Wurzelsatz von Vieta

Wurzelsatz von Vieta

François Viète (1540-1603)

François Viète war ein französischer Advokat und Mathematiker. Er arbeitete auf den Gebieten der Trigonometrie und Gleichungslehre. Zu seinen Verdiensten gehört die Einführung von Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen.

Wurzelsatz von Vieta:

x_1 und x_2 sind genau dann Lösungen der Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

wenn

$$x_1 + x_2 = -\,p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Der Wurzelsatz von Vieta wird vor allem zur Durchführung der Probe verwendet.

p-*q*-Form: $$x^2 + p\,x + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,, \qquad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q$$

a-*b*-*c*-Form: $$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Bestimmen Sie eine quadratische Gleichung, wenn ihre Lösungen bekannt sind

Aufgabe 7: $x_1 = -3, \qquad x_2 = 5$

Aufgabe 8: $x_1 = 3 - \sqrt{2}\,, \qquad x_2 = 3 + \sqrt{2}$

x_1 und x_2 sind Lösungen der quadratischen Gleichung G. Bestimmen Sie die folgenden Größen, ohne x_1, x_2 zu berechnen

Aufgabe 9: $G: \quad x^2 + 2x - 14 = 0$

$$\frac{3 - 5x_1}{x_1 + x_2} + \frac{3 - 5x_2}{x_1 + x_2}$$

Aufgabe 10: $G: \quad x^2 - 20x + 8 = 0$

$$\frac{5 + 2x_1}{x_1 + x_2} + \frac{5 + 2x_2}{x_1 + x_2}$$

$$x^2 + p\,x + q = 0, \qquad x_1 + x_2 = -\,p\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Lösung 7: $\quad x_1 = -3, \qquad x_2 = 5$

$$p = -(x_1 + x_2) = -2$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = -15$$

quadratische Gleichung: $x^2 - 2\,x - 15 = 0$

Lösung 8: $\quad x_1 = 3 - \sqrt{2}\,, \qquad x_2 = 3 + \sqrt{2}$

$$p = -(x_1 + x_2) = -6$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (3 - \sqrt{2})\,(3 + \sqrt{2}) =$$

$$= 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

quadratische Gleichung: $x^2 - 6\,x + 7 = 0$

Lösung 9:

$$G: \quad x^2 + 2x - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2, \quad q = -14$$

$$D = 1^2 - (-14) = 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2$$

$$x_1 + x_2 = -p = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = q = -14$$

$$\frac{3 - 5x_1}{x_1 + x_2} + \frac{3 - 5x_2}{x_1 + x_2} = \frac{6 - 5(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = -5 + \frac{6}{x_1 + x_2} =$$

$$= -5 - 3 = -8$$

Lösung 10:

$$G: \quad x^2 - 20x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -20, \quad q = 8$$

$$D = (-20)^2 - 4\,8 = 368 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2$$

$$x_1 + x_2 = -p = 20, \quad x_1 \cdot x_2 = q = 8$$

$$\frac{5 + 2x_1}{x_1 + x_2} + \frac{5 + 2x_2}{x_1 + x_2} = \frac{10 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = 2 + \frac{10}{x_1 + x_2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

u und v sind Lösungen der quadratischen Gleichung G. Ohne ihre Werte zu berechnen, bestimmen Sie die folgende Größen

Aufgabe 11: $G: \quad 5x^2 + 2x - 4 = 0$

$$\frac{5 - 2u}{u} + \frac{5 + 4v}{v}$$

Aufgabe 12: $G: \quad 3x^2 - 5x - 4 = 0$

$$\frac{3 + 5u}{u} + \frac{3 + 4v}{v}$$

Aufgabe 13: $G: \quad x^2 - 2x - 5 = 0$

$$\frac{v u^3 - u v^3}{v - u}$$

Lösung 11:

$$G: \quad 5x^2 + 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{2}{5}\,x - \frac{4}{5} = 0$$

$$p = \frac{2}{5}, \qquad q = -\frac{4}{5}$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 84 > 0, \qquad u \neq v$$

$$u + v = -p = -\frac{2}{5}, \qquad u \cdot v = q = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{5 - 2u}{u} + \frac{5 + 4v}{v} = \frac{(5 - 2u)\,v}{u\,v} + \frac{(5 + 4v)\,u}{u\,v} =$$

$$= \frac{5\,(u + v) + 2\,u\,v}{u\,v} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

Lösung 12: $\quad \dfrac{3 + 5u}{u} + \dfrac{3 + 4v}{v} = \dfrac{21}{4}$

Lösung 13: $\quad \dfrac{v\,u^3 - u\,v^3}{v - u} = -u\,v\,(u + v) = 10$

$$a\,x^2 + b\,x + c \;=\; a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) \;=$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$= a\left[\,x^2 - (x_1 + x_2)\;x + x_1 \cdot x_2\,\right] =$$

$$= a\left[\,(x^2 - x_1\,x) - (x_2\,x - x_1\,x_2)\,\right] =$$

$$= a\left[\,x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1)\,\right] =$$

$$= a\;(x - x_1)\;(x - x_2)$$

Jede algebraische Gleichung der Form $a\,x^2 + bx + c = 0$ kann in folgende Faktoren zerlegt werden

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c \;=\; a\;(x - x_1)\;(x - x_2)}$$

Das Zerlegen einer algebraischen Summe in Faktoren nennt man Faktorisieren.

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen

Aufgabe 14: $$a + 2b = \frac{x^2 - 4bx}{a - 2b}$$

Aufgabe 15: $$x(x + 3) + a(a - 3) = 2(ax - 1)$$

$$a + 2b = \frac{x^2 - 4bx}{a - 2b}$$

$$a + 2b = \frac{x^2 - 4bx}{a - 2b} \quad \Big| \quad \times\ (a - 2b) \qquad (a \neq 2b)$$

$$(a + 2b)(a - 2b) = x^2 - 4bx \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4bx + 4b^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0, \qquad p = -4b, \qquad q = 4b^2 - a^2$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2b \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4b^2 + a^2}$$

$$x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{a^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2b + a, \qquad x_2 = 2b - a$$

$$x(x+3) + a(a-3) = 2(ax-1)$$

$$x^2 + (3-2a)x + a(a-3) + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{(3-2a)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-2a}{2}\right)^2 - a(a-3) - 2} =$$

$$= \frac{2a-3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = a - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = a - 2, \qquad x_2 = a - 1$$