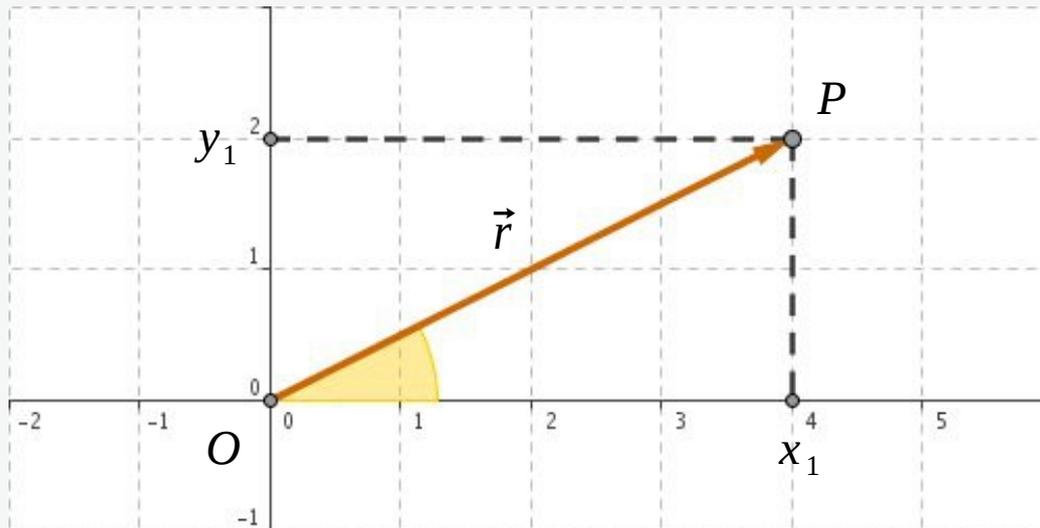




*Vektorrechnung in der Ebene*

## Polarkoordinatenform eines Vektors



$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1}{|\vec{r}|}, \quad \sin \varphi = \frac{y_1}{|\vec{r}|} \quad \Rightarrow \quad x_1 = |\vec{r}| \cos \varphi, \quad y_1 = |\vec{r}| \sin \varphi$$

Es ist möglich, einen zweidimensionalen Vektor in Abhängigkeit seiner Länge und des Winkels, den er mit der ersten Koordinatenachse einschließt, darzustellen, d.h.

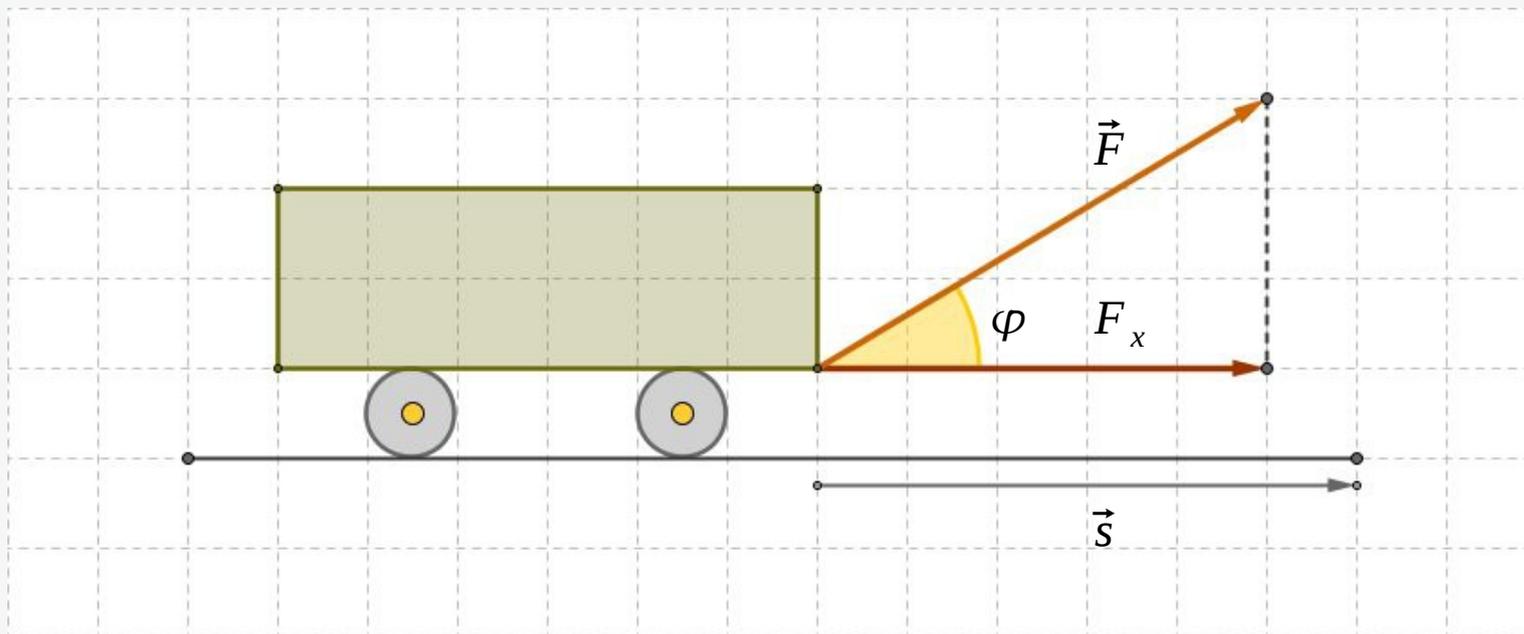
$$\vec{r} = |\vec{r}| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

## Skalarprodukt

Es gibt des öfteren Situationen, in welchen nur der in eine gewisse Richtung weisende Anteil eines Vektors zu einem Ergebnis beiträgt.

Bei der Bewegung eines Ziehewagens greift die Kraft  $\vec{F}$  aufgrund der Anatomie des Menschen schräg nach oben an. Für die Fortbewegung ist lediglich die horizontale Kraft  $\vec{F}_x$  relevant, während der vertikale Anteil wirkungslos bleibt. Der Betrag des horizontalen Anteils berechnet sich als

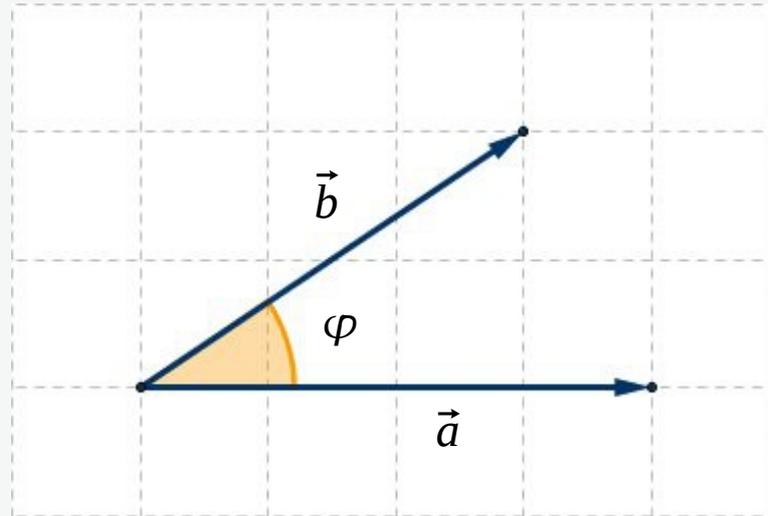
$$|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cos \varphi$$



Die resultierende physikalische Arbeit bei einer Horizontalbewegung mit Wegvektor  $\vec{s}$  ist

$$W = |\vec{F}_x| \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi$$

# Skalarprodukt



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = a b \cdot \cos \varphi$$

$$(0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

Das Skalarprodukt ist eine Rechenoperation in der Menge der Vektoren, die zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet und damit aus dem Bereich der Vektoren herausführt.



## Rechengesetze für Skalarbildung:

Kommutativgesetz:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivgesetz:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

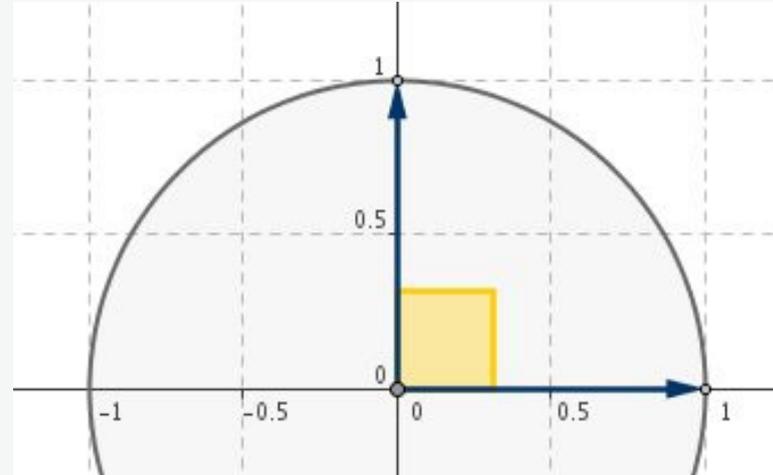
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y$$

Der von diesen Vektoren eingeschlossene Winkel

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

## Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren



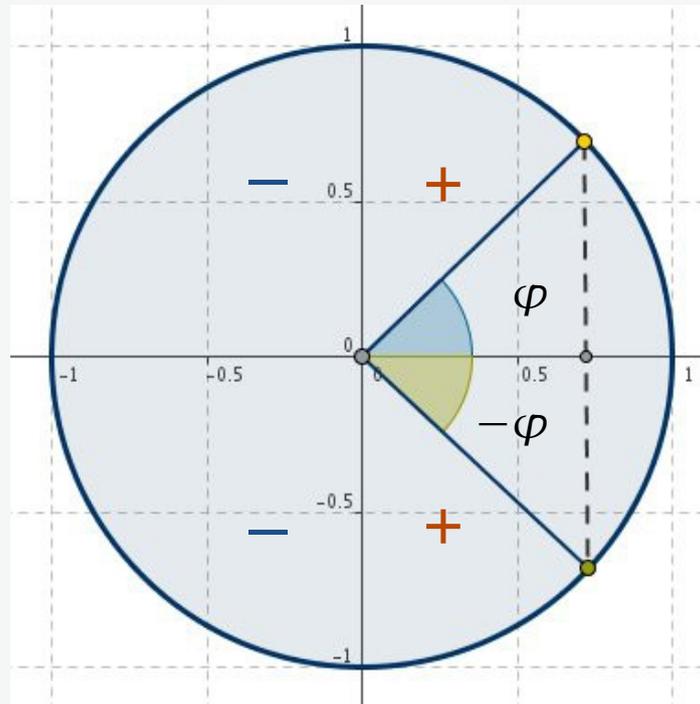
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

## Mathematisches Rüstzeug: Kosinus

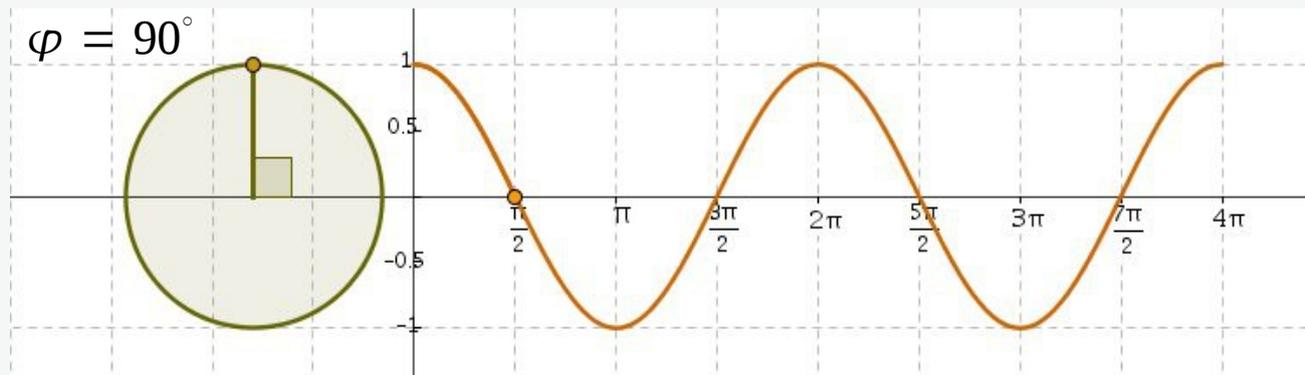
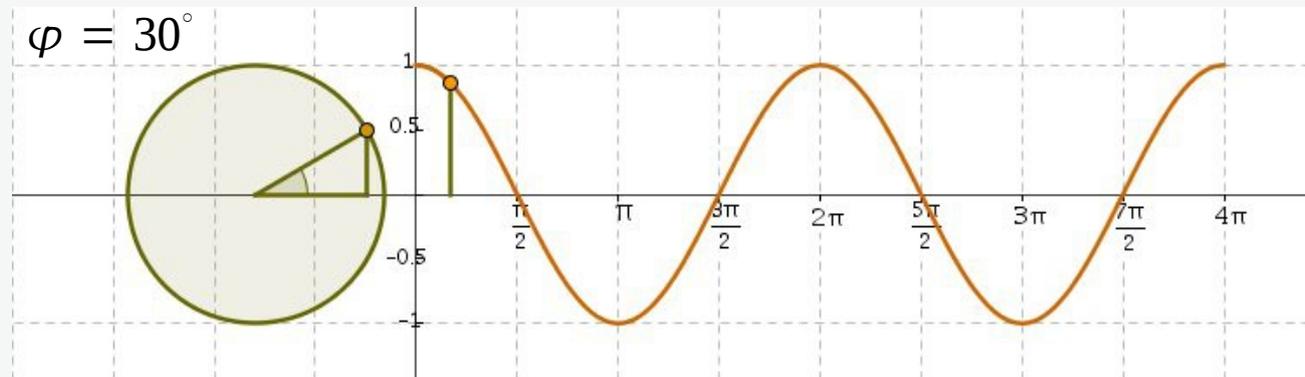
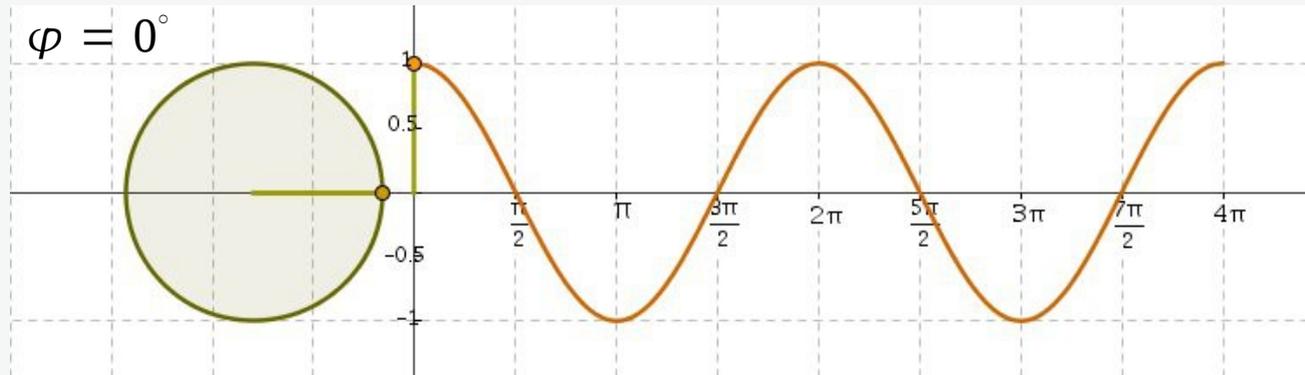
Weil in der Definition des Skalarprodukts der Faktor  $\cos \varphi$  in Abhängigkeit von dem Winkel positiv, Null oder negativ sein kann, gilt dasselbe auch für das Skalarprodukt zweier Vektoren.



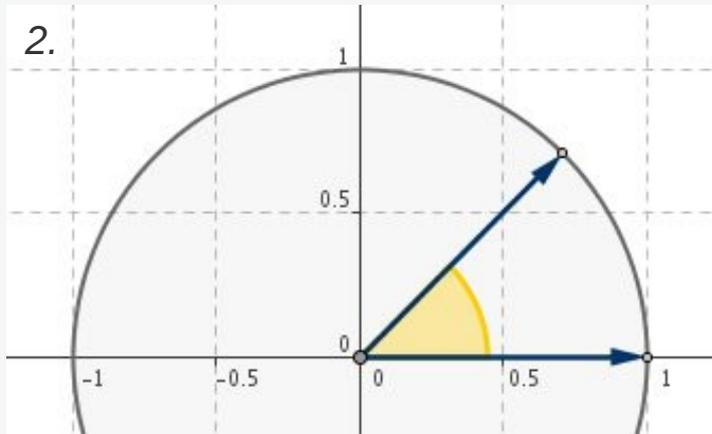
$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos 0^\circ = 1, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 90^\circ = 0$$

# Mathematisches Rüstzeug: Kosinus



## Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren



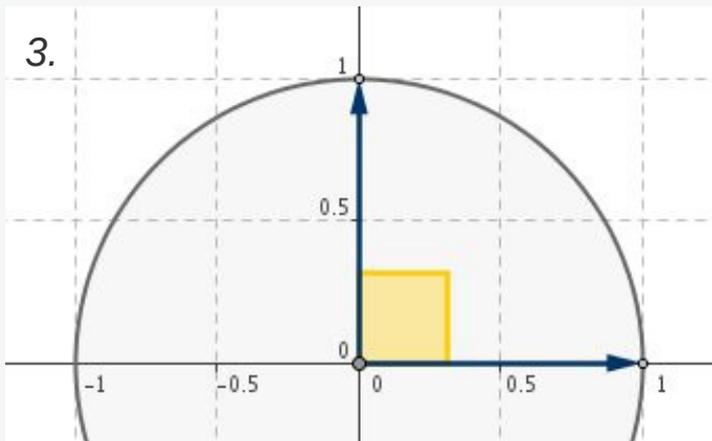
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

1.  $\varphi = 0^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| > 0$$

2.  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$

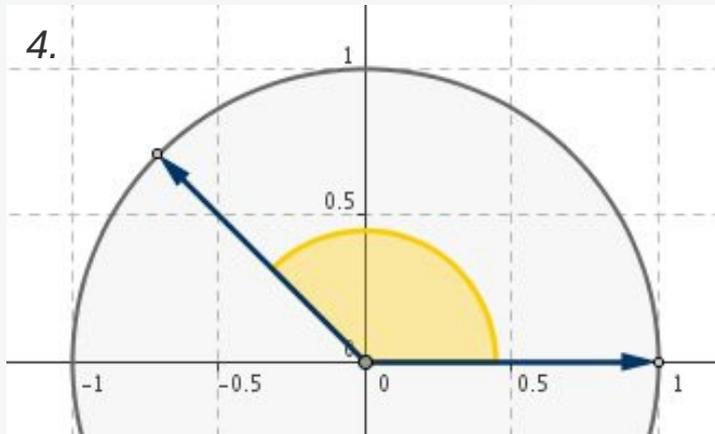
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$



3.  $\varphi = 90^\circ$

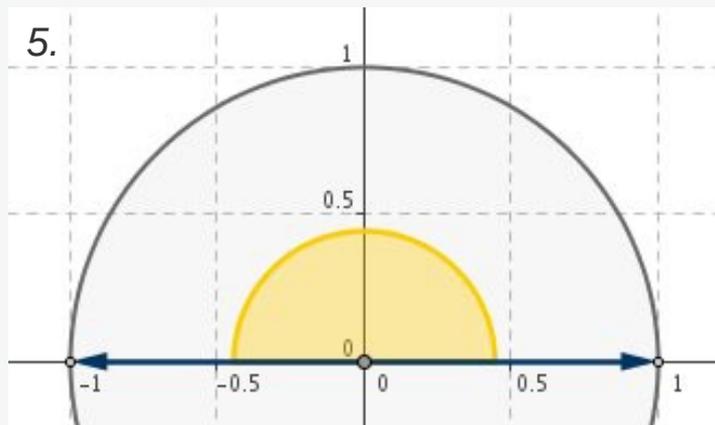
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

# Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren



4.  $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$



5.  $\varphi = 180^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| < 0$$

## Skalarprodukt: Aufgaben 1, 2

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$a) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Winkel zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$a) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Lösung 1:

$$a) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = -3 + 10 = 7$$

$$b) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

## Lösung 2:

$$a) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3} \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3 + 1} \cdot \sqrt{0 + 1}} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60^\circ$$

$$b) \quad \cos \varphi = = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{\sqrt{4 + 9} \cdot \sqrt{1 + 4}} = \frac{-2 + 6}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \sim 0.496 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60.26^\circ$$