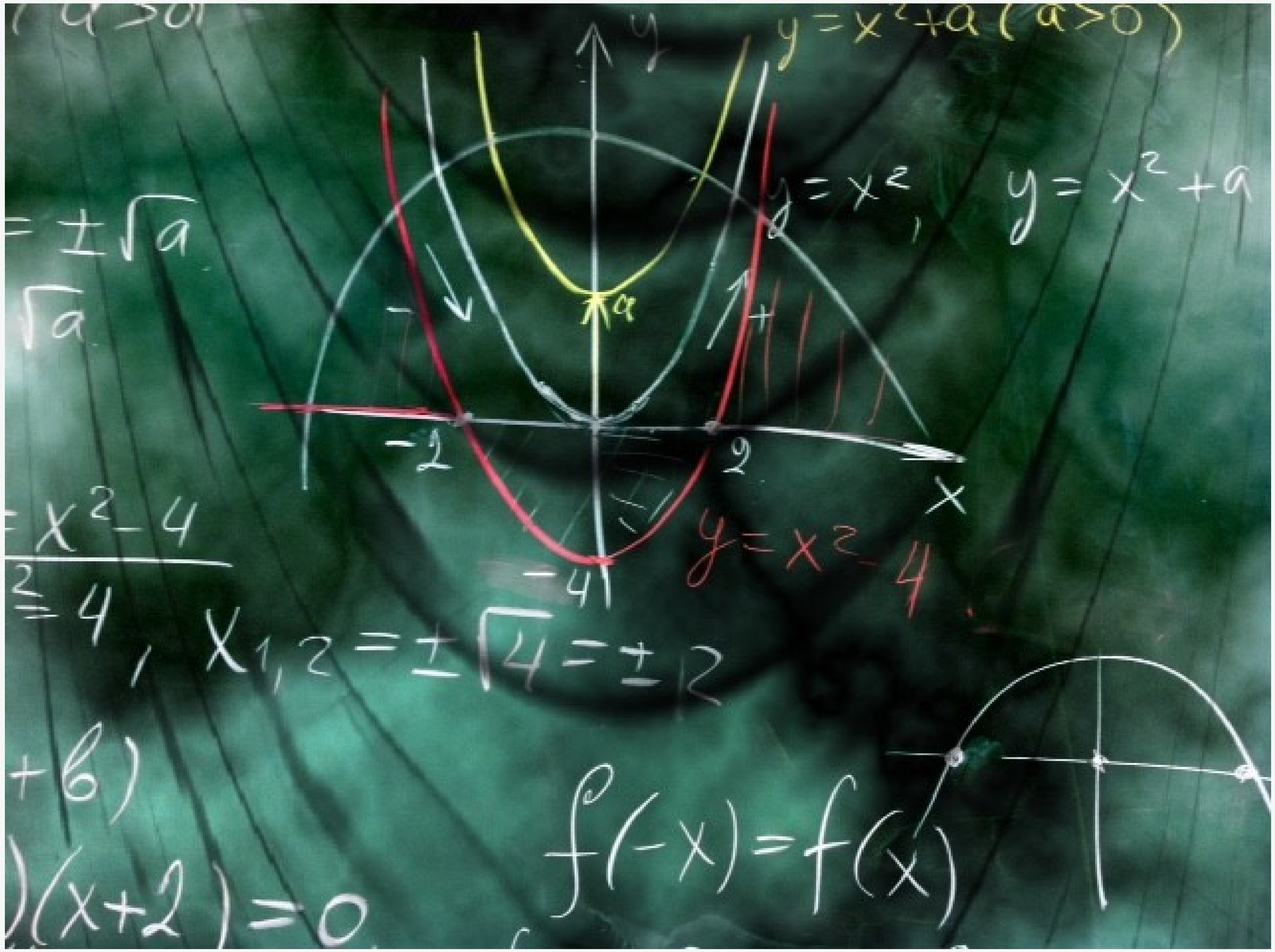

Schnittpunkte quadratischer Funktionen: Aufgaben

Bestimmen Sie die Scheitelpunkte und die Schnittpunkte der quadratischen Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

Aufgabe 1: $f(x) = x^2 - 4x + 1, \qquad g(x) = -x^2 + 2x + 1$

Aufgabe 2: $f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

Aufgabe 3: $f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$

Aufgabe 4: $f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$

Aufgabe 5: $f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

Aufgabe 6: $f(x) = -x^2 + 1, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{4} + 2$

Aufgabe 7: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3, \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$

Aufgabe 8: $f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$

Schnittpunkte quadratischer Funktionen: Lösung 1

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3, \qquad S_f = (2, -3)$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2, \qquad S_g = (1, 2)$$

Die Gleichung $f(x) = g(x)$ bestimmt die Schnittpunkte der Funktionen:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \qquad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = -2$$

$$S_1 = (0, 1), \qquad S_2 = (3, -2)$$

Schnittpunkte quadratischer Funktionen: Lösung 1

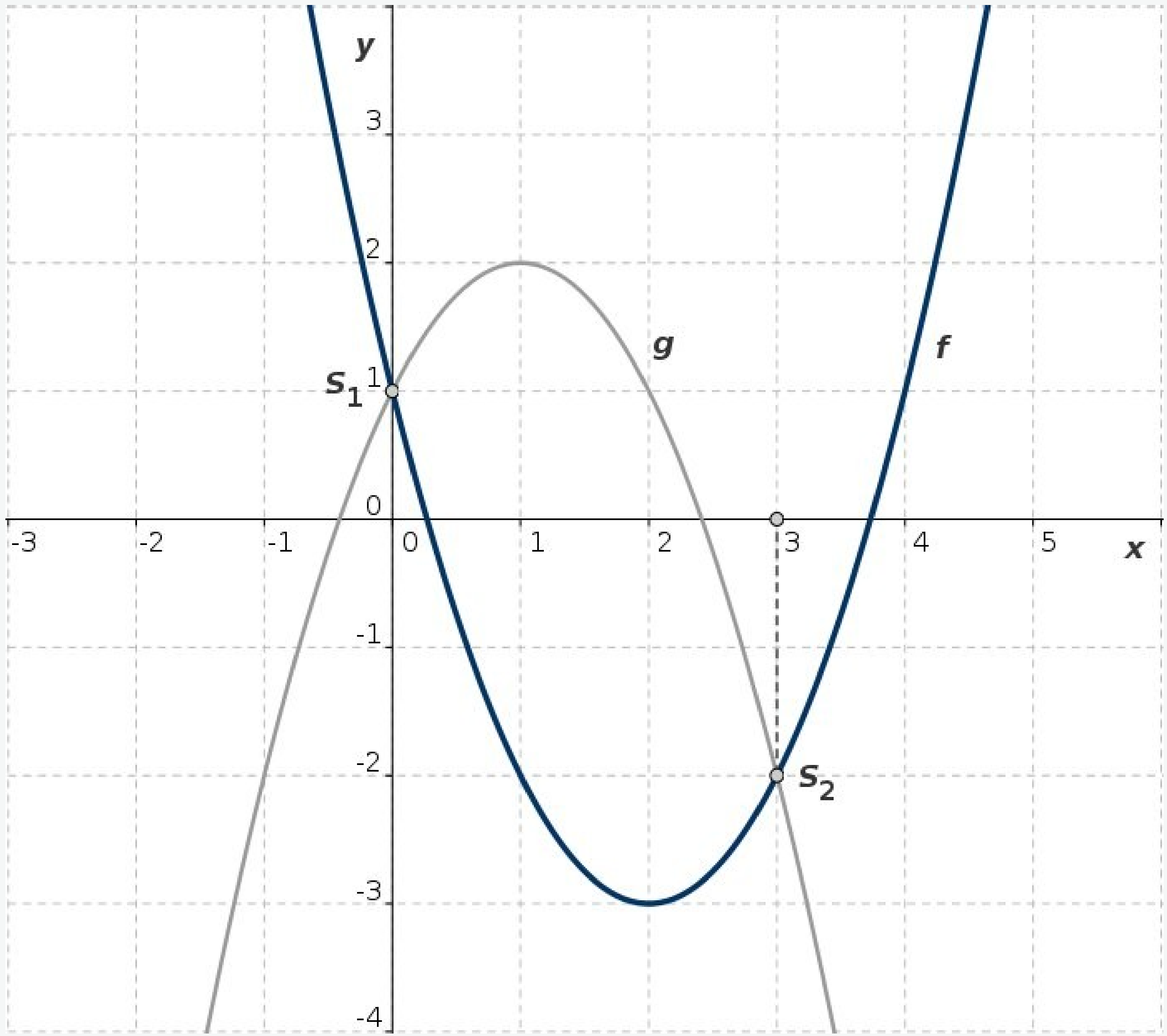

Abb. L1: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und ihre Schnittpunkte

Beide Parabeln sind nach oben geöffnet und symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1, a_2 > 0, \qquad a_1 > a_2, \qquad c_1 > c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = 2, \qquad c_2 = 1$$

Solche Funktionen haben keine Schnittpunkte $(f(x) > g(x))$.

Die Scheitelpunkte sind:

$$S_f = (0, c_1), \qquad S_g = (0, c_2)$$

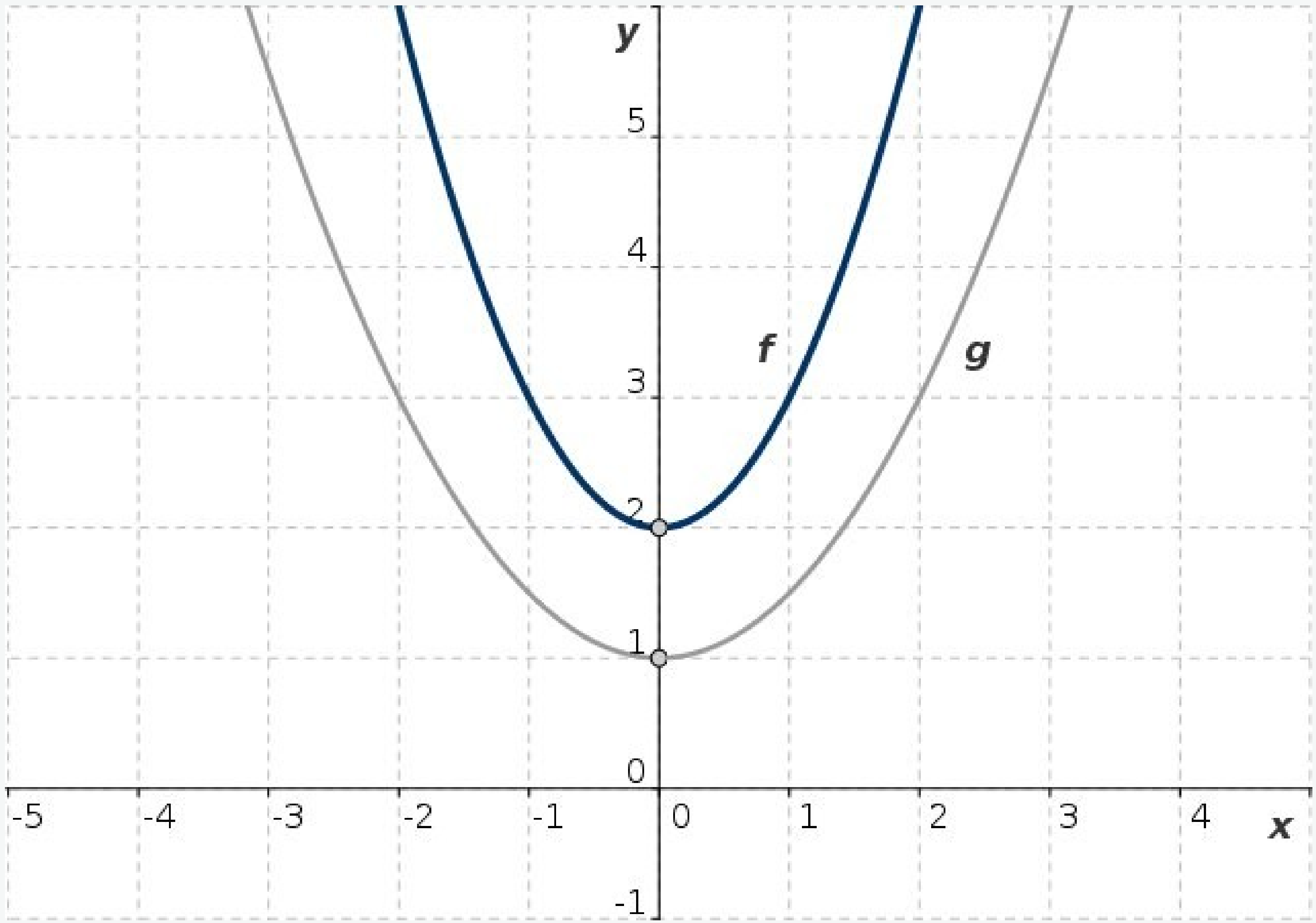

Abb. L2a: Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

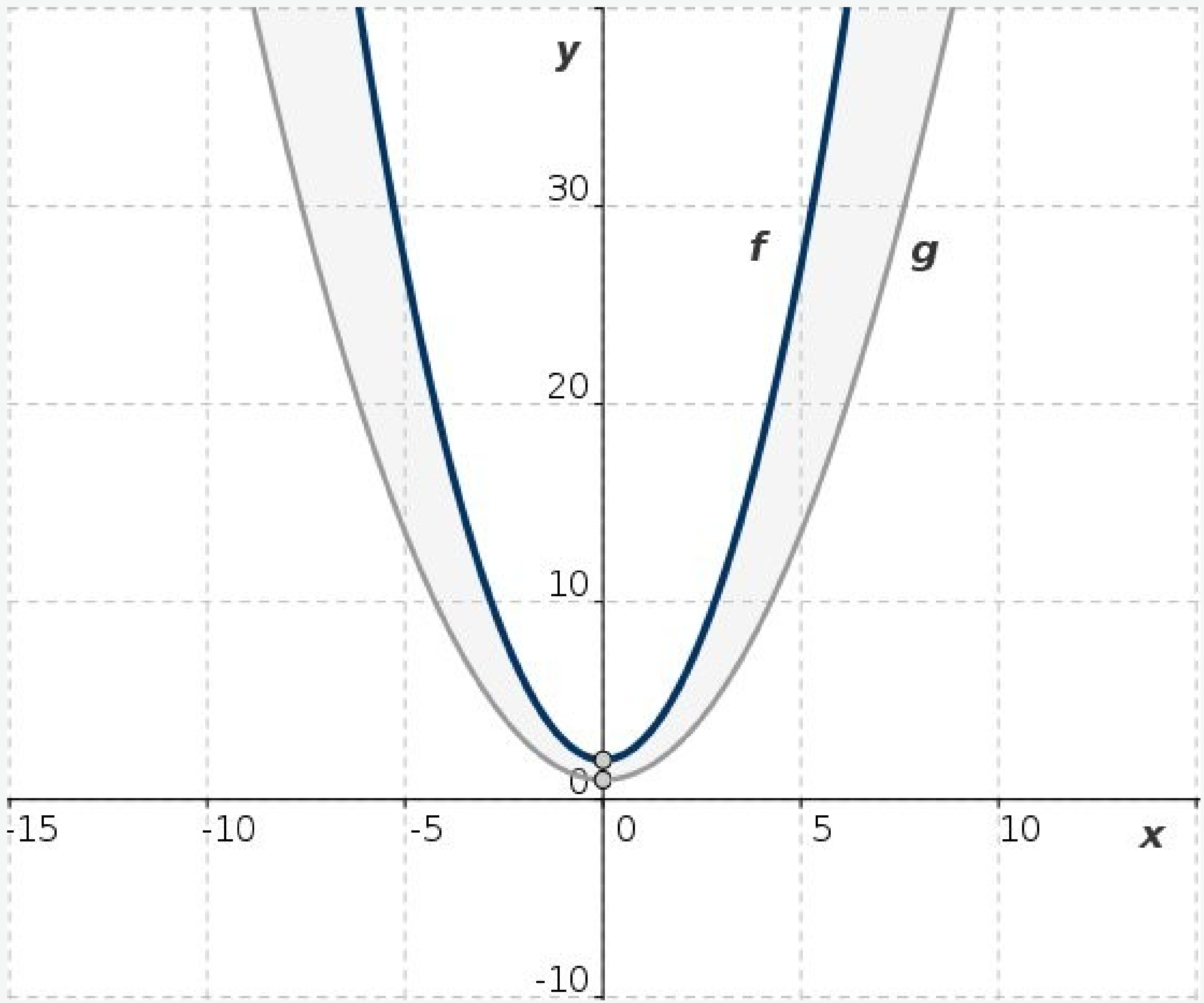

Abb. L2b: Funktionen y = f (x) und y = g (x)

Beide Parabeln sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1 > 0, \qquad a_2 < 0, \qquad c_1 > c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_1 = 2, \qquad c_2 = 1$$

Die Parabel $y = f(x)$ ist nach oben und die Parabel $y = g(x)$ nach unten geöffnet, sie haben keine Schnittpunkte.

Die Scheitelpunkte sind:

$$S_f = (0,\ c_1), \qquad S_g = (0,\ c_2)$$

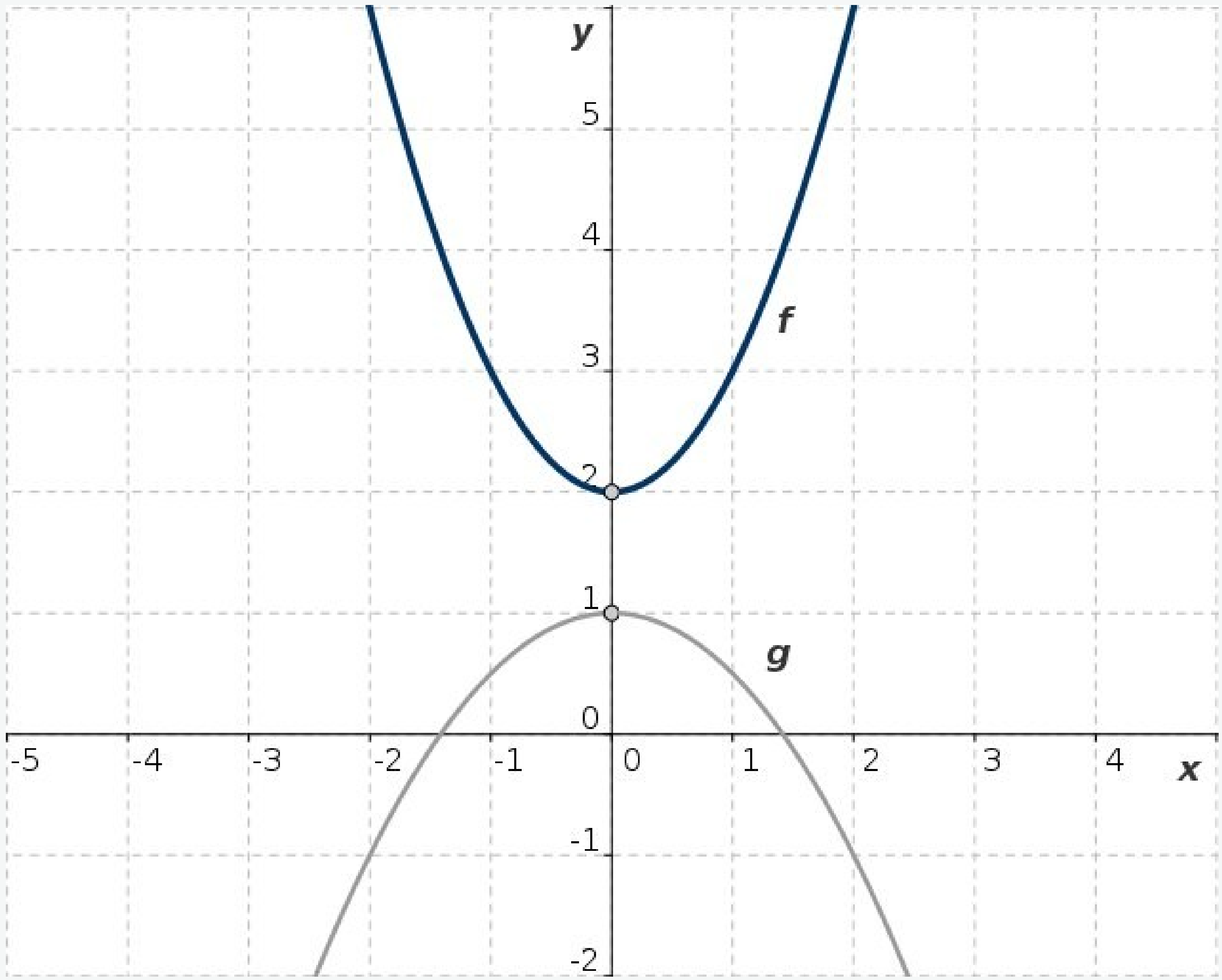

Abb. L3: Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$$

Beide Parabeln sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1 > 0, \qquad a_2 < 0, \qquad c_1 = c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_1 = c_2 = 2$$

Die Parabel $y = f(x)$ ist nach oben und die Parabel $y = g(x)$ nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt der beiden Funktionen ist auch der einzige Schnittpunk

$$S_f = S_g = (0, c_1)$$

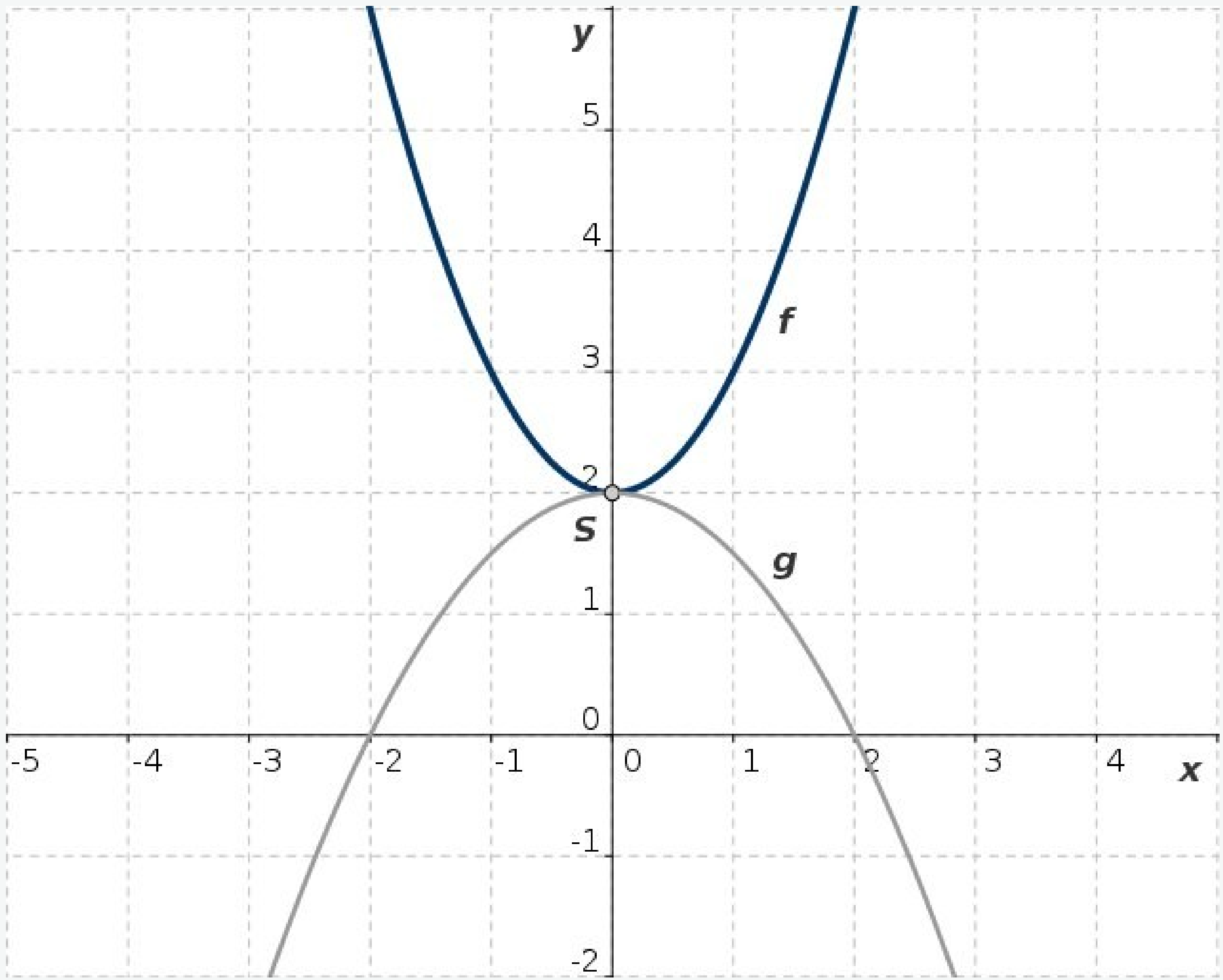

Abb. L4: Funktionen y = f (x), y = g (x) und ihr Schnittpunkt

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$$

Beide Parabeln sind nach oben geöffnet und symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1, a_2 > 0, \qquad a_1 > a_2, \qquad c_1 = c_2$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{4}, \qquad c_1 = c_2 = 1$$

Der Scheitelpunkt der beiden Funktionen ist auch der einzige Schnitt-punkt

$$S_f = S_g = (0, c_1)$$

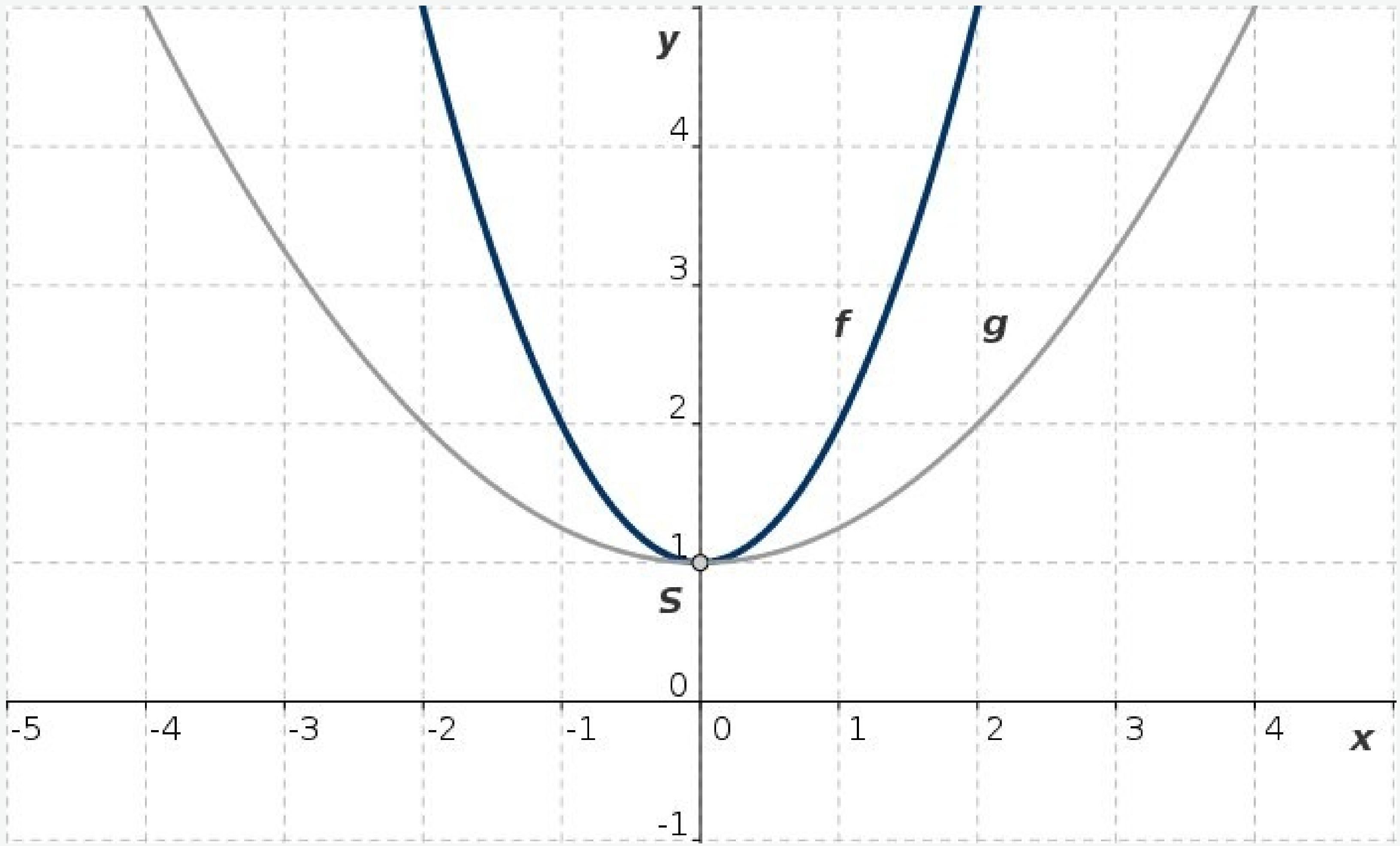

Abb. L5: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und ihr Schnittpunkt

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = \frac{x^2}{4} + 1$$

Beide Parabeln sind nach unten geöffnet und symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Gleichungen können in folgender Form dargestellt werden

$$f(x) = a_1 x^2 + c_1, \qquad g(x) = a_2 x^2 + c_2$$

$$a_1, a_2 < 0, \qquad a_1 < a_2, \qquad c_1 < c_2$$

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = -\frac{1}{4}, \qquad c_1 = 1, \qquad c_2 = 2$$

Solche Funktionen haben keine Schnittpunkte.

Die Scheitelpunkte sind:

$$S_f = (0, c_1), \qquad S_g = (0, c_2)$$

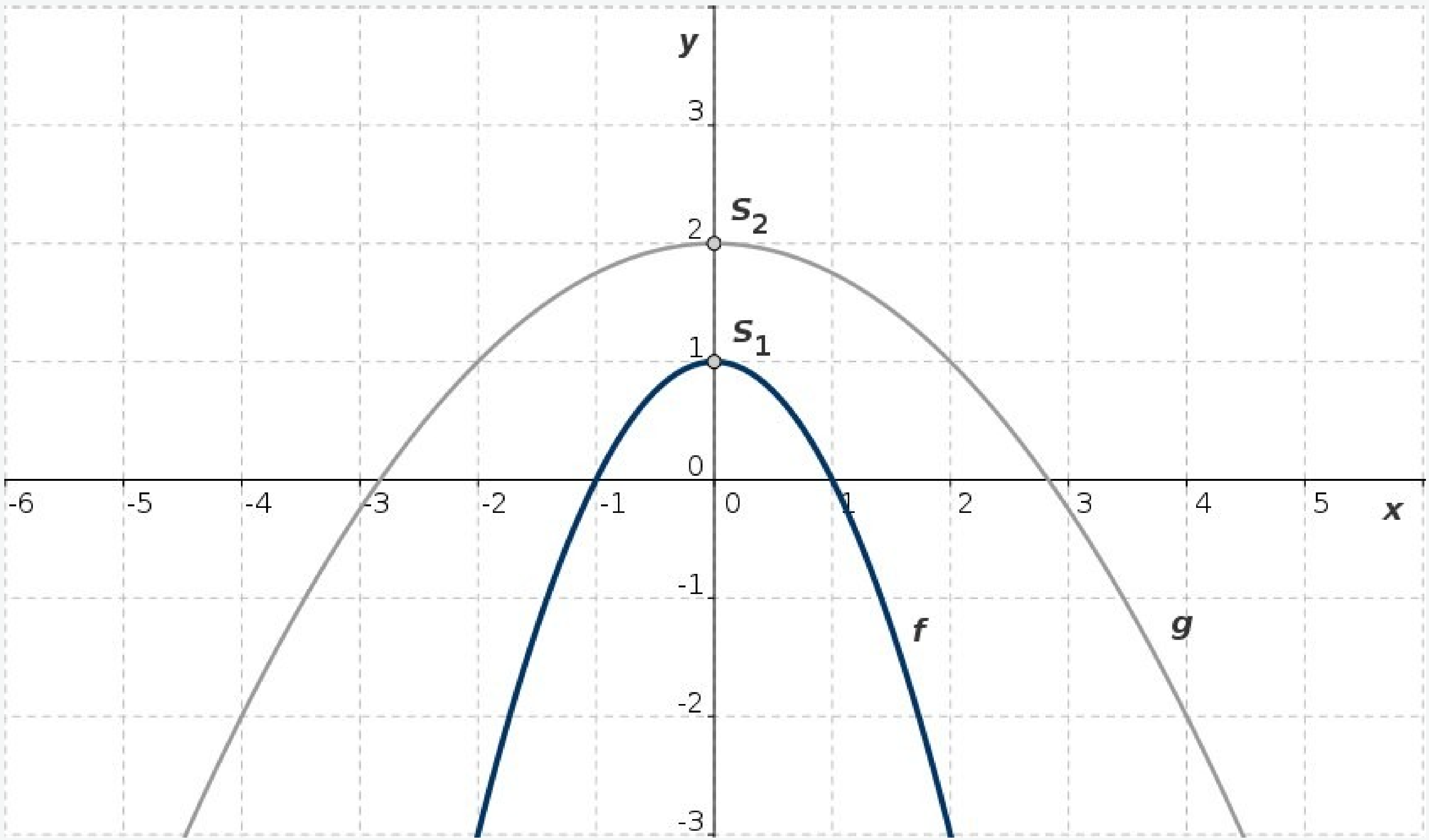

Abb. L6a: Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = -x^2 + 1, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{4} + 2$$

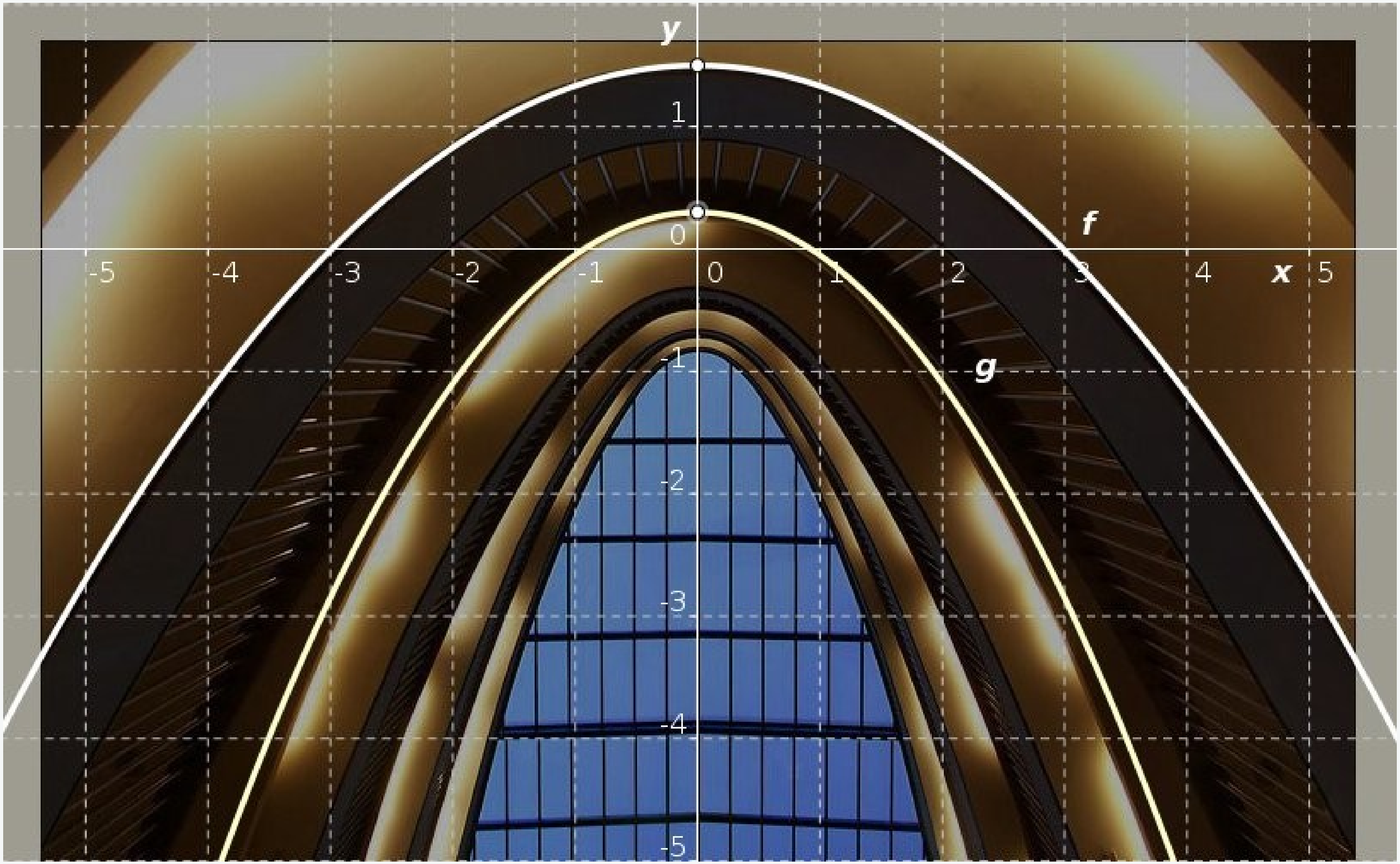

Abb. L6b: Funktionen y = f (x) und y = g (x)

$$f(x) = -0.17\,x^2 + 0.15, \qquad g(x) = -\,0.35\,x^2 + 0.3$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - 6\,x + 3 = \frac{3}{2}\,(x-2)^2 - 3, \qquad S_f = (2, -3)$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - 2\,x = \frac{1}{2}\,(x-2)^2 - 2, \qquad S_g = (2, -2)$$

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\,x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3, \qquad S_1 = \left(1, -\frac{3}{2}\right), \qquad S_2 = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$$

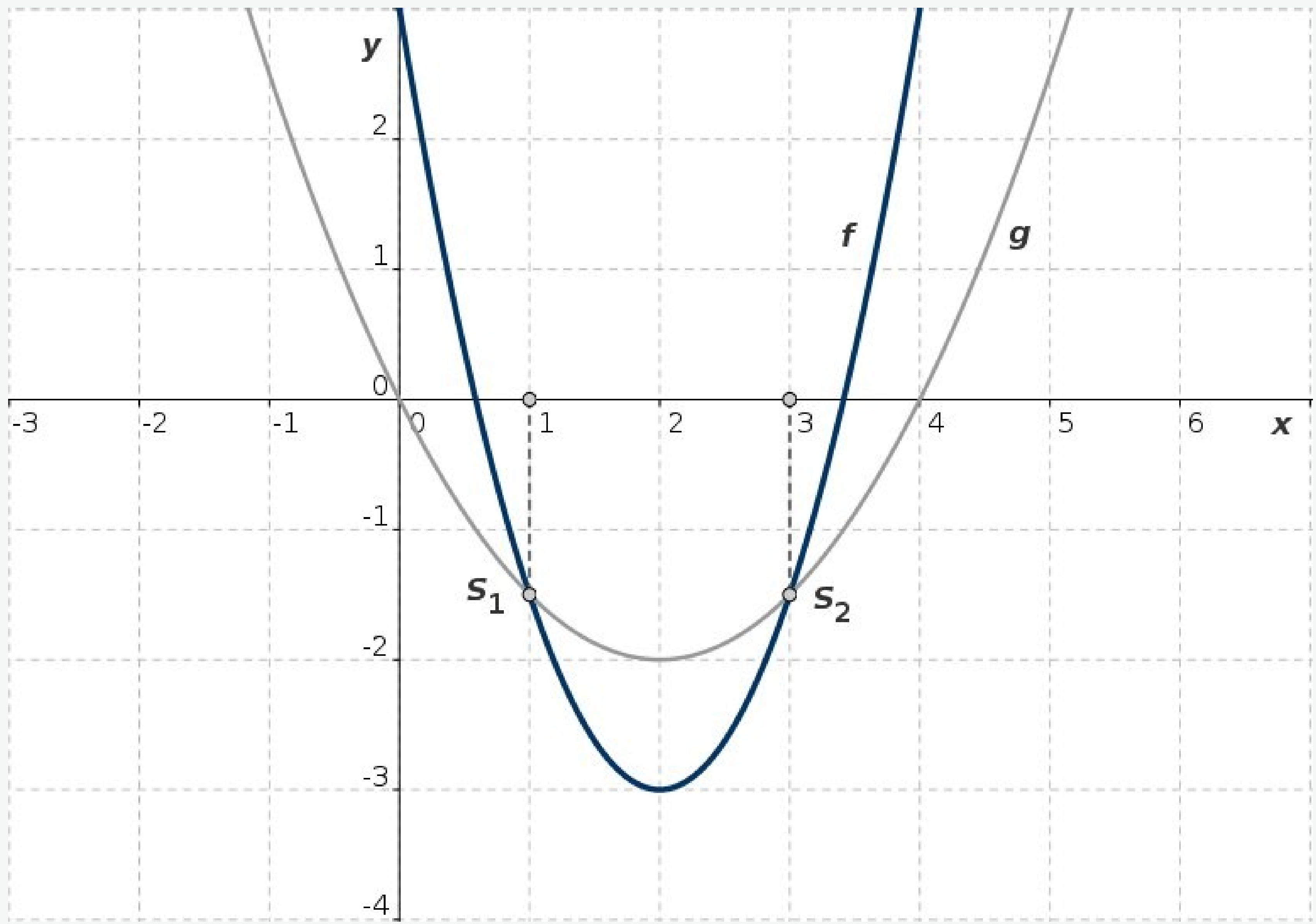

Abb. L7: Funktionen y = f (x), y = g (x) und ihre Schnittpunkte

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad S_f = (0, 2)$$

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 5, \qquad S_g = (3, 5)$$

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 1, \qquad S = (1, 3)$$

Die Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ haben einen Berührungspunkt $S(1, 3)$.

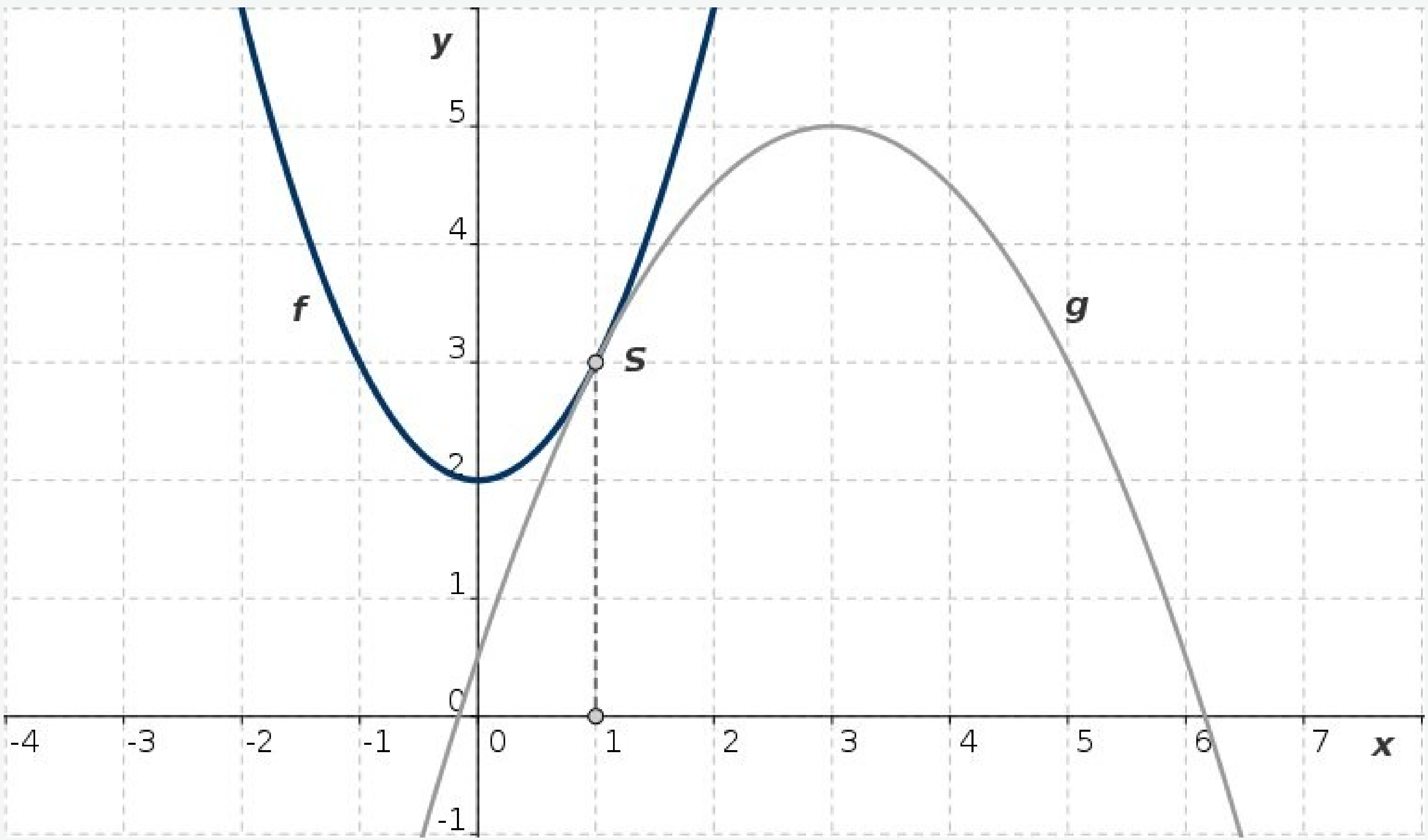

Abb. L8: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und der Berührungspunkt $S = (1, 3)$