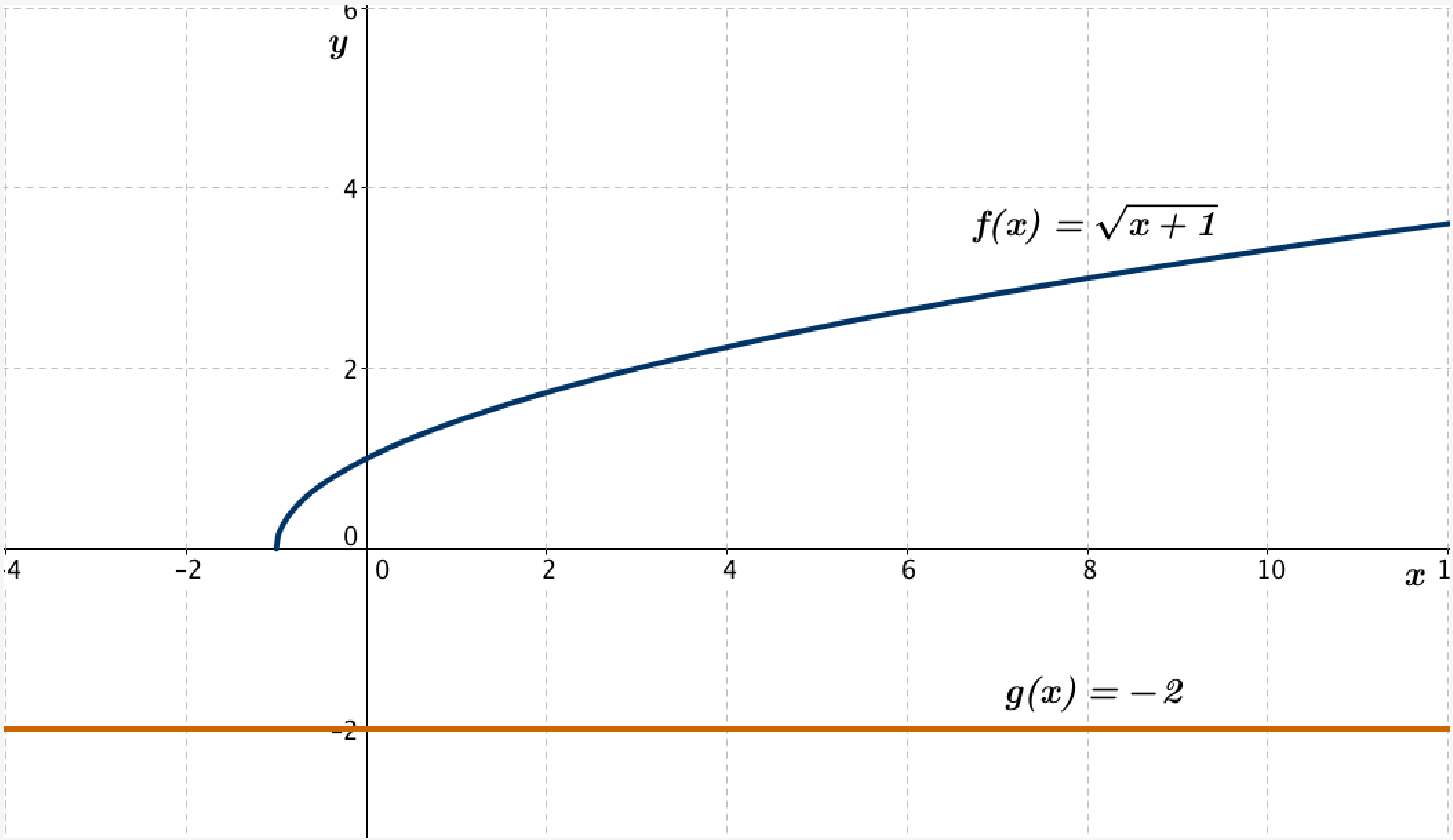

Abb. L-1b: Graphische Lösung der Gleichung b)

$$\sqrt{x+1} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x), \quad f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = -2$$

Gesucht sind die Lösungen folgender Gleichungen:

Aufgabe 2: $1 + \sqrt{x + 5} = x$

Aufgabe 3: $\sqrt{x - 1} + 7 = x$

Aufgabe 4: $2 - \sqrt{3x + 7} = 1 - x$

1. $G: \quad 1 + \sqrt{x+5} = x$

2. Definitionsbereich der Gleichung: $x + 5 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad D(G) = [-5, \infty)$

3. Isolieren der Wurzel: $\sqrt{x+5} = x - 1$

4. Quadrieren der Gleichung: $(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2$

   Vorsicht ! Nichtäquivalente Umformung

   $\widetilde{G}: \quad (\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x + 5 = x^2 - 2x + 1$

   $\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \qquad D(\widetilde{G}) = \mathbb{R}$

   $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}, \qquad x_1 = 4, \quad x_2 = -1$

5. Die Lösungsmenge der umgeformten Gleichung: $L(\widetilde{G}) = \{-1, 4\}$

6. Probe: $x_1 = 4 \qquad 1 + \sqrt{4+5} = 4 \qquad 4 = 4$

   $x_2 = -1 \qquad 1 + \sqrt{-1+5} = -1 \qquad 3 \neq -1$

   $\Rightarrow \quad L(G) \neq L(\widetilde{G})$

7. Die Lösung der Gleichung: $L(G) = \{4\}$

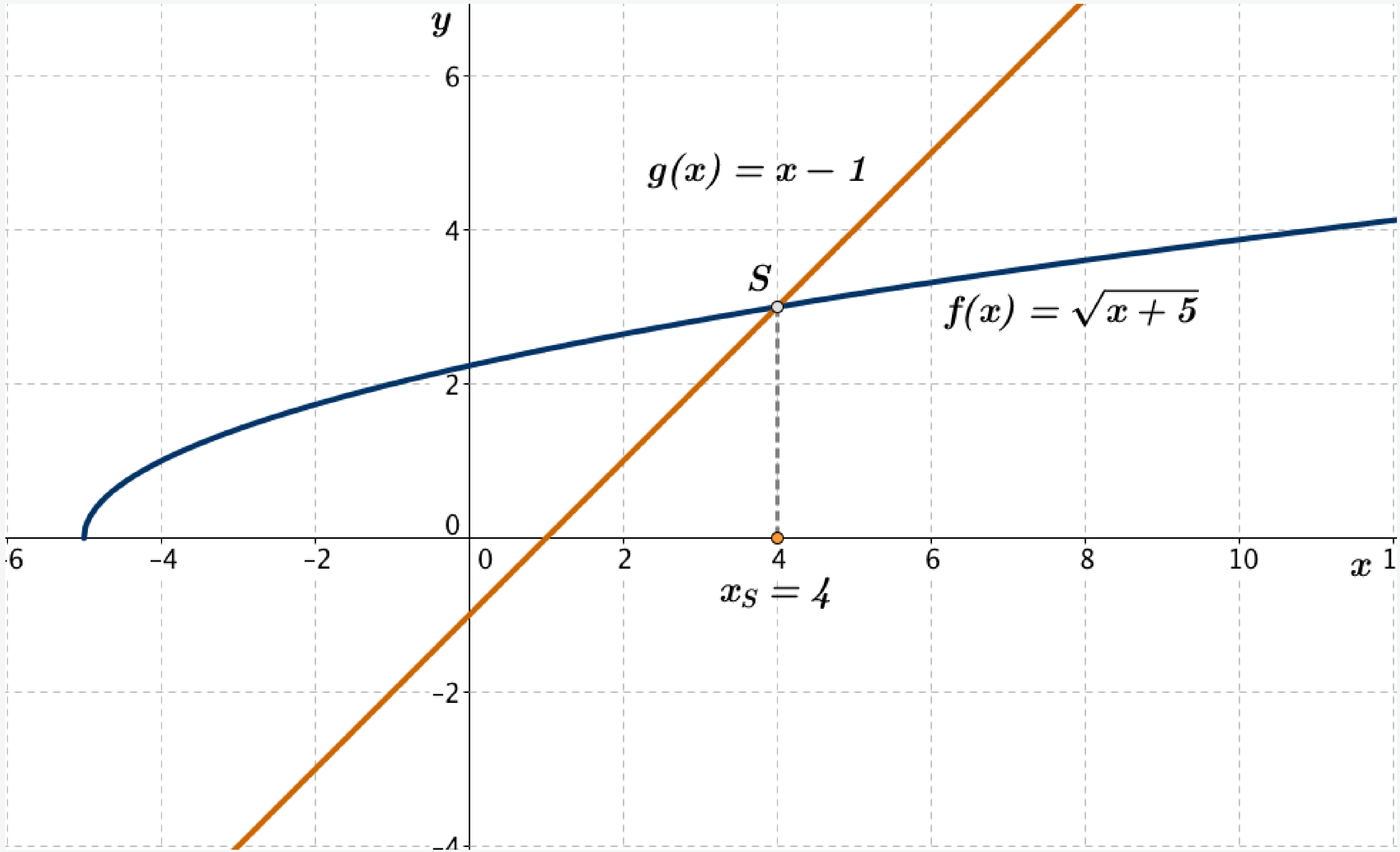

Abb. L2-1: Graphische Lösung der Gleichung. S (4, 3) ist der Schnittpunkt der Funktionen f (x) und g (x). Die Abszisse des Schnittpunkts S beider Graphen liefert die Lösung der Gleichung G.

$$G: \quad \sqrt{x+5} = x - 1, \qquad f(x) = \sqrt{x+5}\,, \qquad g(x) = x - 1$$

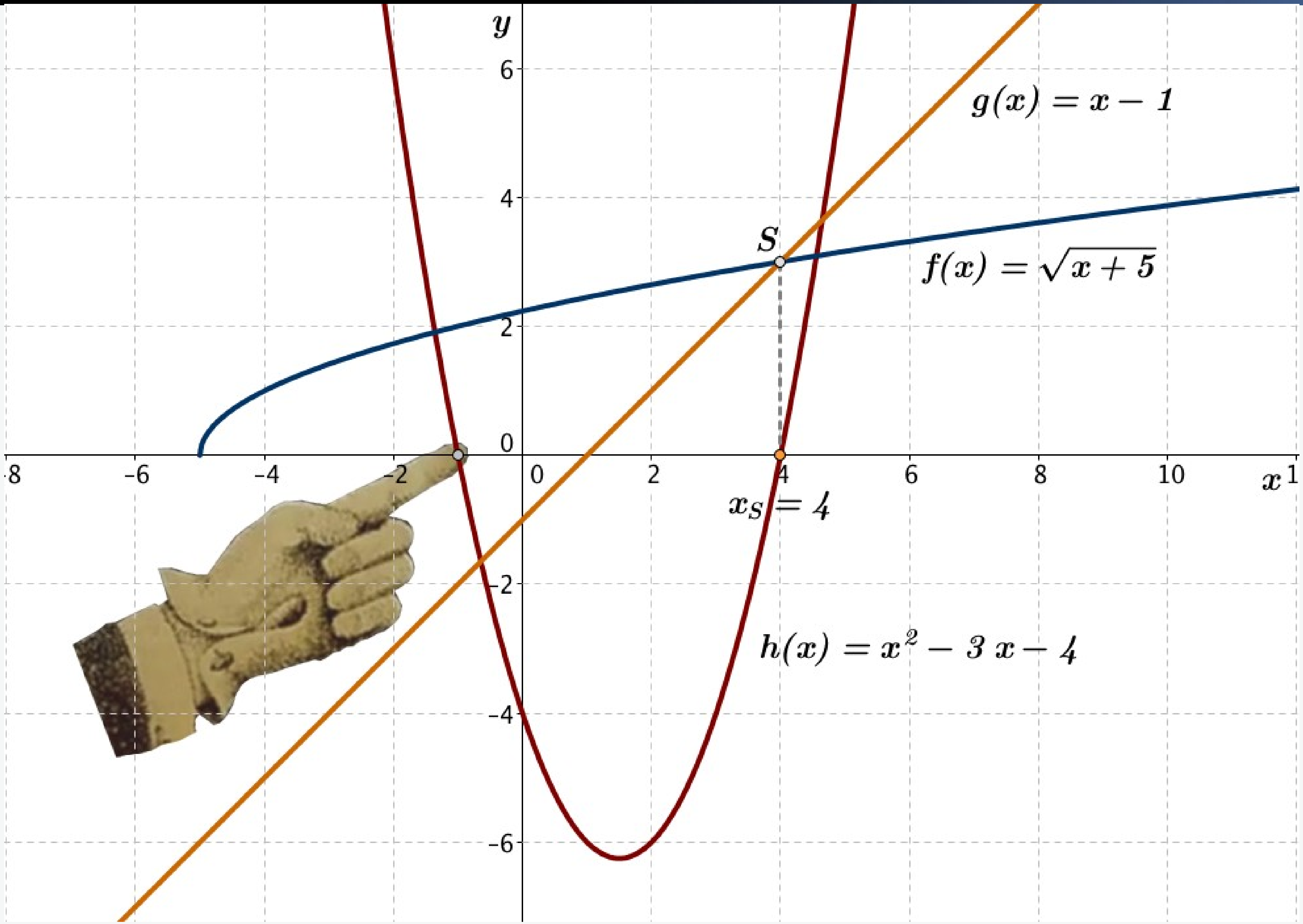

Abb. L2-2: Graphische Lösung der Gleichung. Die x-Koordinate des Schnittpunkts S (-1, 0) der Funktion h (x) mit der x-Achse ist die Scheinlösung der Aufgabe

1. $G: \quad \sqrt{x-1} + 7 = x$

2. Definitionsbereich der Gleichung: $x - 1 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad D(G) = [1, \infty)$

3. Isolieren der Wurzel: $\sqrt{x-1} = x - 7$

4. Quadrieren der Gleichung: $(\sqrt{x-1})^2 = (x-7)^2$

   Nichtäquivalente Umformung **!**

   $\widetilde{G}: \quad x - 1 = x^2 - 14x + 49 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 15x + 50 = 0$

   $D(\widetilde{G}) = \mathbb{R}, \qquad D(G) \neq D(\widetilde{G})$

   $$x_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 50}, \qquad x_1 = 5, \quad x_2 = 10$$

5. Die Lösungsmenge der umgeformten Gleichung: $L(\widetilde{G}) = \{5, 10\}$

6. Probe: $x_1 = 5 \qquad \sqrt{5-1} + 7 = 5 \qquad 9 \neq 5$

   $x_2 = 10 \qquad \sqrt{10-1} + 7 = 10 \qquad 10 = 10$

   $\Rightarrow \quad L(G) \neq L(\widetilde{G})$

7. Die Lösung der Gleichung: $L(G) = \{10\}$

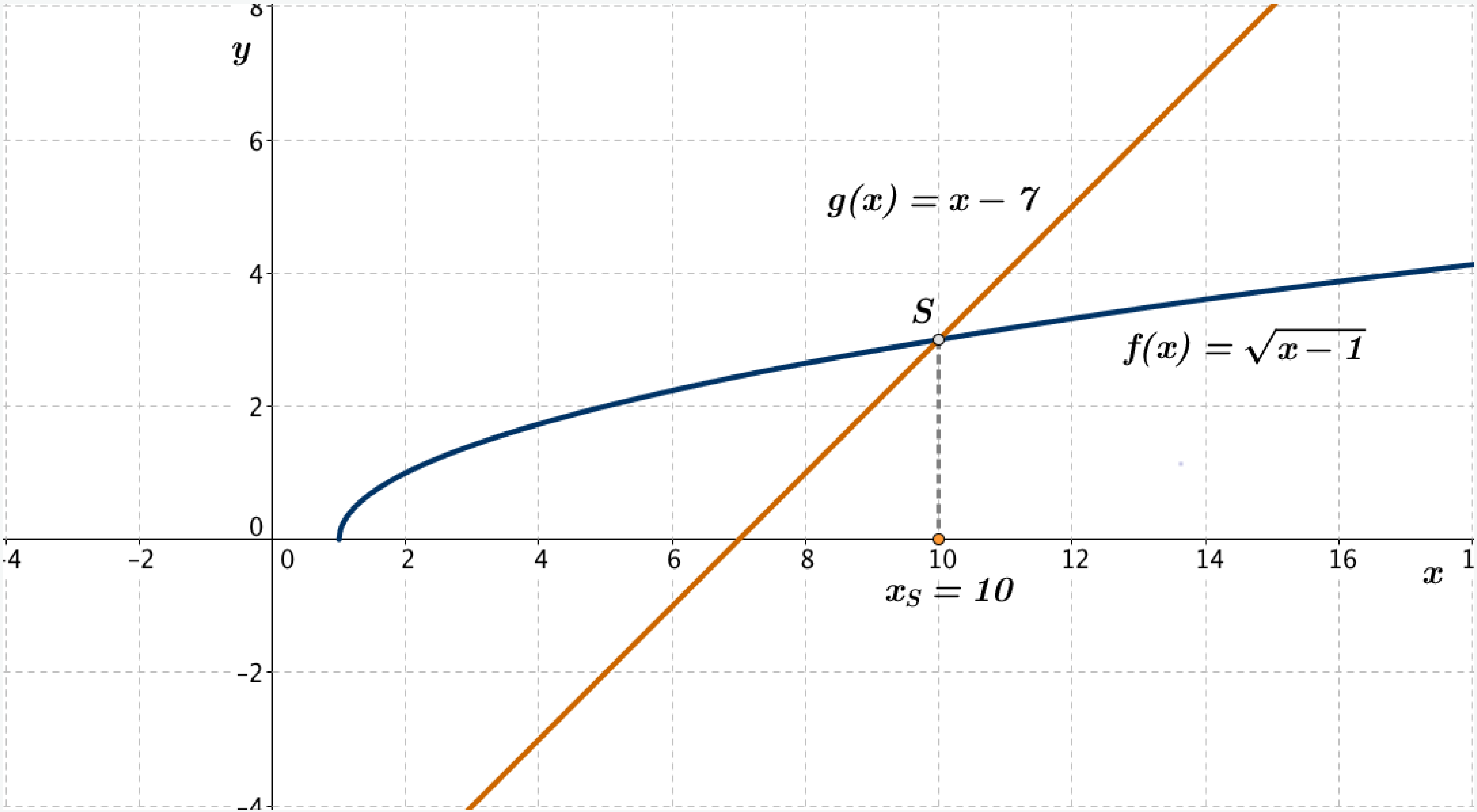

Abb. L3-1: Graphische Lösung der Gleichung. S (4, 3) ist der Schnittpunkt der Funktionen f (x) und g (x). Die Abszisse des Schnittpunkts S beider Graphen liefert die Lösung der Gleichung G.

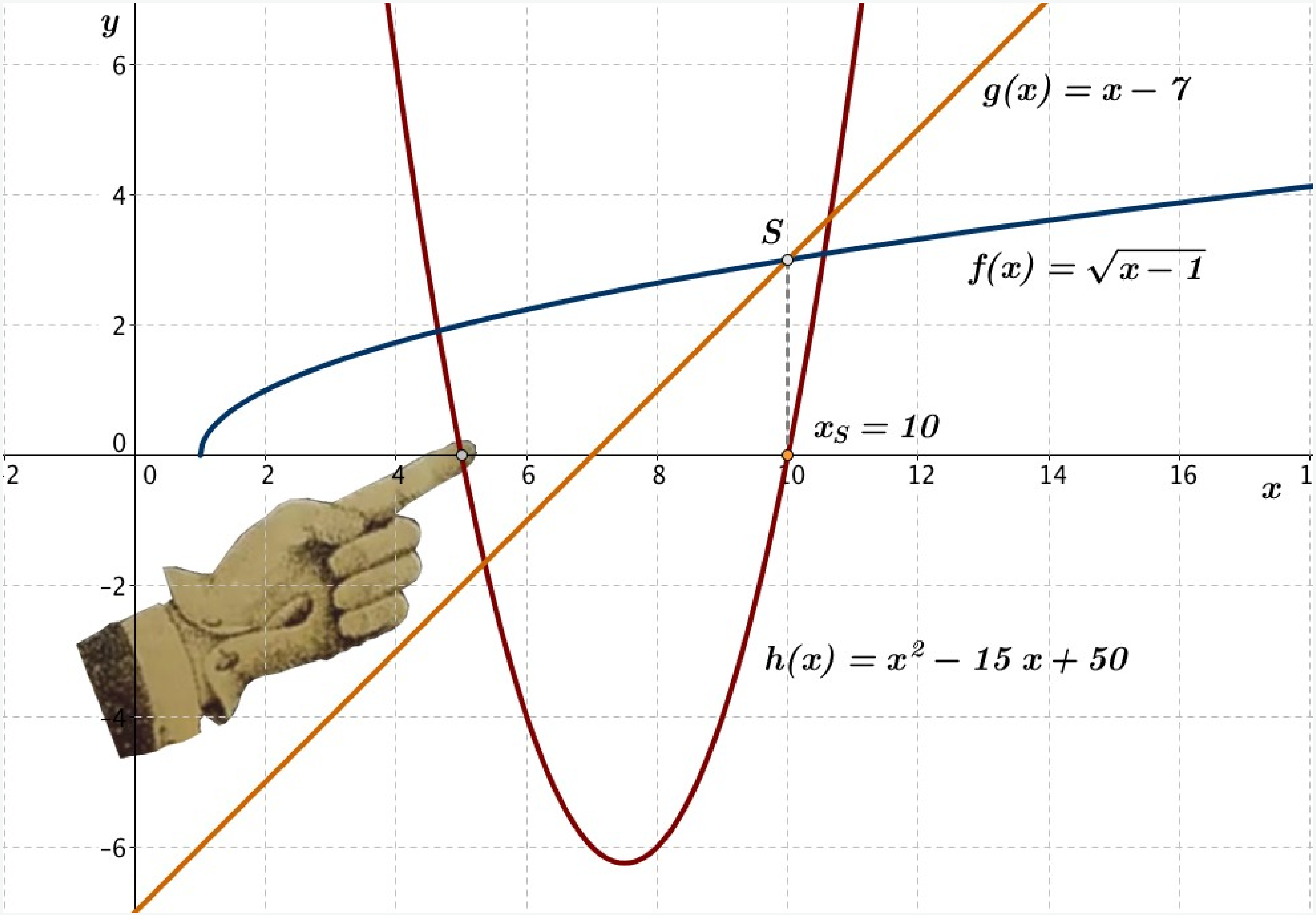

Abb. L3-2: Graphische Lösung der Gleichung. Die x-Koordinate des Schnittpunkts S (5, 0) der Funktion h (x) mit der x-Achse ist die Scheinlösung der Aufgabe

1. $G: \quad 2 - \sqrt{3x + 7} = 1 - x$

2. Definitionsbereich der Gleichung: $3x + 7 \geqslant 0, \qquad D(G) = [-\frac{7}{3}, \infty)$

3. Isolieren der Wurzel: $\sqrt{3x + 7} = x + 1$

4. Quadrieren der Gleichung: $(\sqrt{3x + 7})^2 = (x + 1)^2$

   Nichtäquivalente Umformung !

   $\widetilde{G}: \quad -x^2 + x + 6 = 0, \qquad x^2 - x - 6 = 0$

   $D(\widetilde{G}) = \mathbb{R}, \qquad D(G) \neq D(\widetilde{G})$

   $x_1 = -2, \quad x_2 = 3$

5. Die Lösungsmenge der umgeformten Gleichung: $L(\widetilde{G}) = \{-2, 3\}$

6. Probe: $x_1 = -2 \qquad \sqrt{-6 + 7} = -2 + 1 \qquad 1 \neq -1$

   $\Rightarrow \quad L(G) \neq L(\widetilde{G})$

   $x_2 = 3 \qquad \sqrt{9 + 7} = 3 + 1, \qquad 4 = 4$

7. Die Lösung der Gleichung: $L(G) = \{3\}$

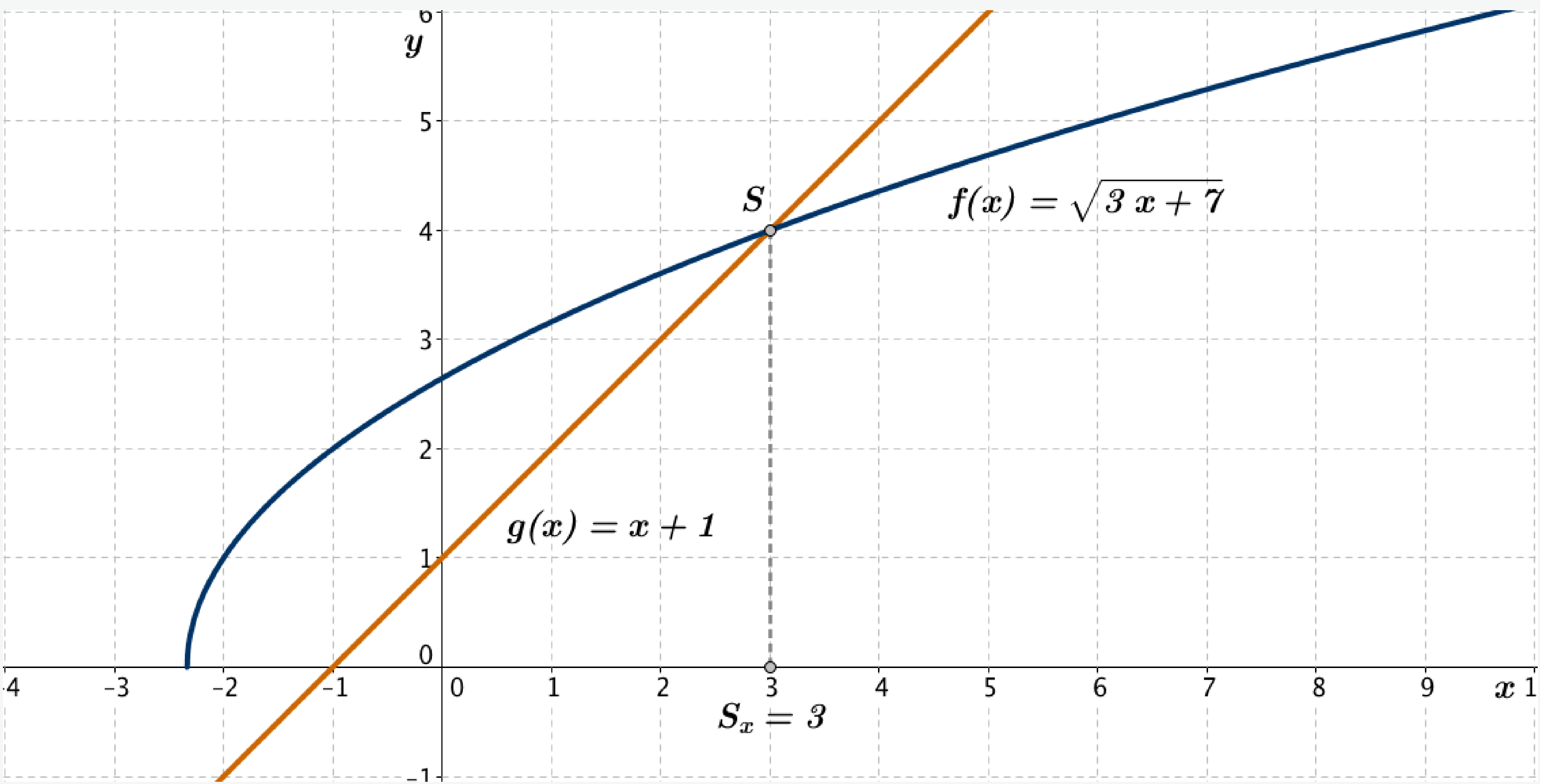

Abb. L4-1: Die x-Koordinate des Schnittpunktes der Funktionen f (x) und g (x) ist die Lösung der Wurzelgleichung der Aufgabe

$$G: \quad \sqrt{3x+7} = x + 1, \qquad L = \{ \, 3 \, \}$$

$$f(x) = \sqrt{3x+7}\,, \qquad g(x) = x + 1$$

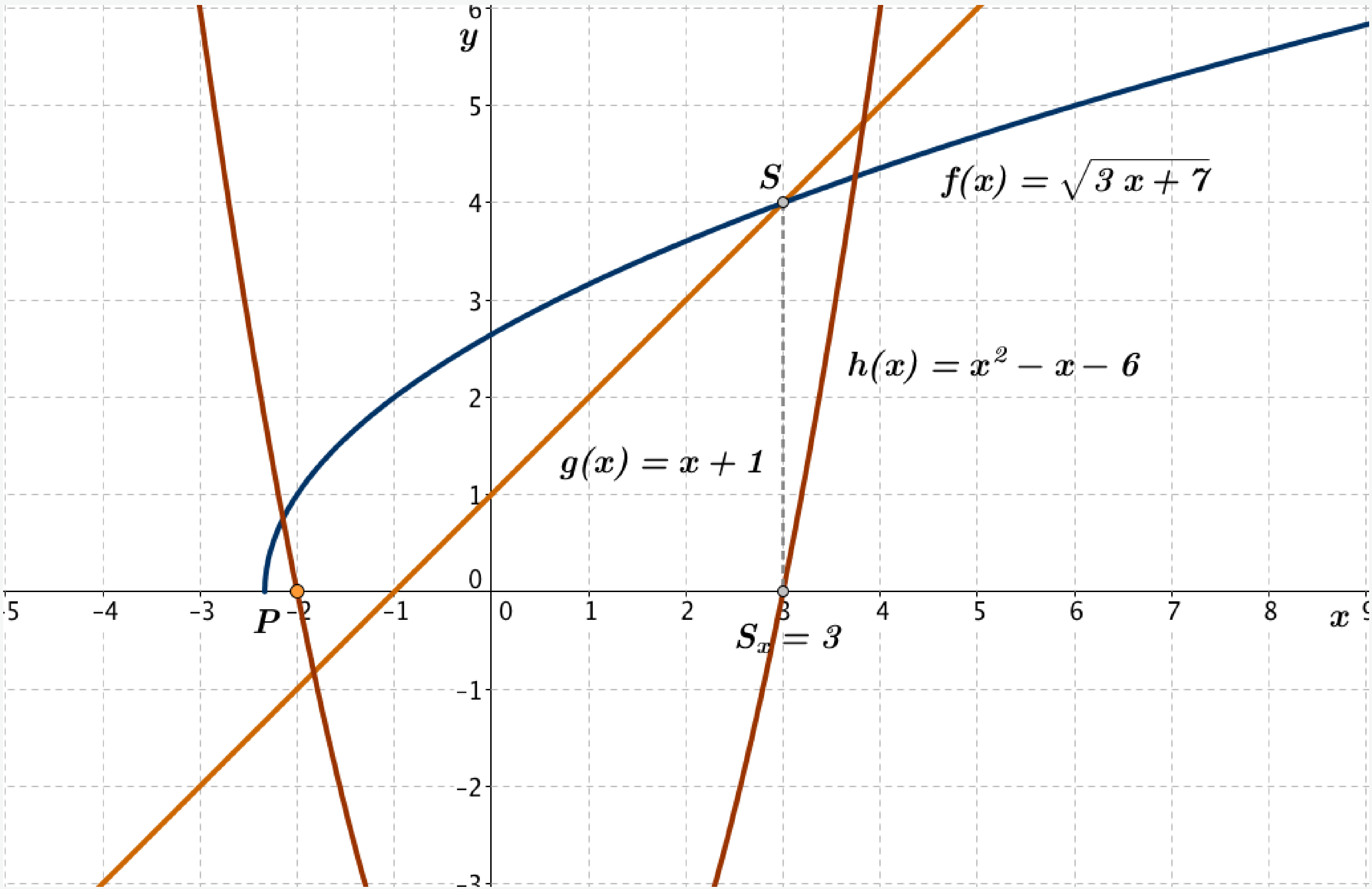

Abb. L4-2: Die Funktionen f (x), g (x) und h (x). Die x-Koordinate des Punktes P ist eine Scheinlösung der Wurzelgleichung