Vektorprodukt

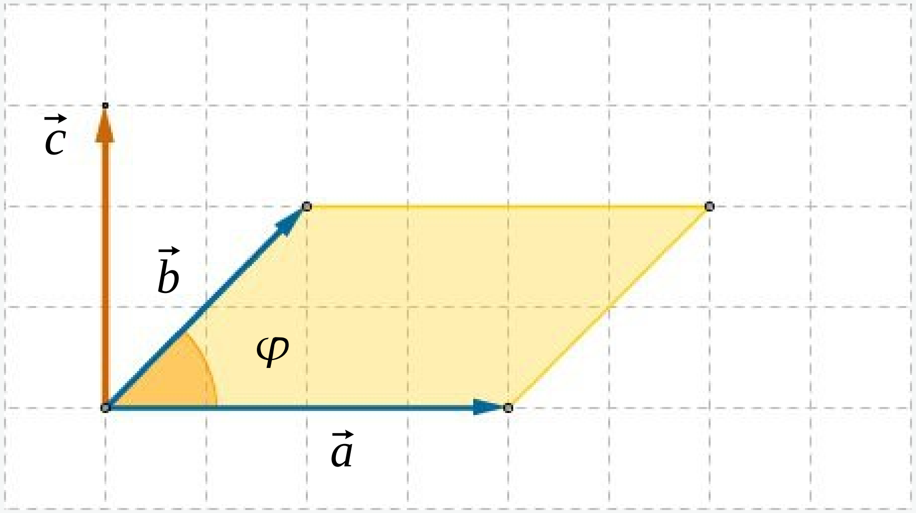
Vektorprodukt :

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

1. $|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin\varphi \qquad (\,0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ\,)$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}\,, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \qquad \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ (Skalarprodukt)

$\vec{c}$ ist senkrecht zu der Ebene, die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.



Ein Vektorprodukt gibt es nur für dreidimensionale Vektoren !

Formale Darstellung durch eine dreireihige Determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \,(a_y\, b_z - a_z\, b_y) + \vec{e}_y \,(a_z\, b_x - a_x\, b_z) +$$

$$+ \vec{e}_z \,(a_x\, b_y - a_y\, b_x)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

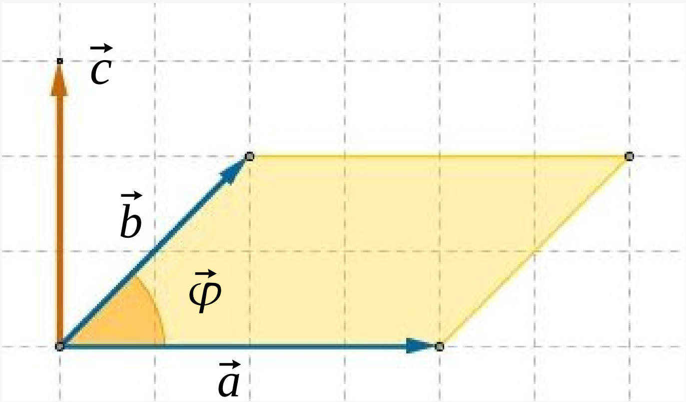
Unter dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den im Raum durch die folgenden drei Bedingungen charakterisierten Vektor:

1. $|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \sin\varphi\,, \qquad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}\,, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ (Skalarprodukt)

3. $(\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}\,)$ bildet ein Rechtssystem, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind

Aus dieser Definition ergibt sich, dass der Betrag des Vektorprodukts dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms entspricht.



$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	Alternativgesetz
$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$	Distributivgesetz
$\lambda\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\,\vec{b})$	Multiplikation mit einer reellen Zahl

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Gesucht sind alle Vektoren, die zu diesen Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 1:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -14\,\vec{e}_x + 27\,\vec{e}_y - 5\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} -14 \\ 27 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung 2:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} \perp \vec{a}\,, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$L = \left\{ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

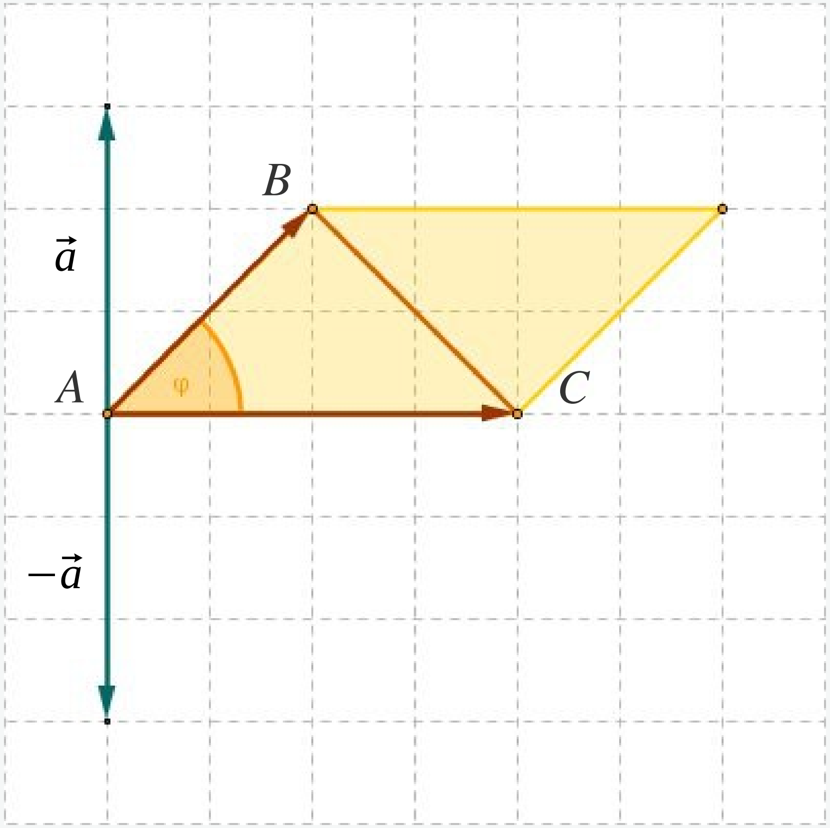
Aufgabe 3: Bestimmen sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A\,(1, 1, 0)$, $B\,(3, 2, 2)$ und $C\,(-3, -1, 2)$. Bestimmen Sie einen Vektor so, dass er auf der Dreiecksfläche senkrecht steht und den Betrag 1 hat.
(2 Lösungen)

Lösung 3: $\quad |\vec{a} \times \vec{b}\,| = \sqrt{2390} = \;= 48.89$

Lösung 4: $\quad A = (1,\ 1,\ 0)\,, \quad B = (3,\ 2,\ 2)\,, \quad C = (-3,\ -1,\ 2)$



$$\overrightarrow{AB} = (2,\ 1,\ 2)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (-4,\ -2,\ 2)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\,\vec{e}_x - 12\,\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = (6,\ -12,\ 0) = 6\,(1,\ -2,\ 0)$$

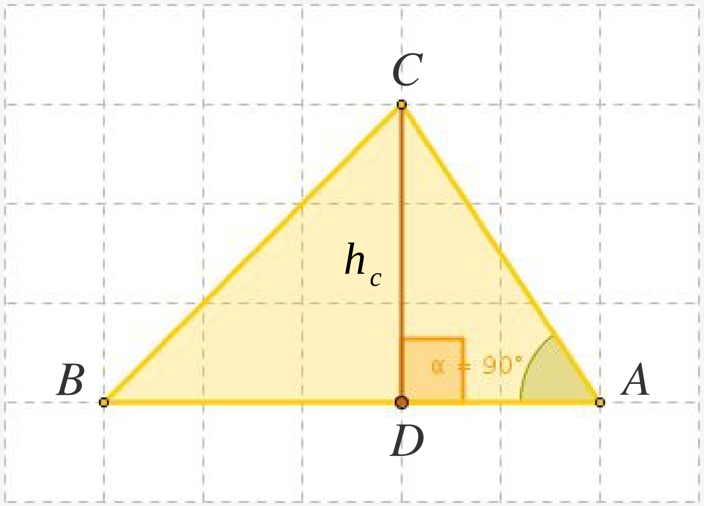
$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{6^2(1+2^2)} = 6\sqrt{5}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\,a\,|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1,\ -2,\ 0)$$

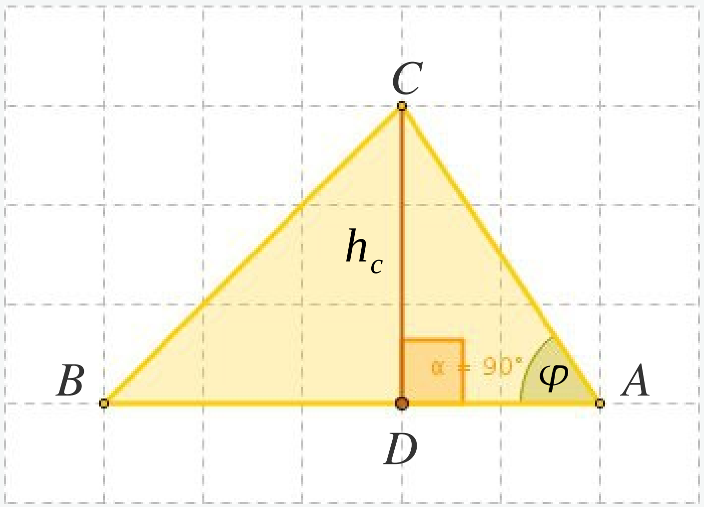
$$-\vec{e}_a = -\frac{\vec{a}}{|\,a\,|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(-1,\ 2,\ 0)$$

Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie die Höhe h_c (Lot von C auf die Seite $[AB]$)

$$A = (2,\ 3,\ -6)\,,\quad B = (6,\ 4,\ 4)\,,\quad C = (3,\ 7,\ 4)$$



$$A = (2,\ 3,\ -6)\,,\quad B = (6,\ 4,\ 4)\,,\quad C = (3,\ 7,\ 4)$$



$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,\left|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,\right|$$

$$\vec{AB} = (4,\ 1,\ 10)\,,\qquad \vec{AC} = (1,\ 4,\ 10)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 1 & 10 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -30\ \vec{e}_x - 30\ \vec{e}_y + 15\ \vec{e}_z =$$

$$= 15\ (-2,\ -2,\ 1)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,\left|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,\right| = \frac{15}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{45}{2} = 22.5\ \text{FE}$$

$$\left|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,\right| = |\,AB\,| \cdot |\,AC\,|\ \sin\varphi\,,\qquad \sin\varphi = \frac{\left|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,\right|}{|\,AB\,| \cdot |\,AC\,|}$$

$$h_c = |\,AC\,|\ \sin\varphi = |\,AC\,|\ \frac{\left|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,\right|}{|\,AB\,| \cdot |\,AC\,|} = \frac{\left|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,\right|}{|\,AB\,|} = \frac{45}{\sqrt{117}} \simeq \frac{45}{10.82} \simeq 4.16\ \text{LE}$$