Wurzelfunktion: graphische Darstellung, Erklärungen

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie die Funktion $y = f(x)$ für verschiedene Werte des Parameters a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a}$$

$a)\quad a = 0, \qquad a = 1, \qquad a = 4$

$b)\quad a = -1, \qquad a = -4, \qquad a = -9$

Bestimmen Sie für $a \geq 0$ und für $a \leq 0$ die Eigenschaften der Wurzelfunktion $y = f(x)$:

Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Monotonieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen.

Aufgabe 1a: graphische Darstellung

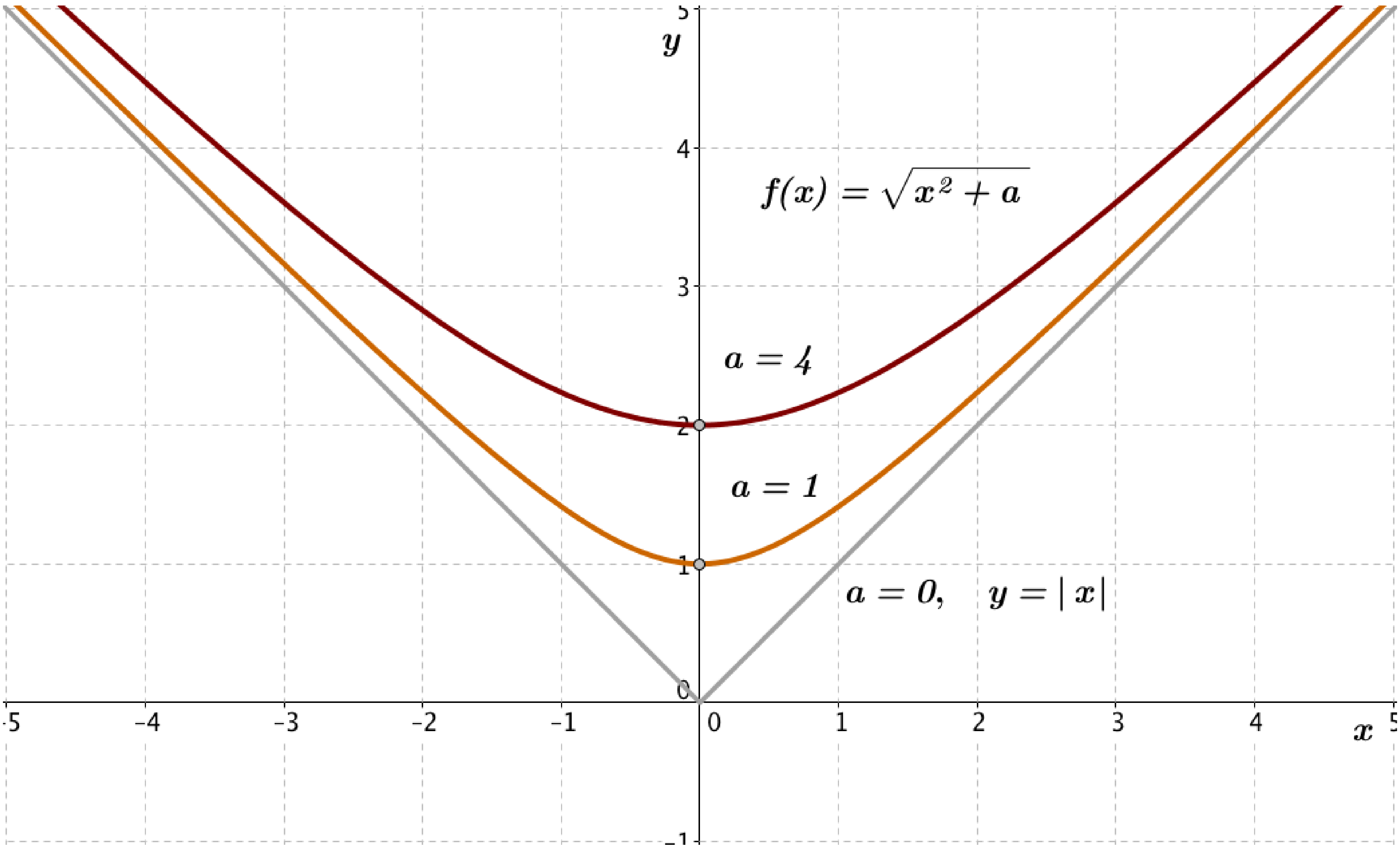


Abb. L1a: Graphische Darstellung der Wurzelfunktion $y = f(x)$ mit positiven Werten $a = 0, 1, 2$.
Bei $a = 0$ ist die Wurzelfunktion die Betragsfunktion $y = |x|$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a}: \quad a = 0, \quad a = 1, \quad a = 4$$

Die Eigenschaften der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x^2 + a}\,, \quad a \geqslant 0:$

- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich $W = [\,\sqrt{a}\,, +\infty\,)$
- $f(x)$ ist eine gerade Funktion, sie ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + a} = \sqrt{x^2 + a} = f(x)$$

- Monoton fallend im Bereich negativer x
- Monoton wachsend im Bereich positiver x
- $a = 0, \quad f(x) = |\,x\,|$
- $a > 0$, Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y = (0, \sqrt{a}\,)$

Aufgabe 1b: graphische Darstellung

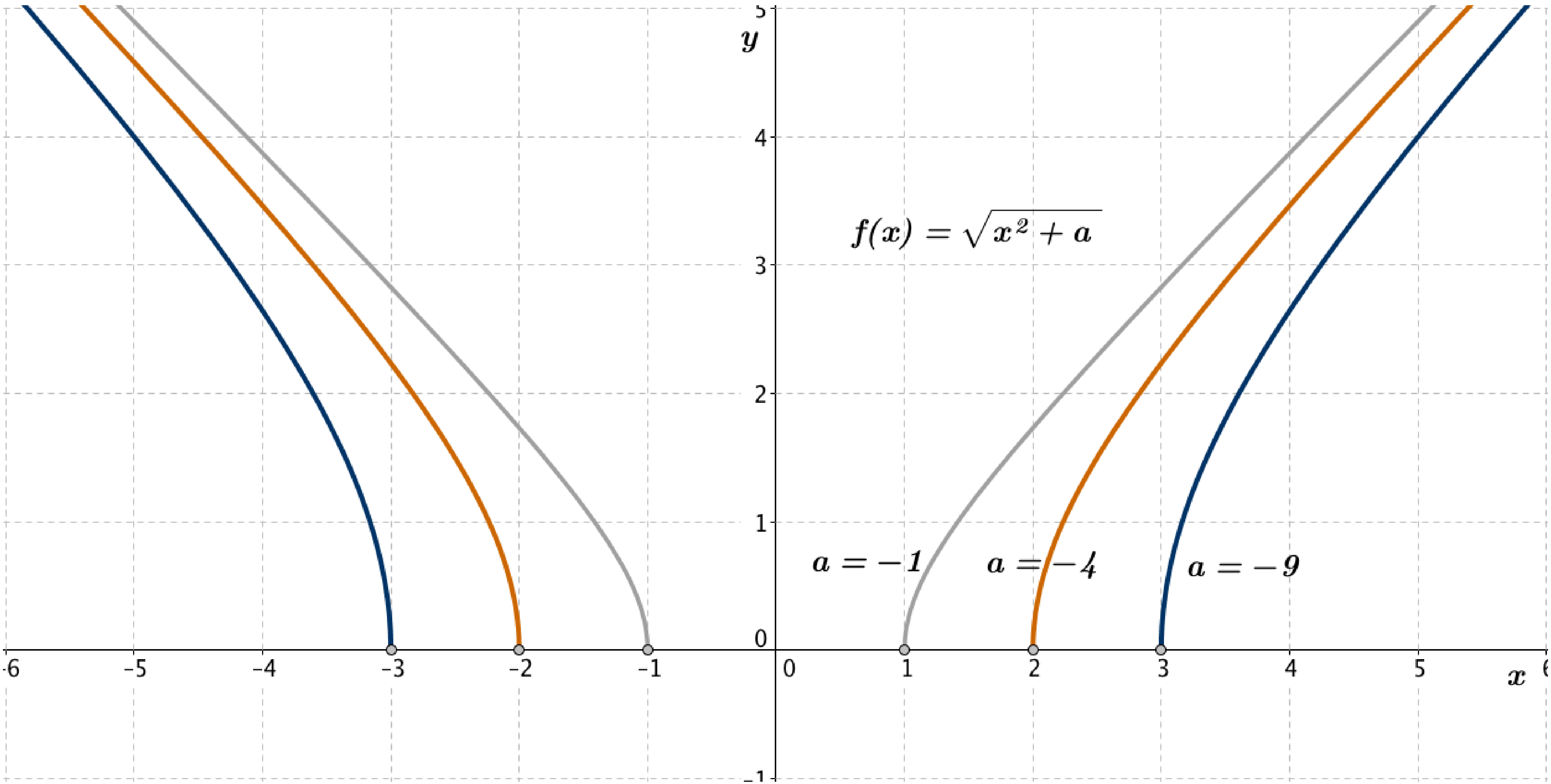


Abb. L1b: Graphische Darstellung der Wurzelfunktion $y = f(x)$ mit negativen Werten $a = -1, -4, -9$. Im bezüglich der y-Achse symmetrischen Intervall von $-\sqrt{|a|}$ bis $\sqrt{|a|}$ ist die Funktion nicht definiert.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a}: \quad a = -1, \quad a = -4, \quad a = -9$$

Die Eigenschaften der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x^2 + a}\,, \quad a \leqslant 0:$

- Definitionsbereich $D = (-\infty\,,\ -\sqrt{a}\ ] \cup [\ \sqrt{a}\ ,\ +\infty)$
- Wertebereich $W = [\,0,\ +\infty\,)$
- *f (x)* ist eine gerade Funktion, sie ist symmetrisch bezüglich der *y*-Achse

  $$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + a} = \sqrt{x^2 + a} = f(x)$$
- Monoton fallend im Bereich negativer x
- Monoton wachsend im Bereich positiver x
- Schnittpunkte mit der *x*-Achse $S_{x\,1} = (-\sqrt{-a}\ ,\ 0)\,, \quad S_{x\,2} = (\sqrt{-a}\ ,\ 0)$

Aufgabe 2:

Zeichnen Sie die Funktion $y = f(x)$ für verschiedene Werte des Parameters b:

$$f(x) = b\sqrt{x^2 + 1}$$

$a)\quad b = \frac{1}{2}, \qquad b = 2, \qquad b = 3$

$b)\quad b = -1, \qquad b = -2, \qquad b = -5$

Bestimmen Sie die Eigenschaften dieser Funktion für positive und negative Werte des Parameters b:

Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Monotonieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen.

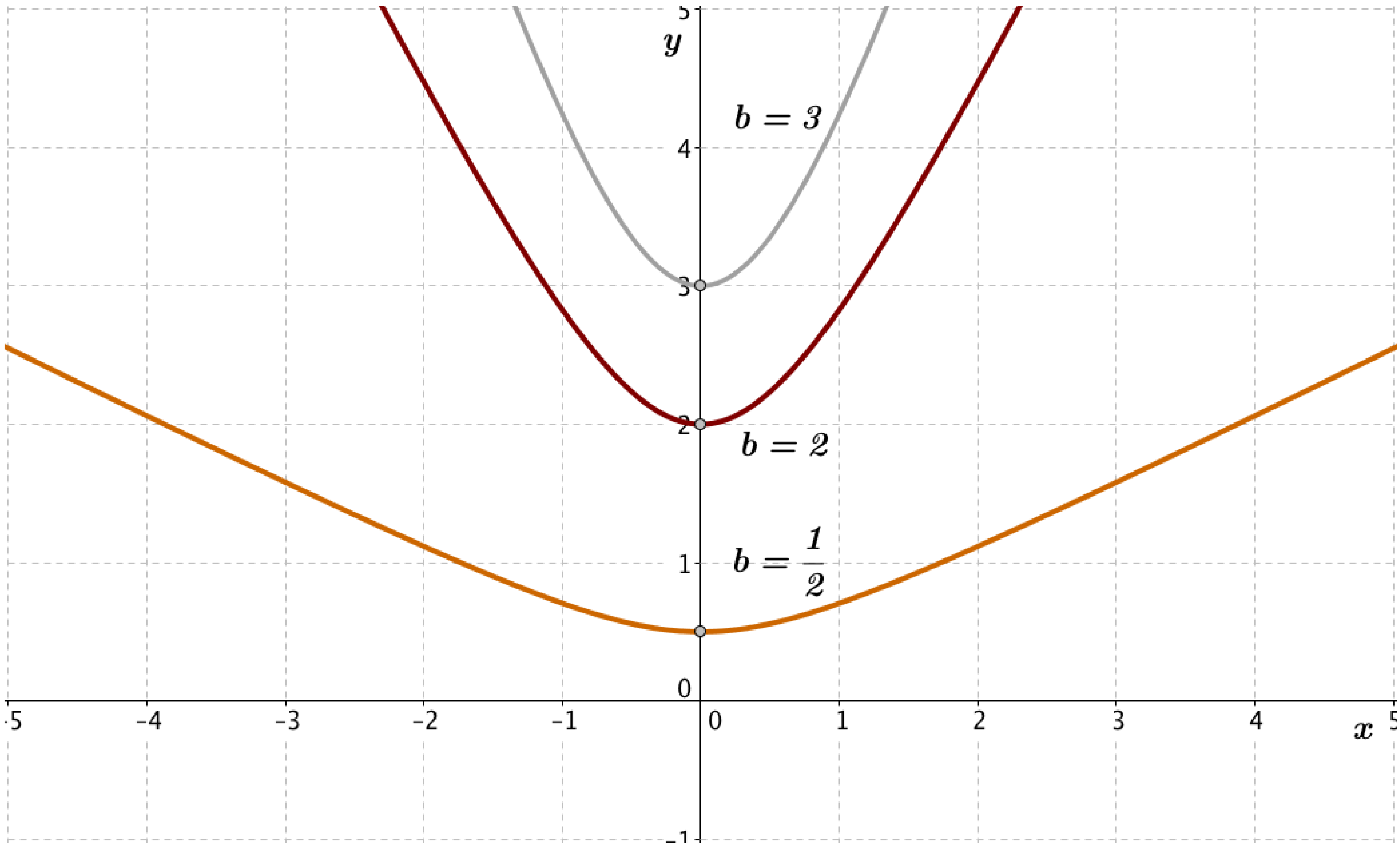


Abb. L2a: Graphische Darstellung der Wurzelfunktion y = f (x) mit b = 1/2, 2, 3

$$f(x) = b\sqrt{x^2 + 1}: \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad b = 2, \qquad b = 3$$

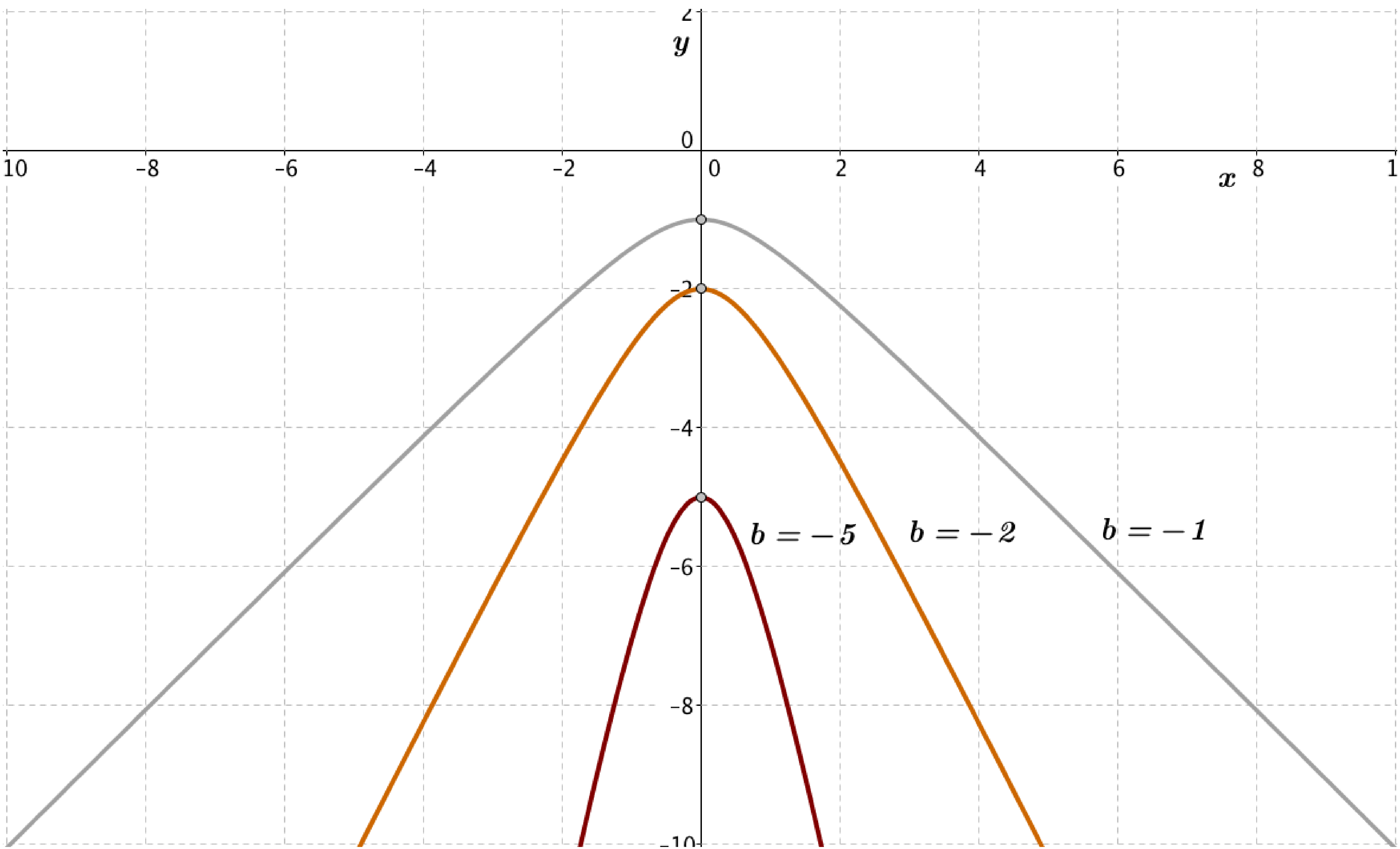
Die Eigenschaften der Wurzelfunktion $f(x) = b\sqrt{x^2 + 1}\,,\quad b \geqslant 0:$

- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich $W = [\,b\,,\ +\infty\,)$
- $f(x)$ ist eine gerade Funktion, sie ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

  $$f(-x) = b\sqrt{(-x)^2 + 1} = b\sqrt{x^2 + 1} = f(x)$$

- Monoton fallend im Bereich negativer x
- Monoton wachsend im Bereich positiver x
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y = (0,\ b)$

Aufgabe 2b: graphische Darstellung



$$f(x) = b\sqrt{x^2+1}: \quad b = -1, \quad b = -2, \quad b = -5$$

Aufgabe 2a: Funktionseigenschaften

Die Eigenschaften der Wurzelfunktion $f(x) = b\sqrt{x^2 + 1}\,,\quad b \leqslant 0:$

- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich $W = (-\infty\,,\ b\,]$
- $f(x)$ ist eine gerade Funktion, sie ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

  $$f(-x) = b\sqrt{(-x)^2 + 1} = b\sqrt{x^2 + 1} = f(x)$$

- Monoton wachsend im Bereich negativer x
- Monoton fallend im Bereich positiver x
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y = (0,\ b)$

Aufgabe 3:

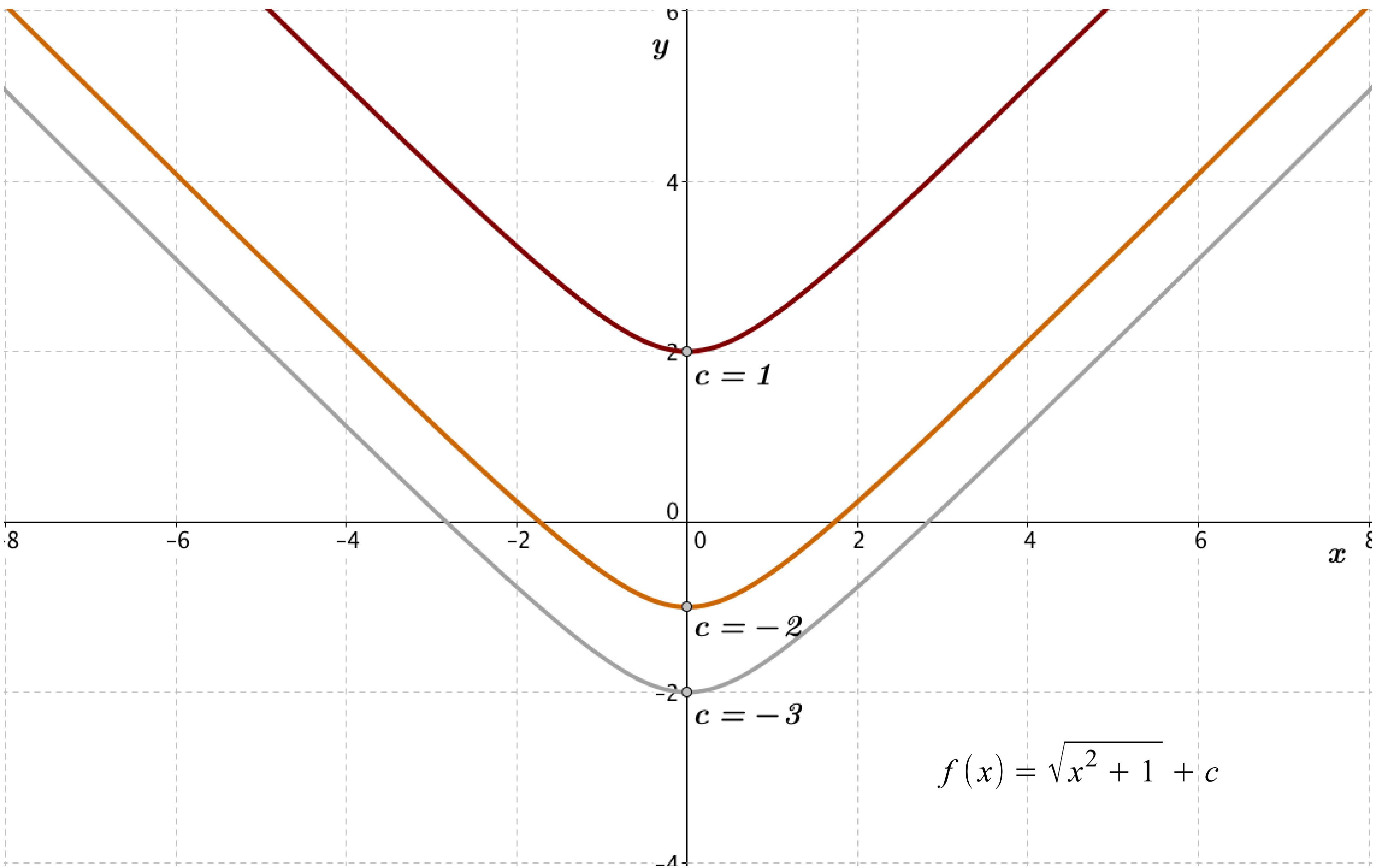
Zeichnen Sie die Funktion $y = f(x)$ für verschiedene Werte des Parameters c :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$$

1) $c = 1$, 2) $c = -2$, 3) $c = -3$

Bestimmen Sie die Eigenschaften der Wurzelfunktion $y = f(x)$:

Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Monotonieverhalten, Schnittpunkte mit den Achsen.



y
x
6
4
2
0
-2
-4
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
c = 1
c = − 2
c = − 3
$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$

Die Eigenschaften der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$:

- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich $W = [\, 1 + c\,,\ \infty\,)$
- $f(x)$ ist eine gerade Funktion, sie ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} + c = \sqrt{x^2 + 1} + c = f(x)$$

- Monoton fallend im Bereich negativer x
- Monoton wachsend im Bereich positiver x
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y = (0,\ 1 + c)$