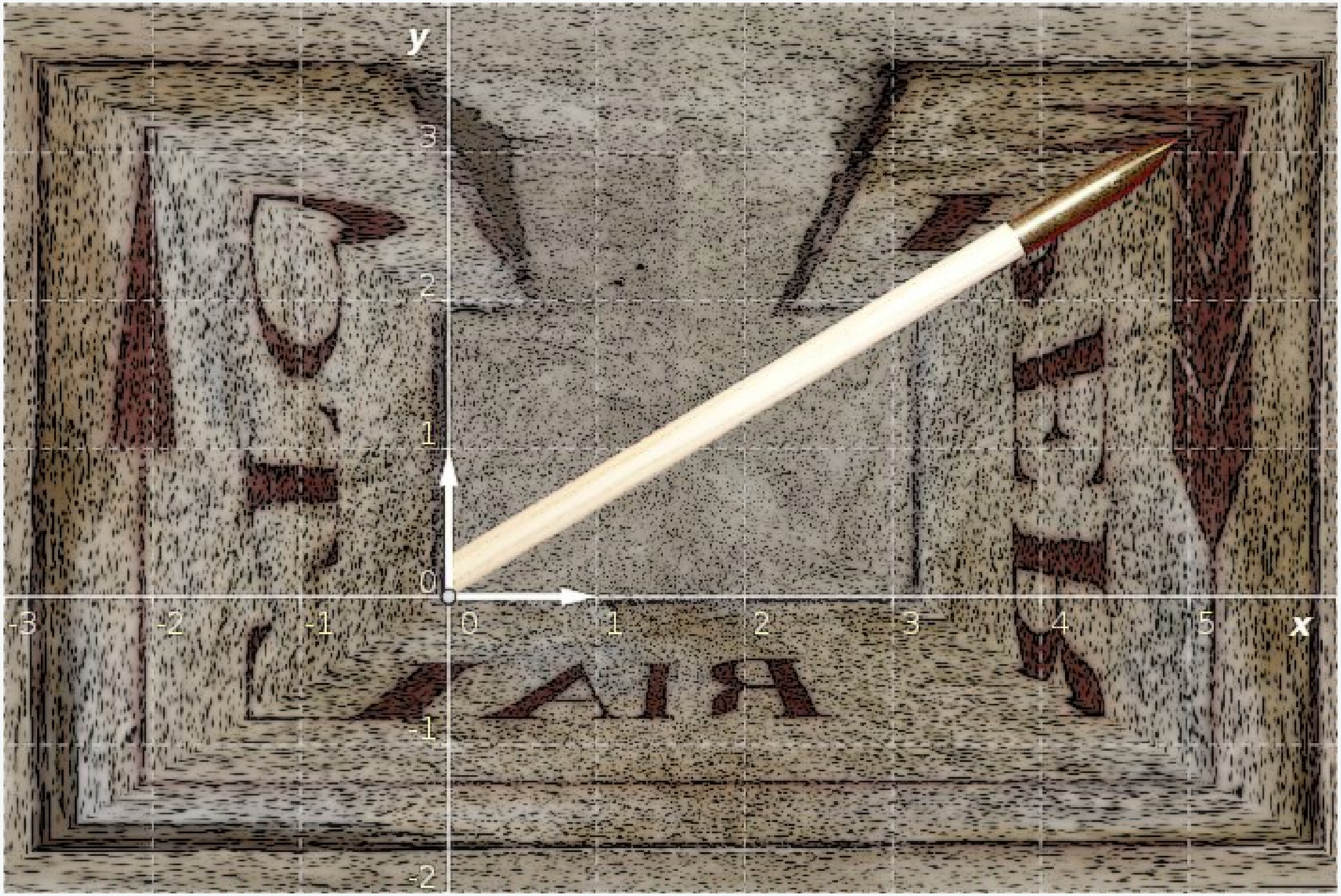
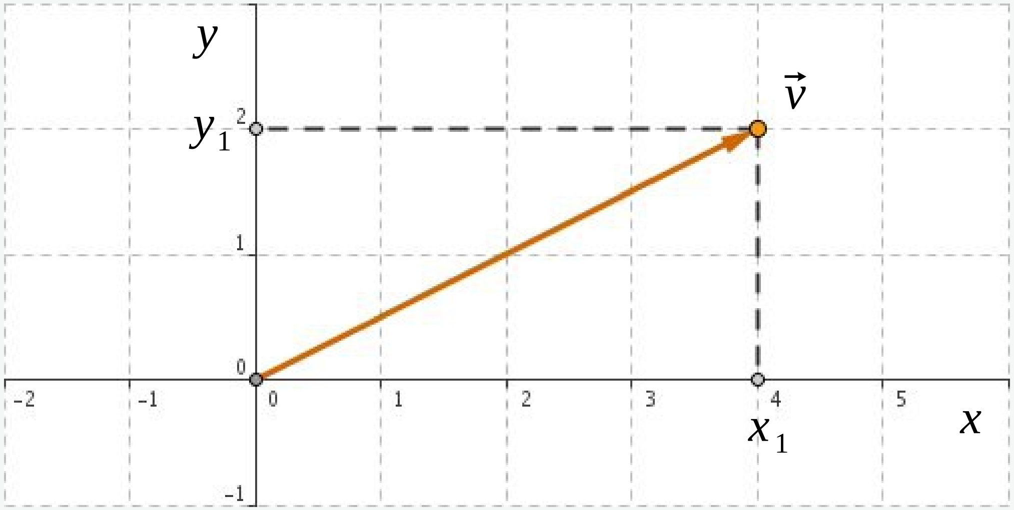


Vektorrechnung

Das Bild zeigt ein ebenes kartesisches Koordinatensystem. Die Punkte der Ebene Können mit den Elementen aus $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden. Dem Punkt v der Ebene ordnen wir seine zwei Koordinaten anhand des gegebenen Koordinatensystems zu, und wir schreiben

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



Somit ist die Menge der Spaltenvektoren gleich der Gesamtheit aller Punkte der Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,\, y_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition 1:

Unter einem Vektor versteht man die Menge aller Pfeile, die gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert sind. Ein einzelner Pfeil aus dieser Menge heißt ein Repräsentant des Vektors.

Definition 2:

Vektoren sind gerichteten Größen.

wichtig! wohin ein Vektor zeigt und wie lang er ist

nicht wichtig! wo der Vektor sich befindet

Betrag eines Vektors ist die Maßzahl der Länge des Pfeils: $|\vec{a}| = a \geqslant 0$

Eindeutige Bestimmung eines Vektors durch Angabe von:

1. Betrag und Richtung *oder*
2. Anfangspunkt und Endpunkt

Spezielle Vektoren:

Nullvektor : Jeder Vektor vom Betrag Null $|\vec{0}| = 0\,, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

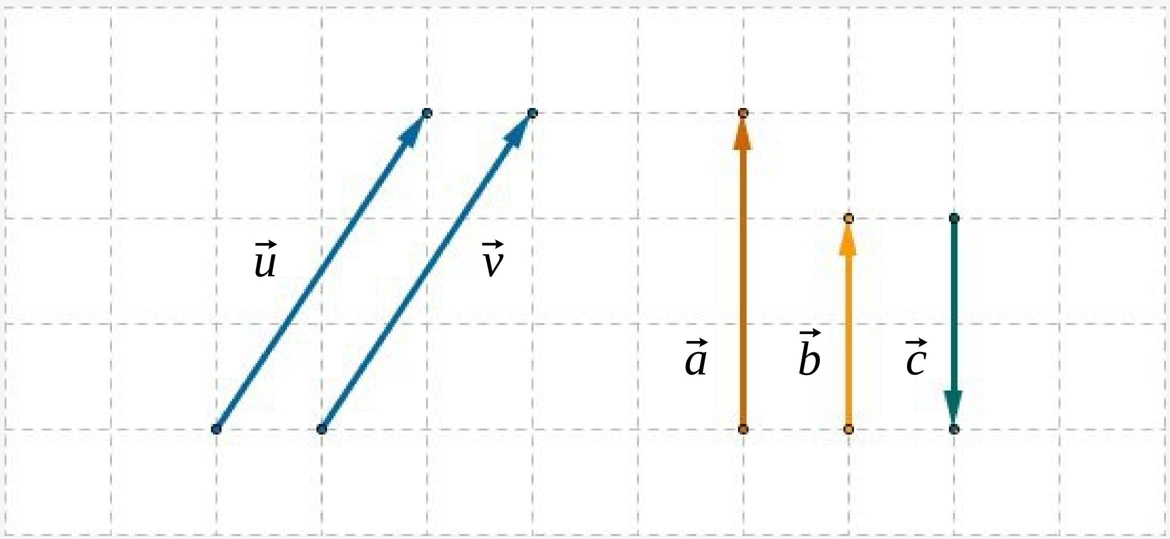
Einheitsvektor : Jeder Vektor vom Betrag Eins $|\vec{e}| = 1$

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen $\vec{u} = \vec{v}$.

$\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}\,, \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ – parallele Vektoren

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}\,, \quad \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ – anti-parallele Vektoren

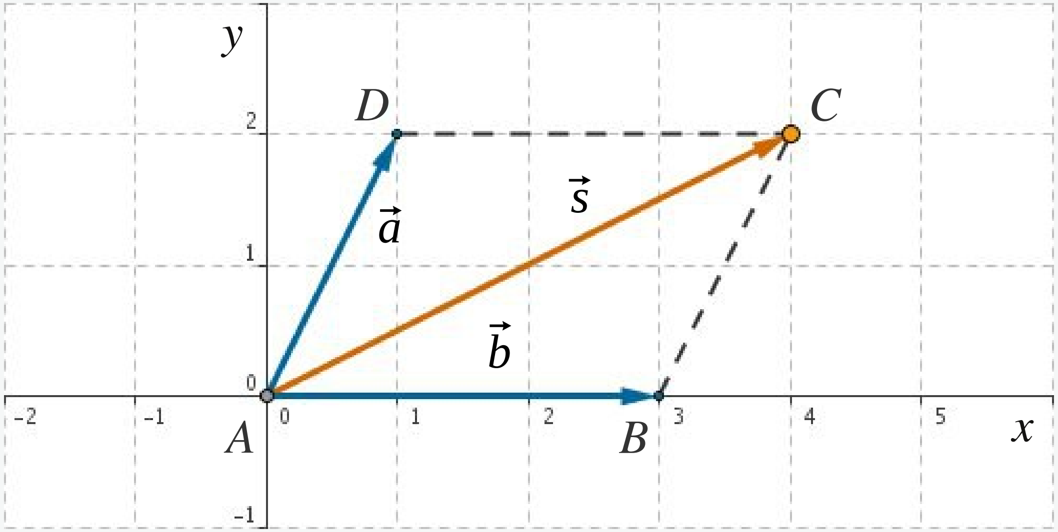
$\vec{b} = -\vec{c}$ – Vektor und Gegenvektor



Der Summenvektor ist die gerichtete Diagonale in diesem Parallelogramm

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Parallelogrammregel



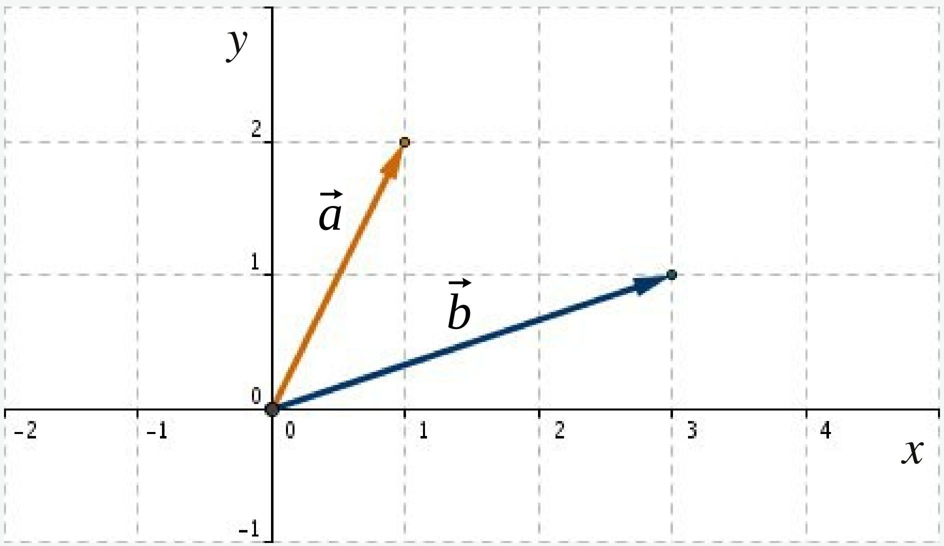
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\,, \qquad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \vec{s}$$

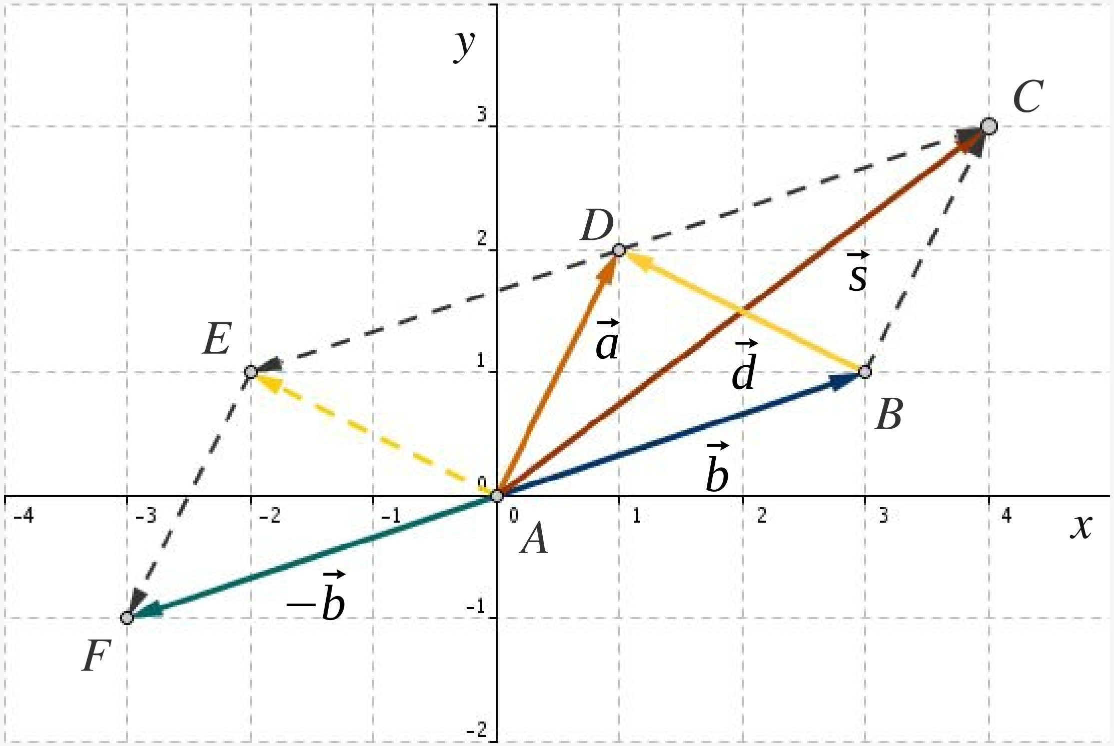
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

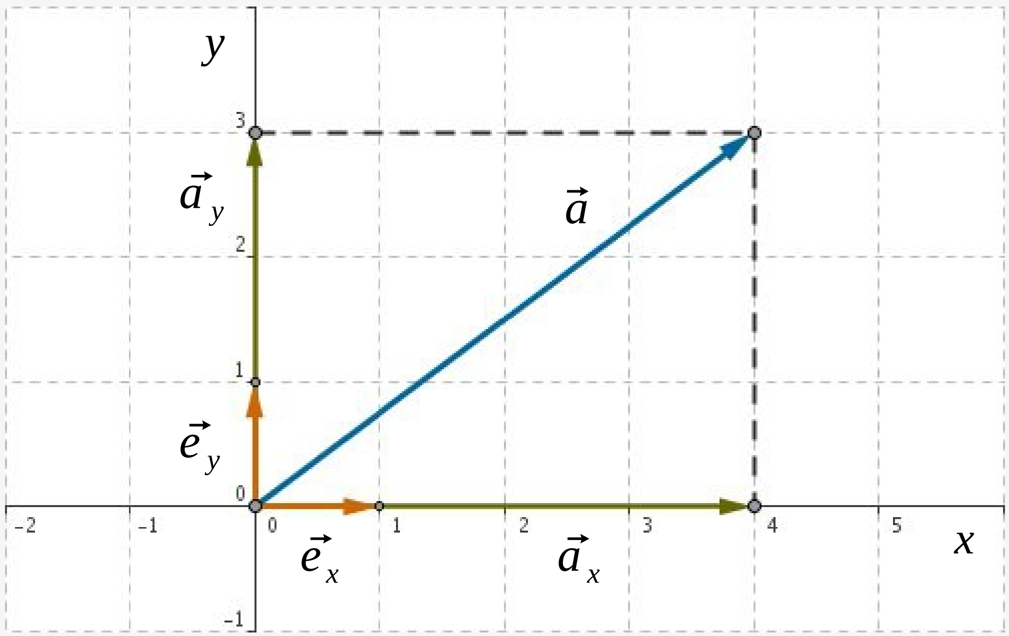


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \vec{s}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD} = \vec{d}$$

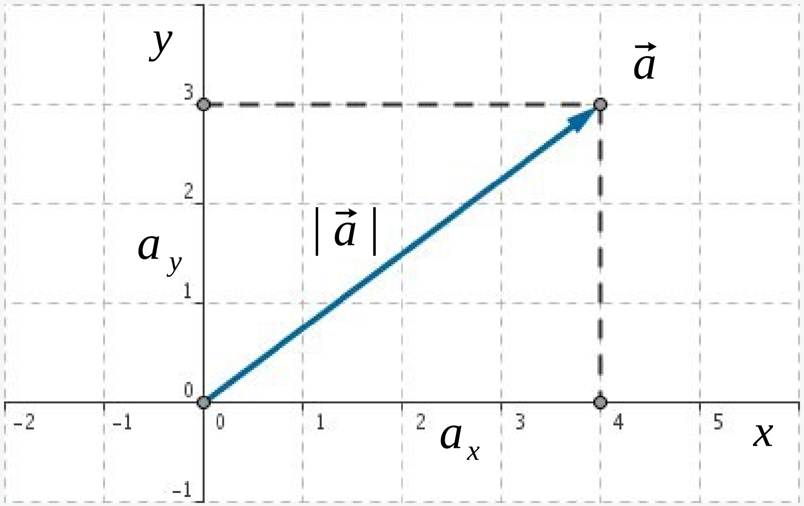


$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ Spaltenvektor

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – Basisvektoren

$\vec{a}_x\,,\ \vec{a}_y$ – Vektorkomponenten

$a_x\,,\ a_y$ – Vektorkoordinaten



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Beispiel: Wir bestimmen den Ortsvektor des Punktes $P = (4, 3)$.

$$\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP} = 4\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(P)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$