Schnittpunkte quadratischer Funktionen mit linearen Funktionen

Aufgaben


1
2
3

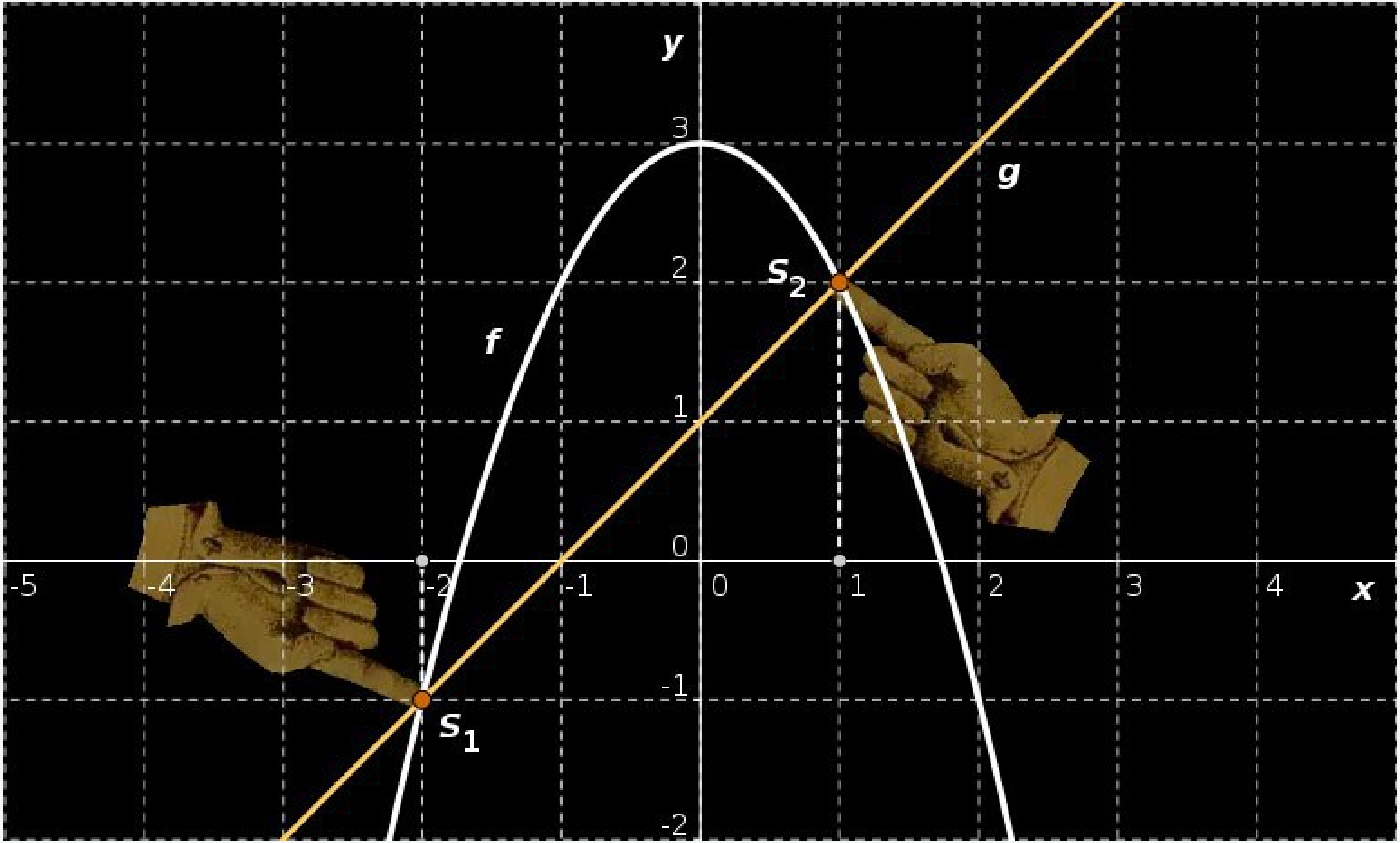

Abb. 1-1: Die quadratische Funktion $y = f(x)$ und die lineare $y = g(x)$ haben im gemeinsamen Definitionsbereic zwei Schnittpunkte

$$f(x) = -x^2 + 3, \qquad g(x) = x + 1$$

Definition: Ein Schnittpunkt ist ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven.

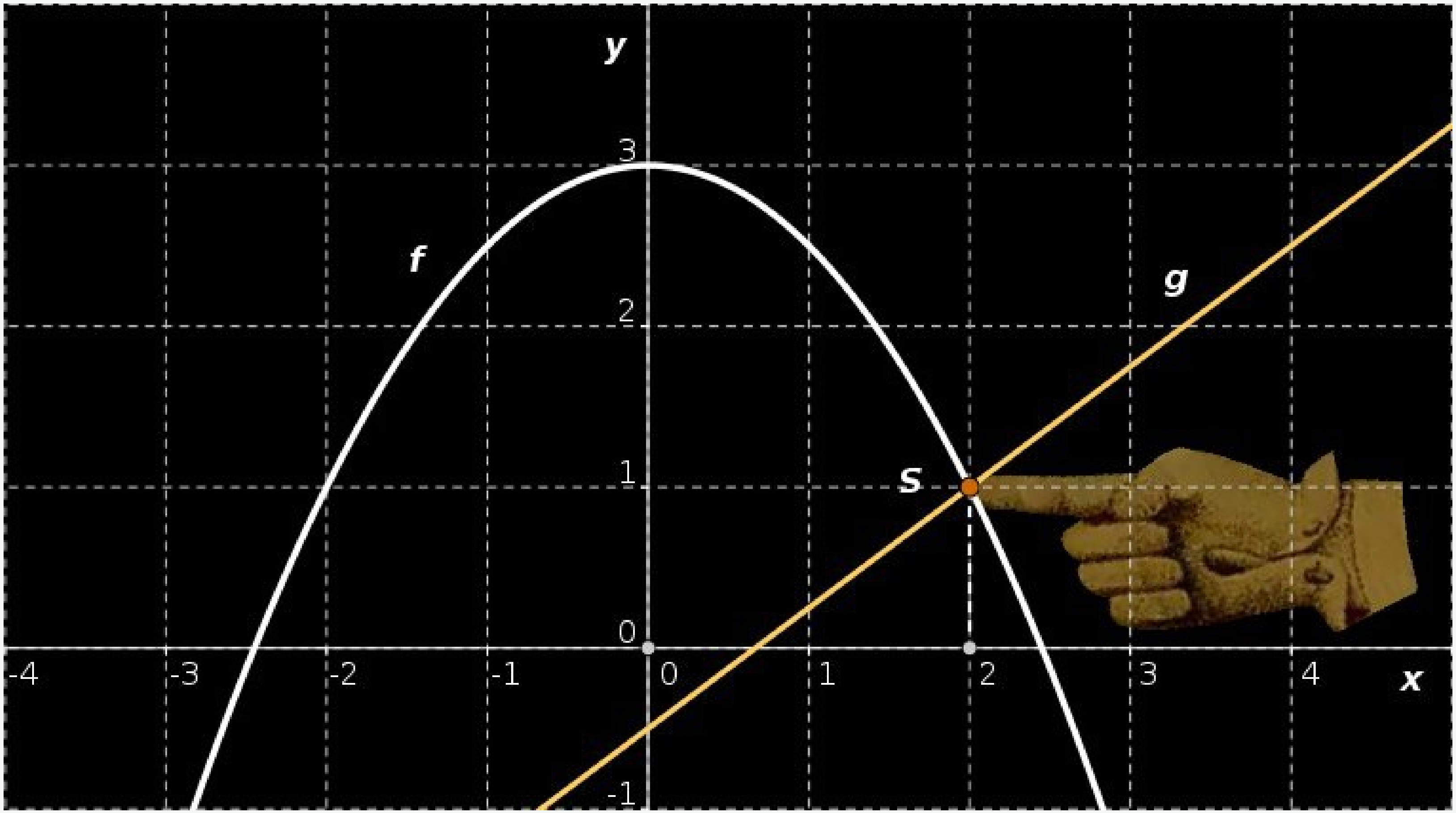

Abb. 1-2: Die Quadratische Funktion $y = f(x)$ und die lineare $y = g(x)$ haben im positiven Definitions -bereich einen Schnittpunkt S

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3, \qquad g(x) = \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}$$

Manchmal besteht die Aufgabe darin, Schnittpunkte von Kurven in einem Intervall des Definitionsbereiches zu bestimmen.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte einer quadratischen Funktion $y = f(x)$ mit einer linearen Funktion $y = g(x)$ oder einer Funktion $x = c$ $(c = const)$

Aufgabe 1: $f(x) = -x^2 + 2, \quad g(x) = 1$

Aufgabe 2: $f(x) = -x^2 + 2, \quad g(x) = -1$

Aufgabe 3: $f(x) = -x^2 + 2, \quad g(x) = x$

Aufgabe 4: $f(x) = -x^2 + 2, \quad x = 1$

Aufgabe 5: $f(x) = -x^2 + 2, \quad g(x) = 3$

Schnittpunkte mit linearen Funktionen: Lösung 1

Gegeben sind die Funktionsgleichungen einer Parabel und einer Geraden.

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad g(x) = 1$$

Um die Schnittpunkte der Kurven dieser Funktionen zu bestimmen, setzt man die Funktionsgleichungen gleich

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2 = 1$$

und löst anschließend die quadratische Gleichung:

$$-x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)\cdot(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = (-1,\ 1), \quad S_2 = (1,\ 1)$$

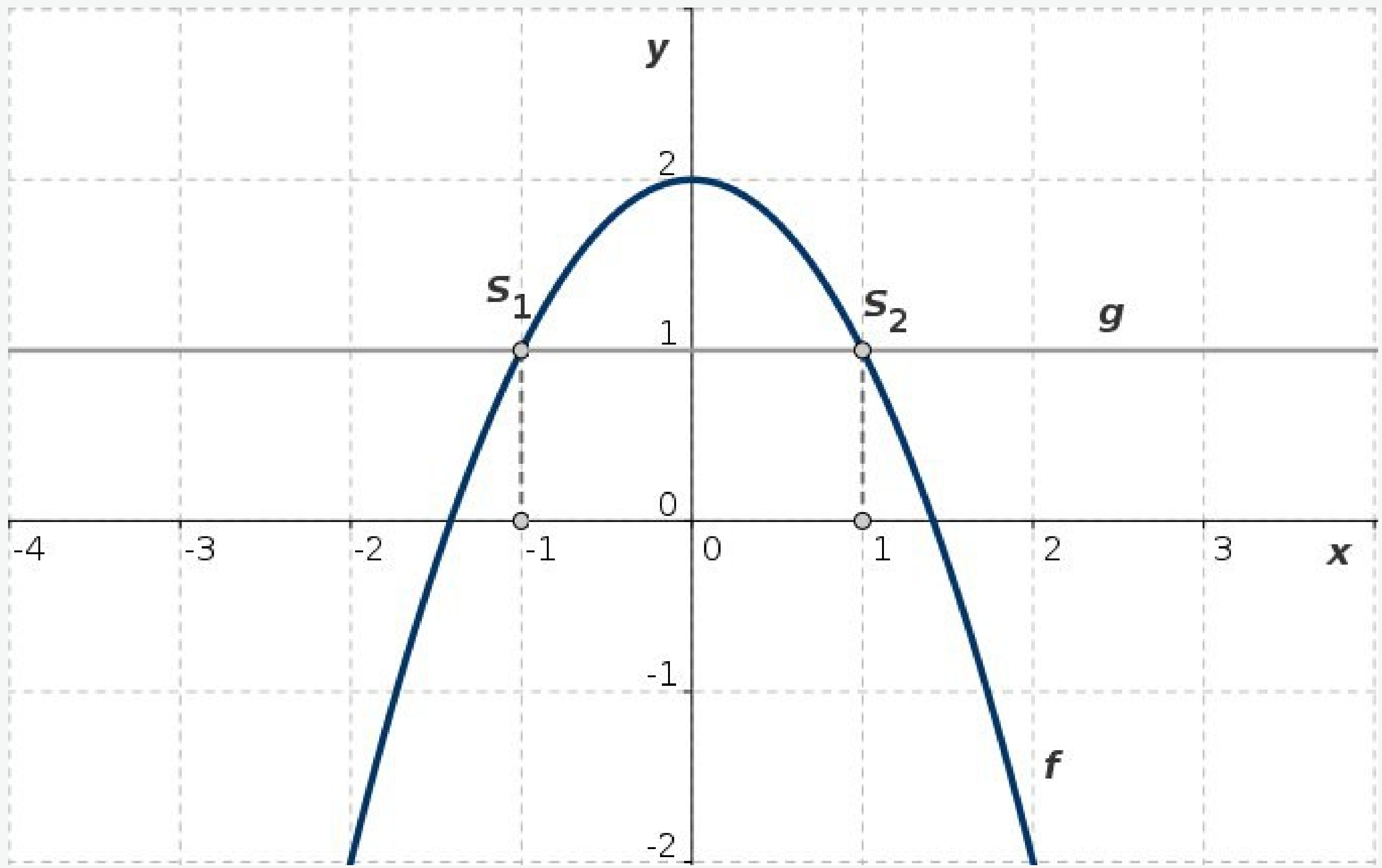

Abb. L1: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und ihre Schnittpunkte

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad g(x) = 1, \qquad S_1 = (-1,\ 1), \qquad S_2 = (1,\ 1)$$

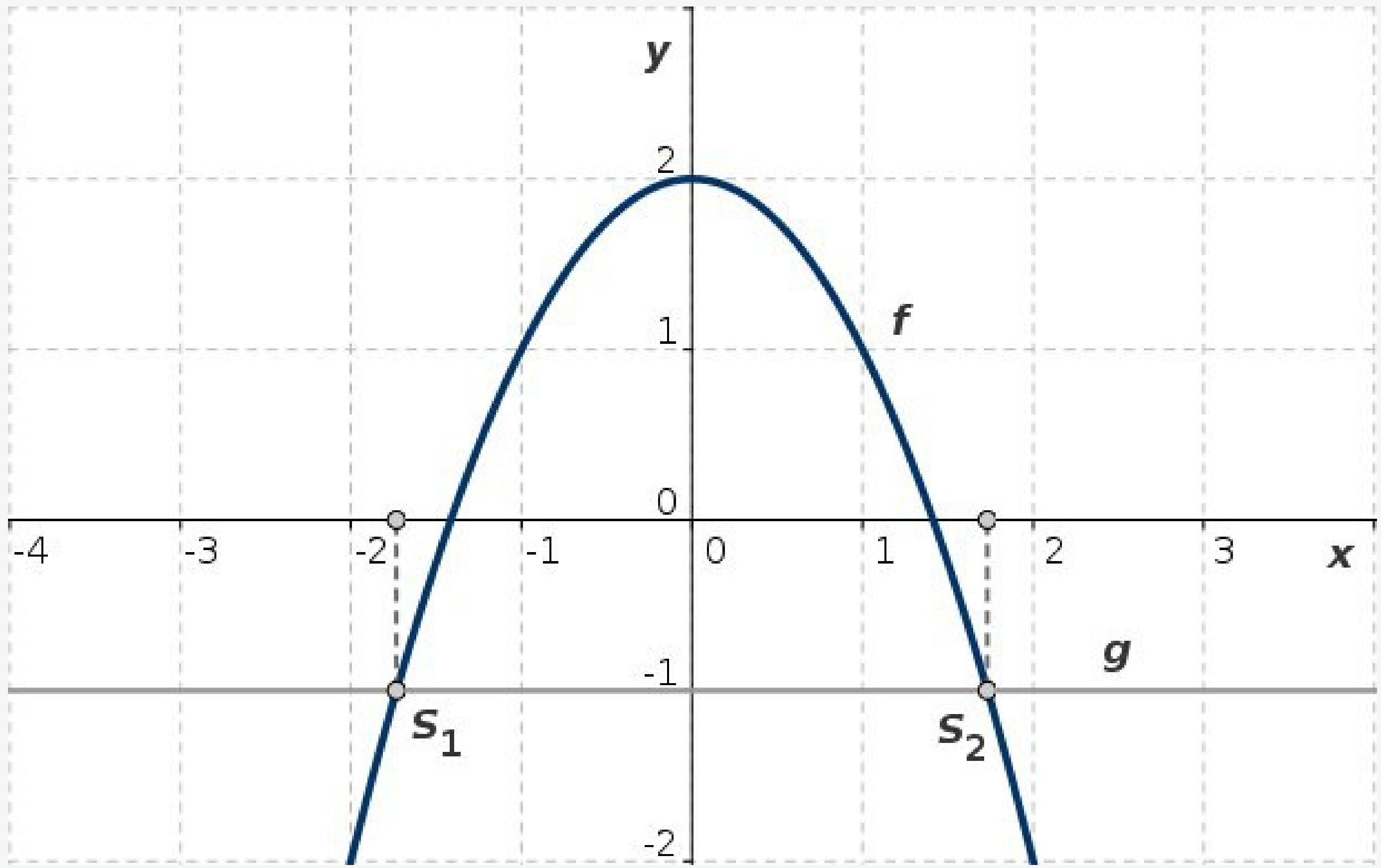

Abb. L2: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und ihre Schnittpunkte

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 = 0$$

$$(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) = 0, \quad x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3}$$

$$S_1 = (-\sqrt{3}, -1) \qquad S_2 = (\sqrt{3}, -1)$$

Schnittpunkte mit linearen Funktionen: Lösung 3

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad g(x) = x$$

$$f(x) = g(x), \qquad -x^2 + 2 = x, \qquad -x^2 - x + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0, \qquad x^2 + px + q = 0, \qquad p = 1, \qquad q = -2$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 1$$

$$S_1 = (-2, -2), \qquad S_2 = (1, 1)$$

Bei Lösung dieser oder einer ähnlichen Aufgabe wird eine quadratische Gleichung in eine equivalente Gleichung umgeformt. Die graphische Lösung der umgeformten Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$ entspricht der Bestimmung von Schnittpunkten der quadratischen Funktion

$$h(x) = x^2 + x - 2$$

mit der x-Achse.

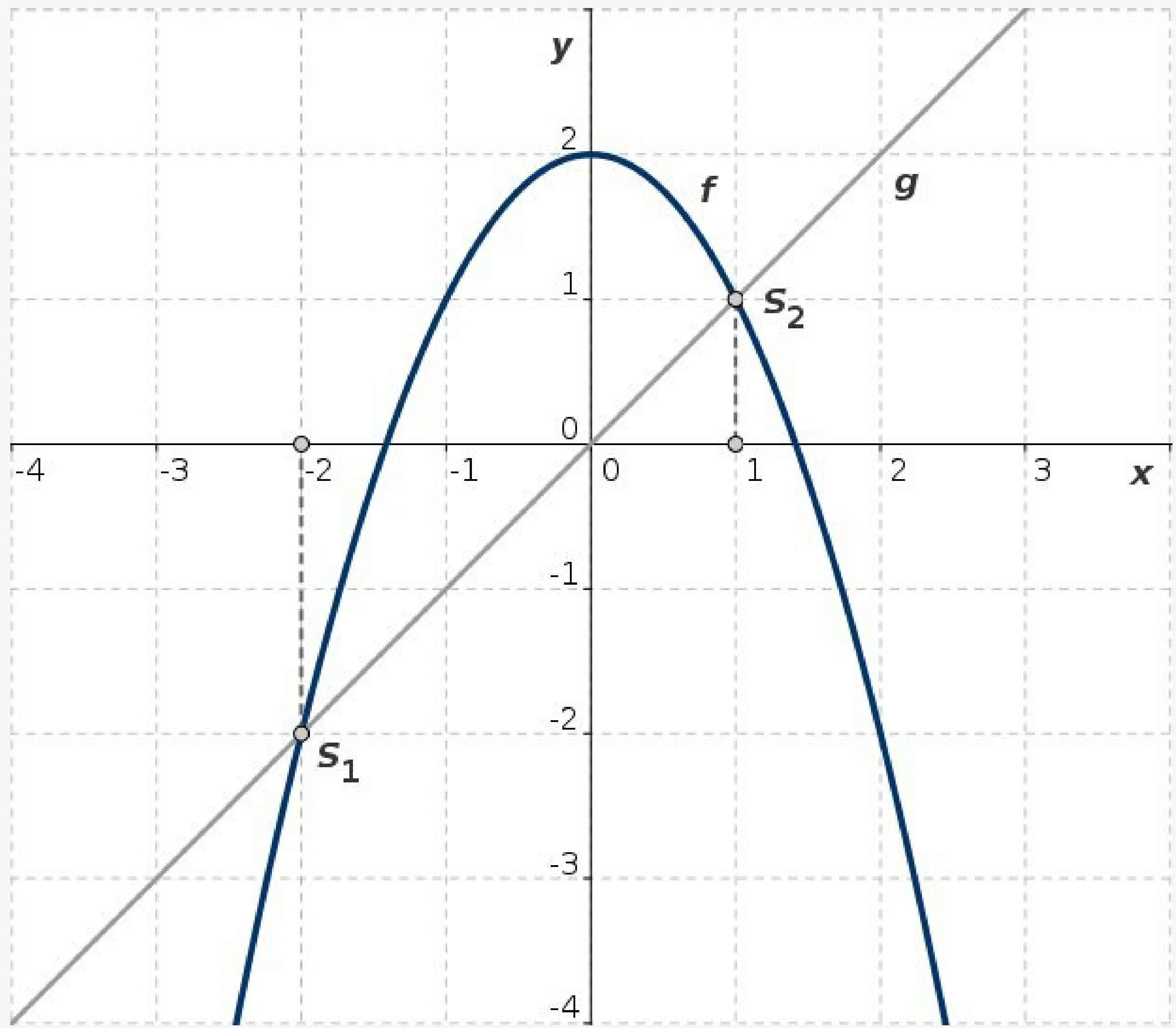

Abb. L3-1: Funktionen y = f (x), y = g (x) und ihre Schnittpunkte

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad g(x) = x, \qquad S_1 = (-2, -2), \qquad S_2 = (1, 1)$$

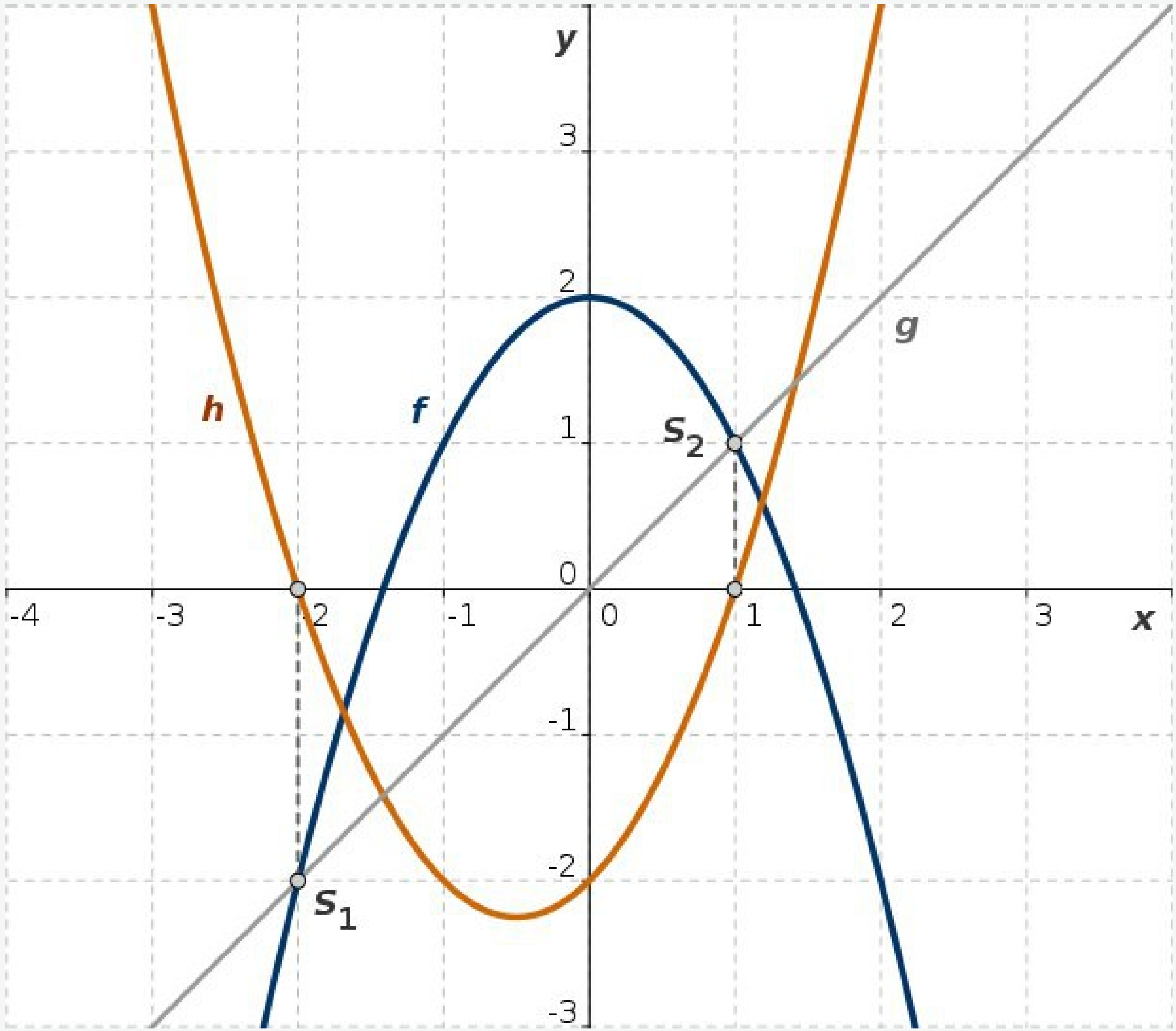

Abb. L3-2: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und $y = h(x)$

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad g(x) = x\,, \qquad h(x) = x^2 + x - 2$$

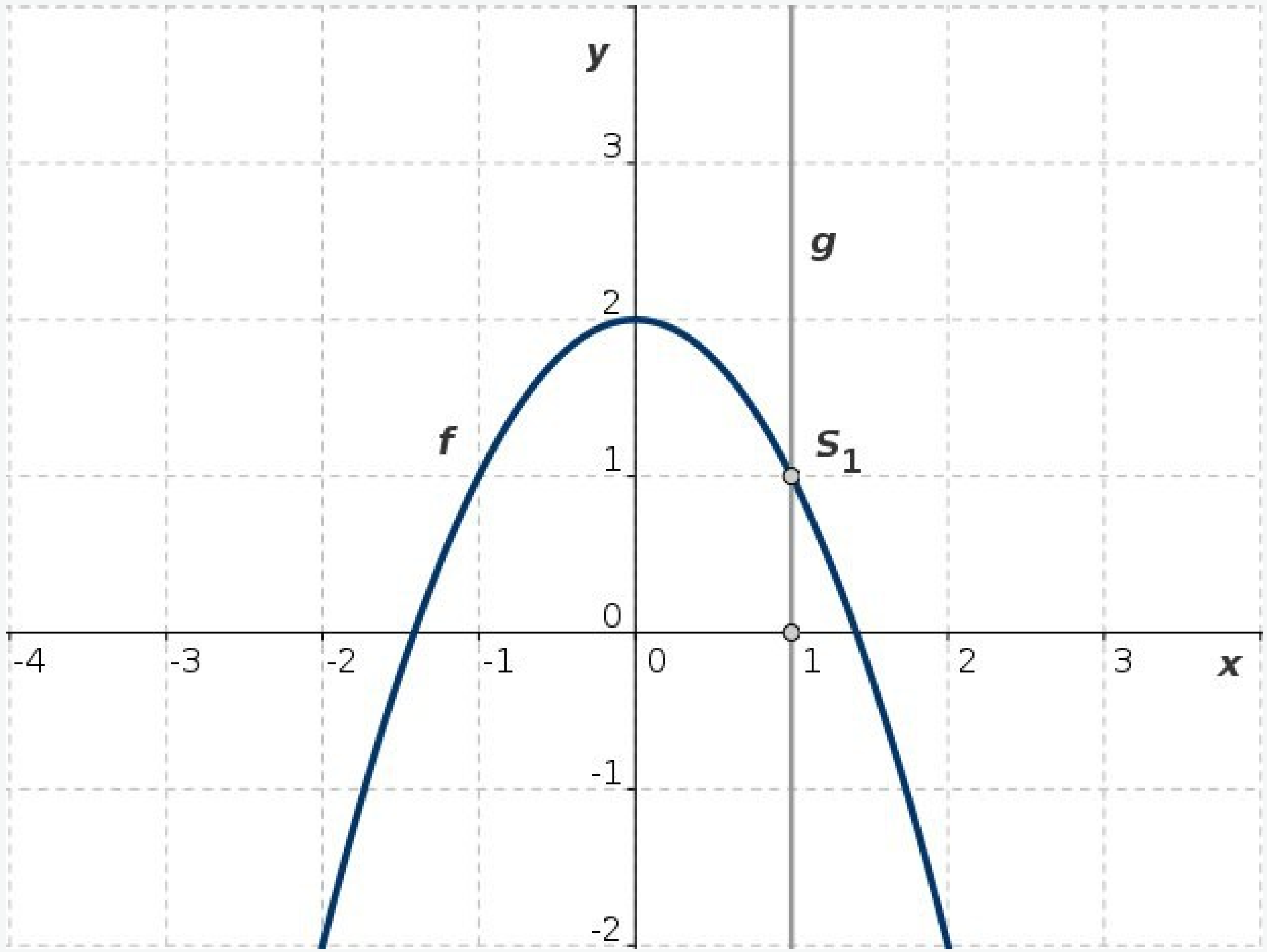

Abb. L4: Funktionen $y = f(x)$, $x = 1$ und ihr Schnittpunkt

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad x = 1, \qquad S_1 = (1, 1)$$

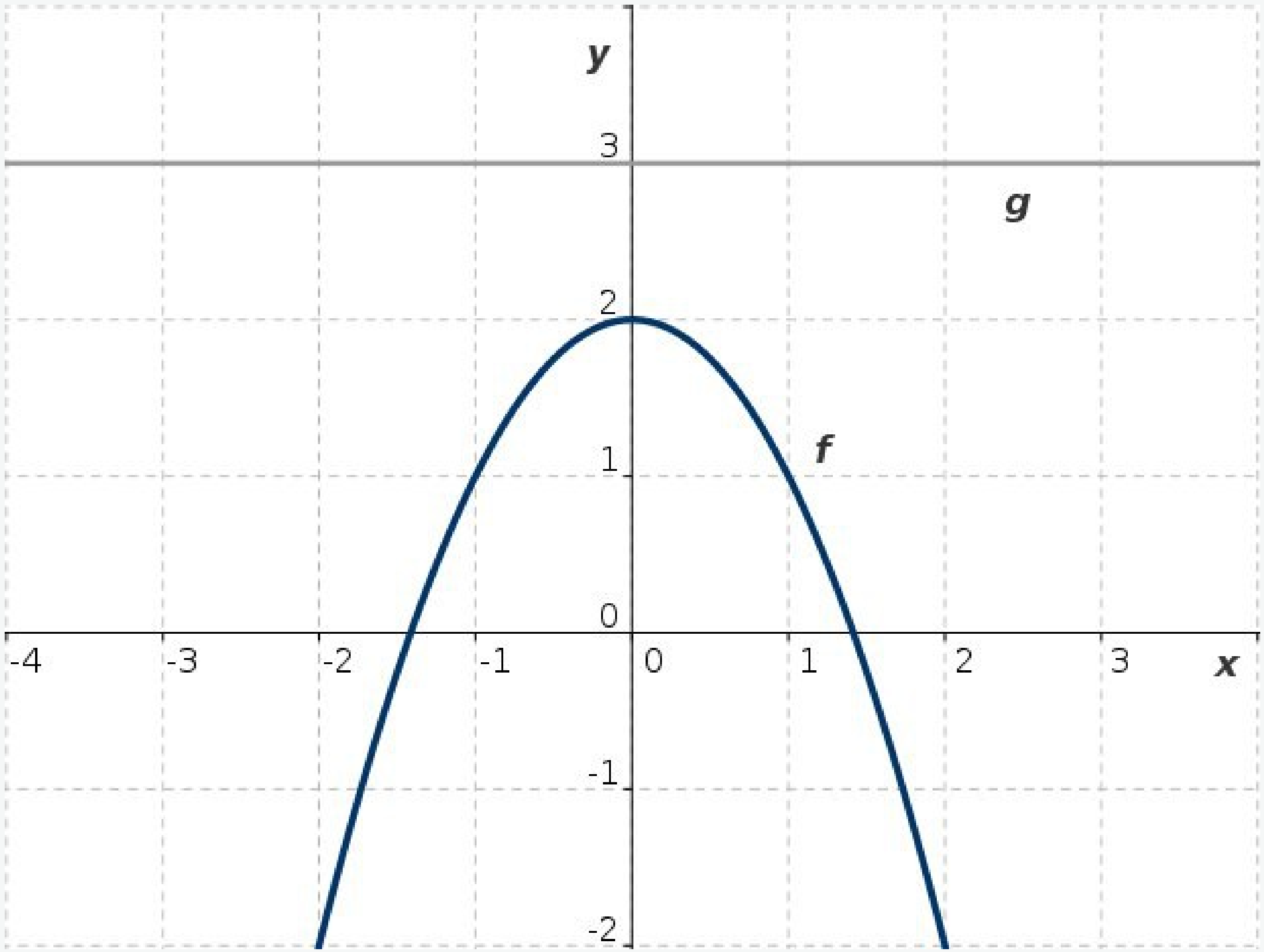

Abb. L5: Funktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$

$$f(x) = -x^2 + 2, \qquad g(x) = 3, \qquad f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1$$

Die Gleichung hat keine reelle Lösung.