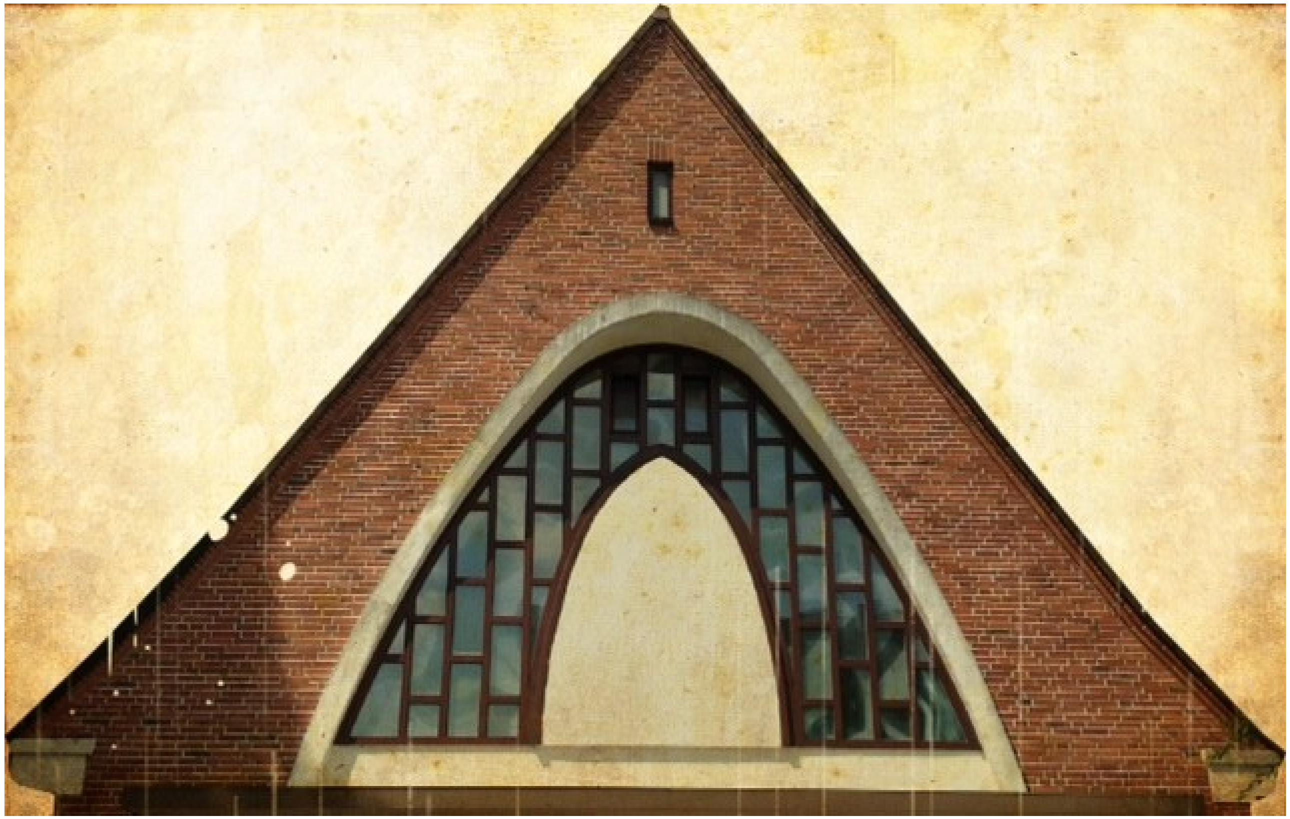


Quadratische Funktionen

Galileo Galilei (1564-1642)

Der berühmte italienische Wissenschaftler Galileo Galilei stellte das korrekte Fallgesetz auf. 1590 führte er in Pisa Fallexperimente durch. Dort ließ er seinem Schüler Vincenzo Viviani zufolge mit wachsender Begeisterung Gegenstände vom Schiefen Turm zu Boden fallen (es gilt nicht als gesichert, ob er die Versuche wirklich vom Turm aus vornahm).

Das Fallgesetz:

Das Fallgesetz besagt, dass alle Körper im Vakuum gleich schnell fallen – egal, ob es sich um eine Feder oder um eine Eisenkugel handelt. Die physikalische Formel lautet

$$S(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Dabei gibt S die Fallhöhe an, g die Fallbeschleunigung und t die Zeit, die der Fall dauert.

Die kinetische Energie eines Körpers:

Die kinetische Energie E eines Körpers der Masse m ist eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit v

$$E_{kin}(v) = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

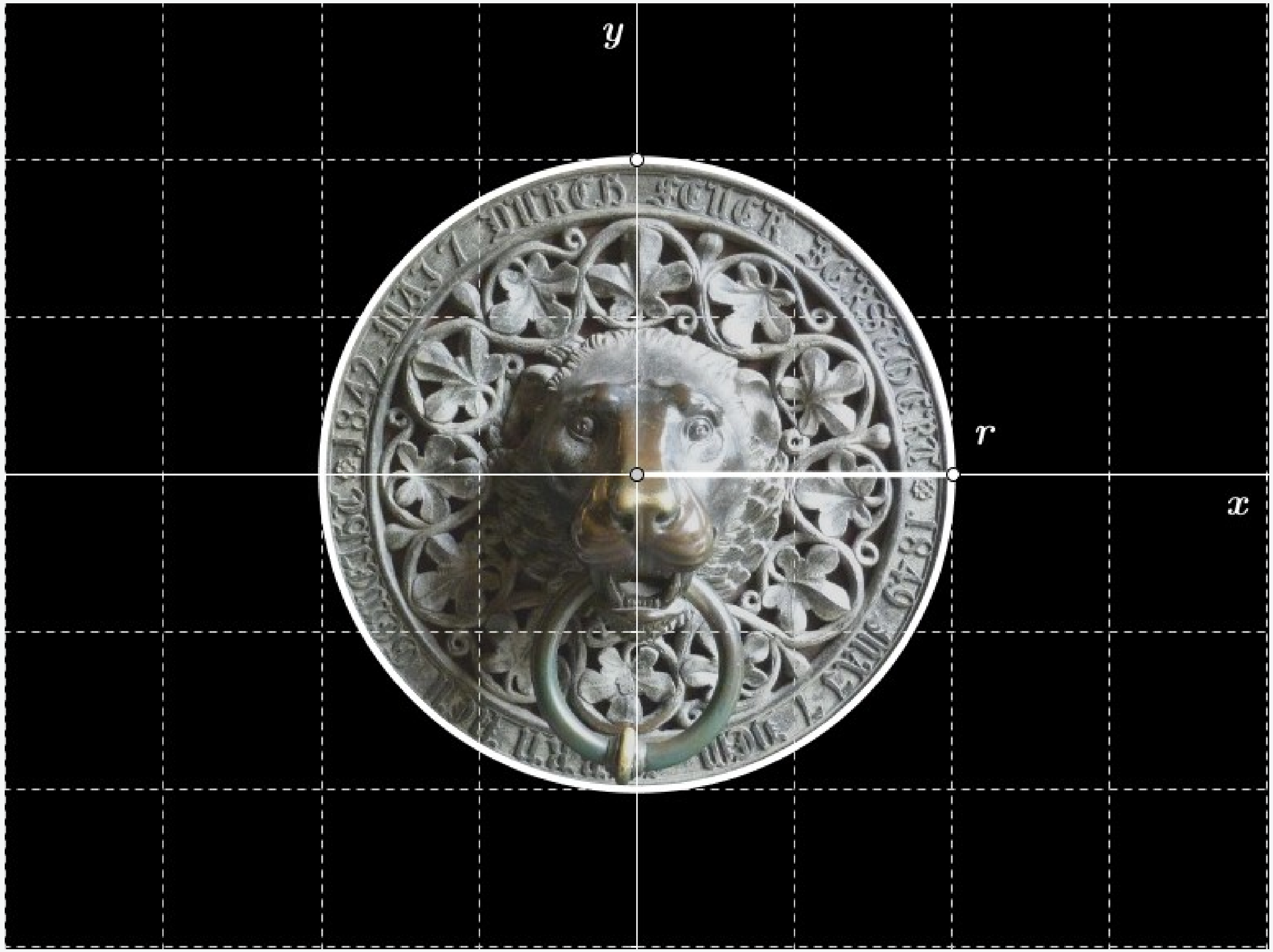


Abb. 1-1: Kreis mit dem Radius r

Die Fläche eines Kreises des Radiuses r ist eine quadratische Funktion des Radiuses

$$A(r) = \pi r^2$$

Beispiele von quadratischen Funktionen

Das Fallgesetz: $S(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$

Die kinetische Energie: $E_{kin}(v) = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

Die Fläche eines Kreises: $A(r) = \pi\, r^2$

Das Volumen eines Kreiszylinders: $V(r) = \pi\, h\, r^2$

Sevilla

Kurven, die man durch quadratische Funktionen beschreiben lassen

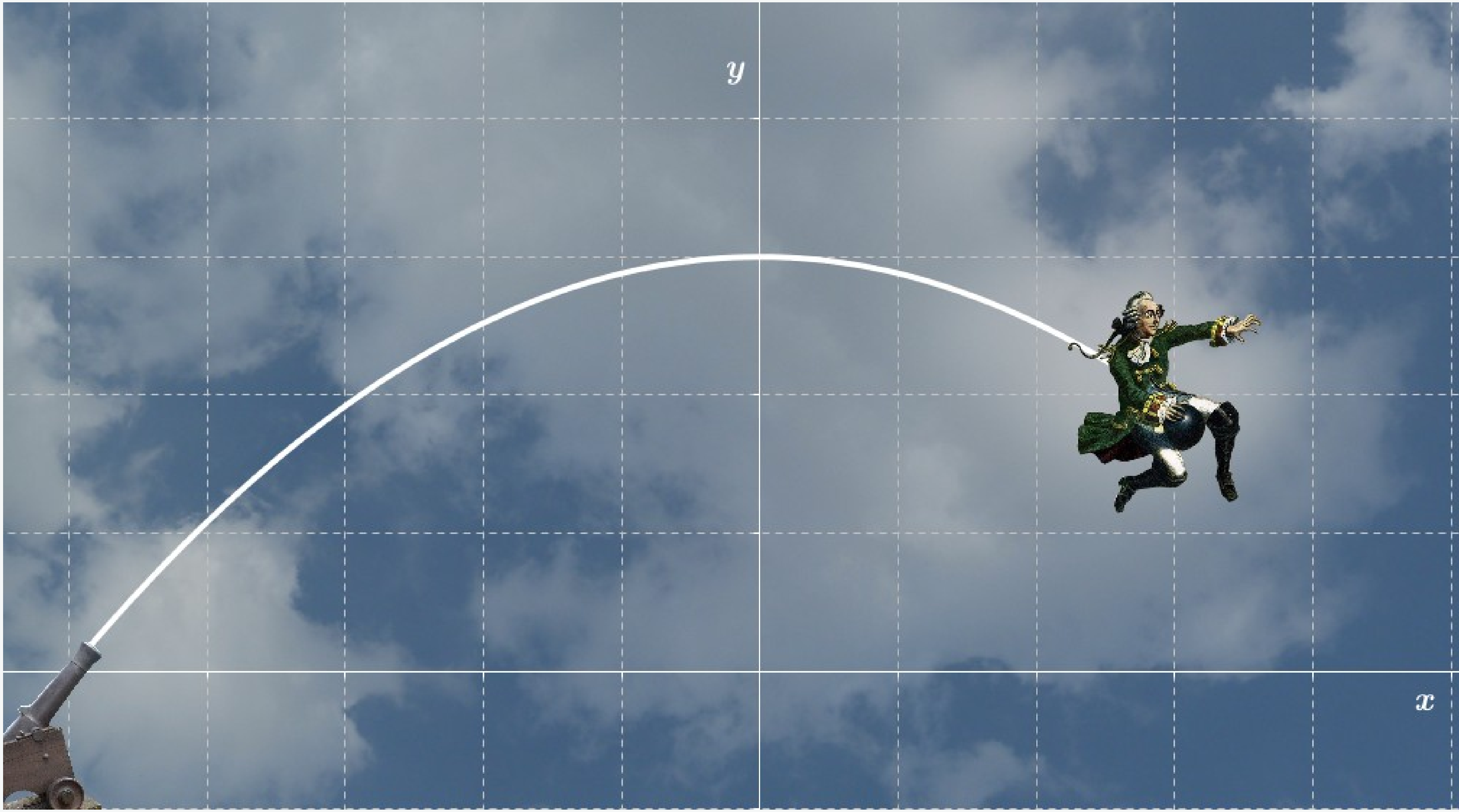


Abb. 1-2: Die Kurve, die den Flug des Baron von Münchhausens beschreibt, kann man näherungsweise durch eine quadratische Funktion beschreiben

Abb. 1-3: Mit quadratischen Funktionen kann man die Form des Pfades vom Wasser aus einem Brunnen modellieren

Definition:

Funktionen mit der Gleichung

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

$$x,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0$$

heißen quadratische Funktionen.

$a\,x^2$ – das quadratische Glied

$b\,x$ – das lineare Glied

c – das absolute Glied

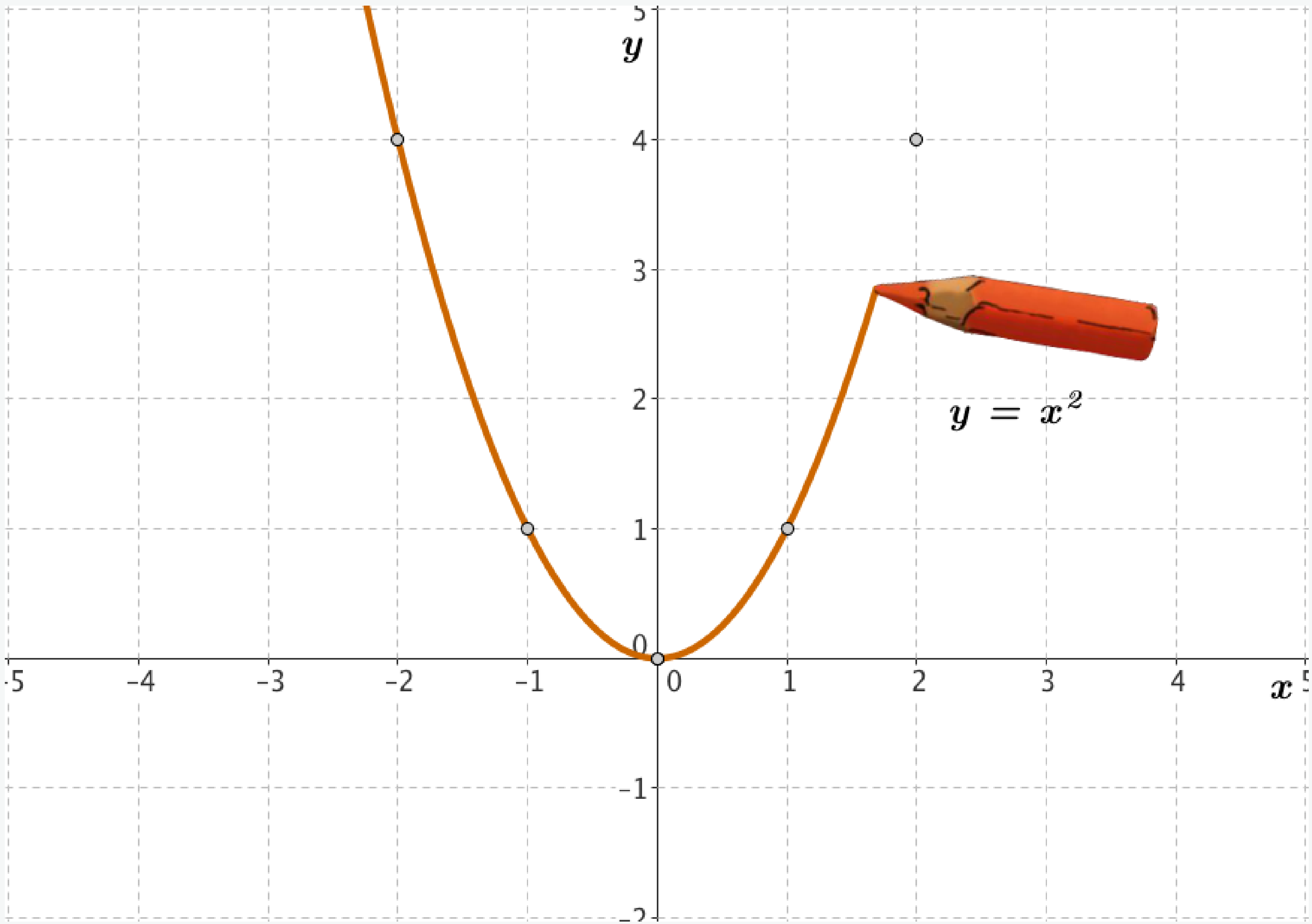


Abb. 2-1: Der Graph der Funktion $y = x^2$

$$(x\,,y) = \{\,(-3,\,9)\,,\,(-2,\,4)\,,\,(-1,\,1)\,,\,(0,\,0)\,,\,(1,\,1)\,,\,(2,\,4)\,,\,(3,\,9)\,\}$$

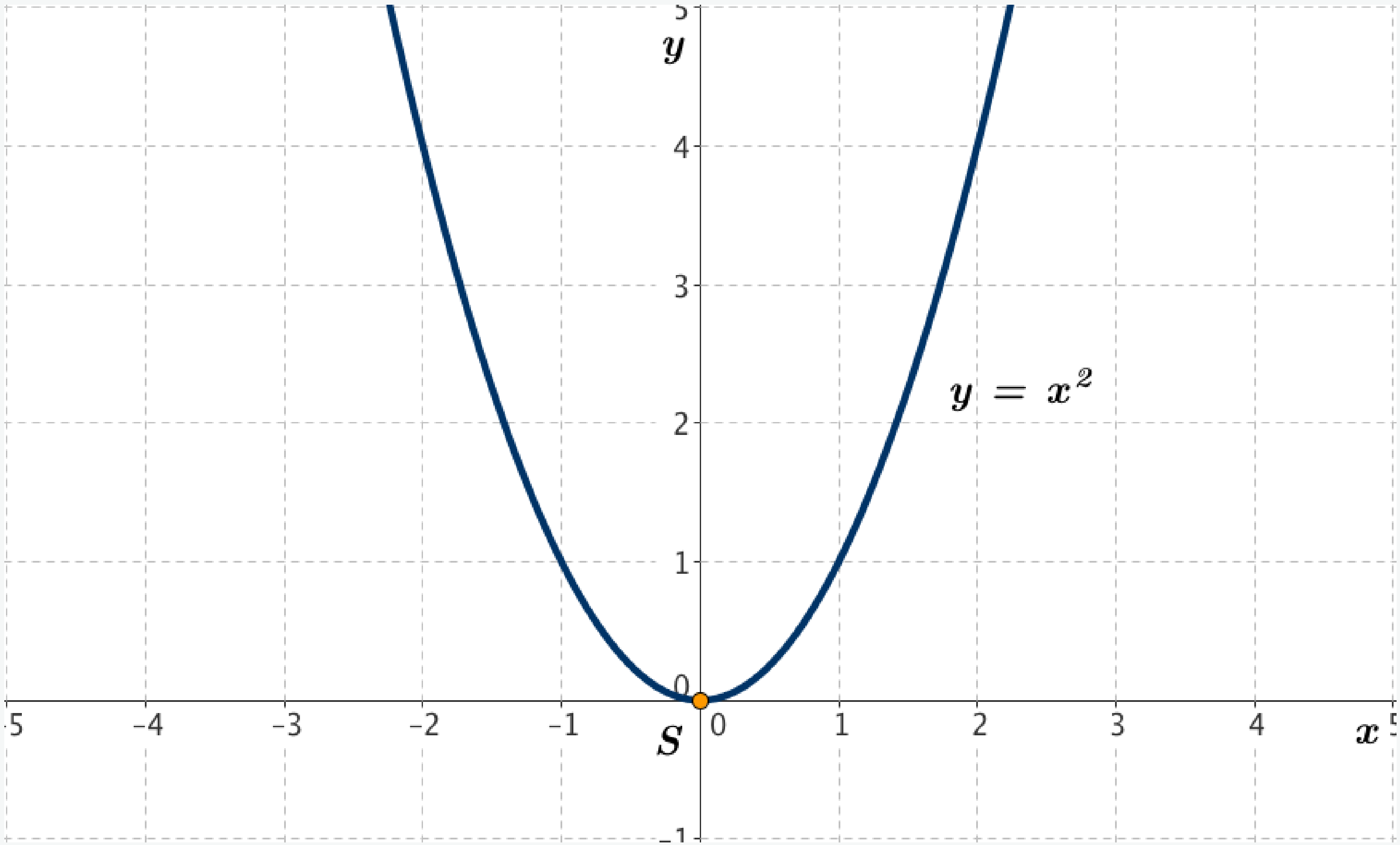


Abb. 2-2: Normalparabel $y = x^2$

$$y = x^2 \quad : D = \mathbb{R}\,, \quad W = [\,0,\ \infty\,)$$

$y = x^2$: Parabel ist nach oben geöffnet

Der Scheitelpunkt *S (0, 0)* ist der Tiefpunkt (Minimum)

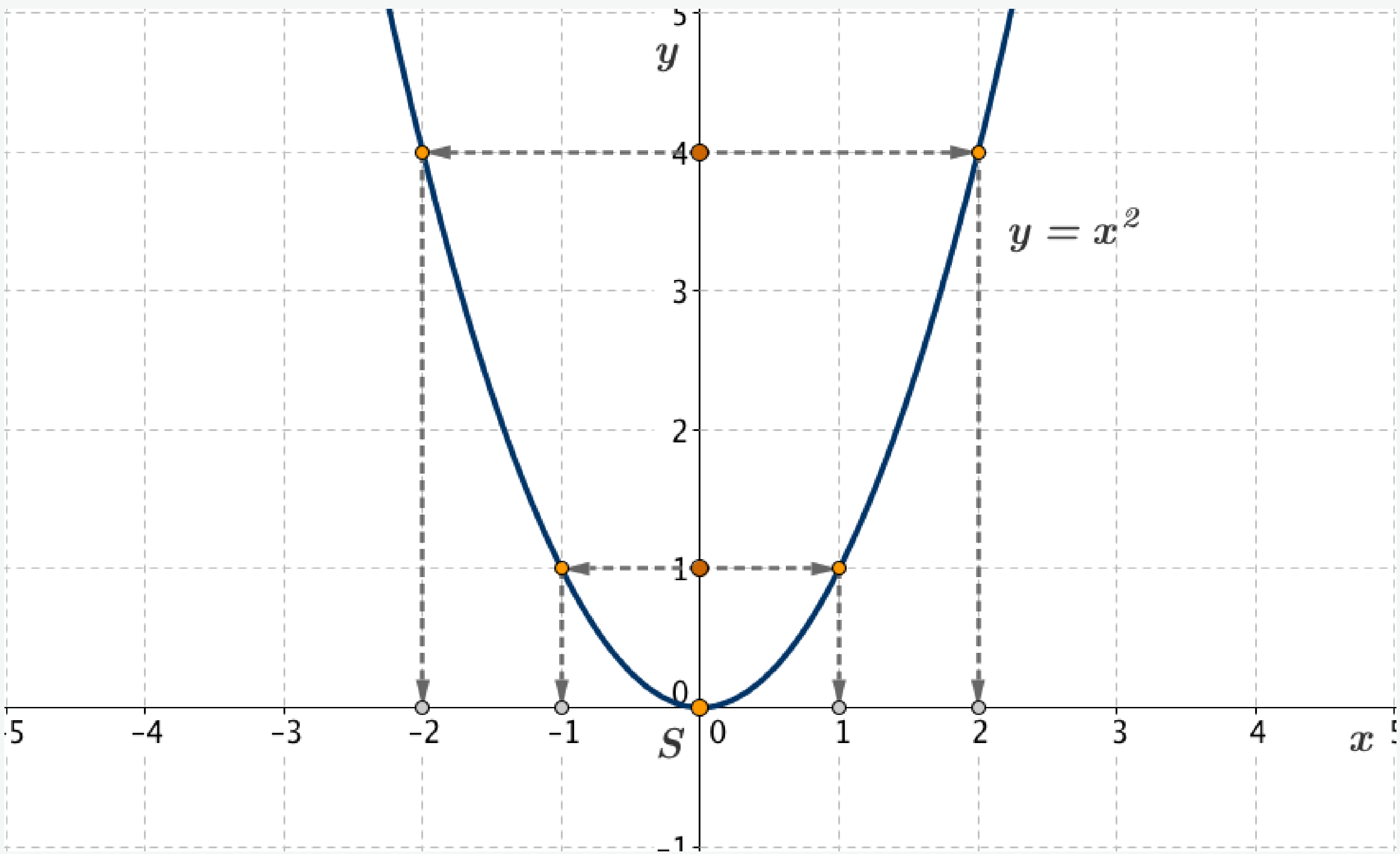


Abb. 2-3: Zur Symmetrieeigenschaft der Normalparabel y = x², y-Achse ist die Symmetrieachse

$$f(x) = x^2 \qquad : f(-x_1) = f(x_1), \qquad f(-x_2) = f(x_2)$$

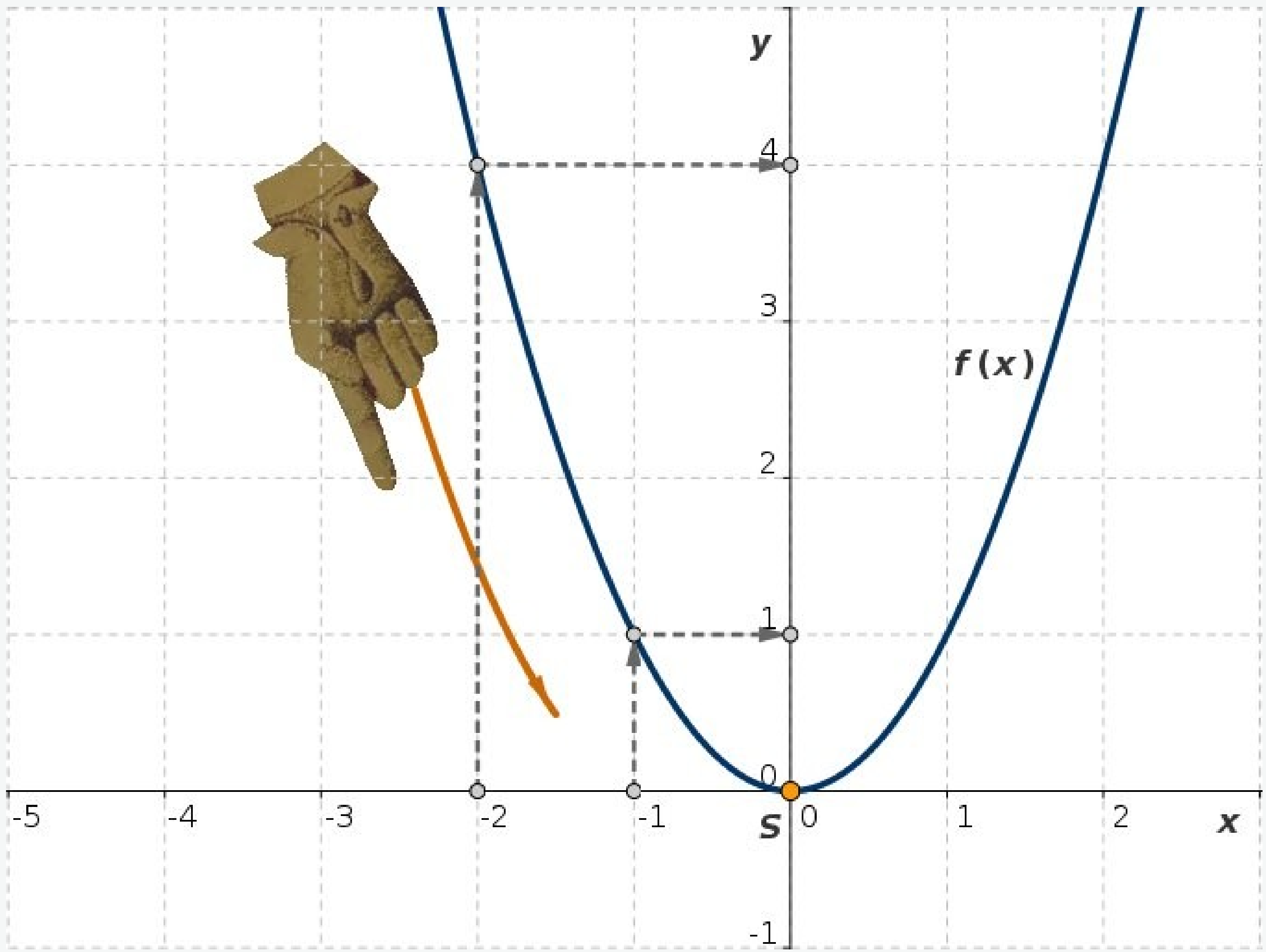


Abb. 2-4: Monotonieeigenschaft der Normalparabel y = x² im negativen Definitionsbereich

$$f(x) = x^2, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_1 < x_2, \quad f(x_1) > f(x_2)$$

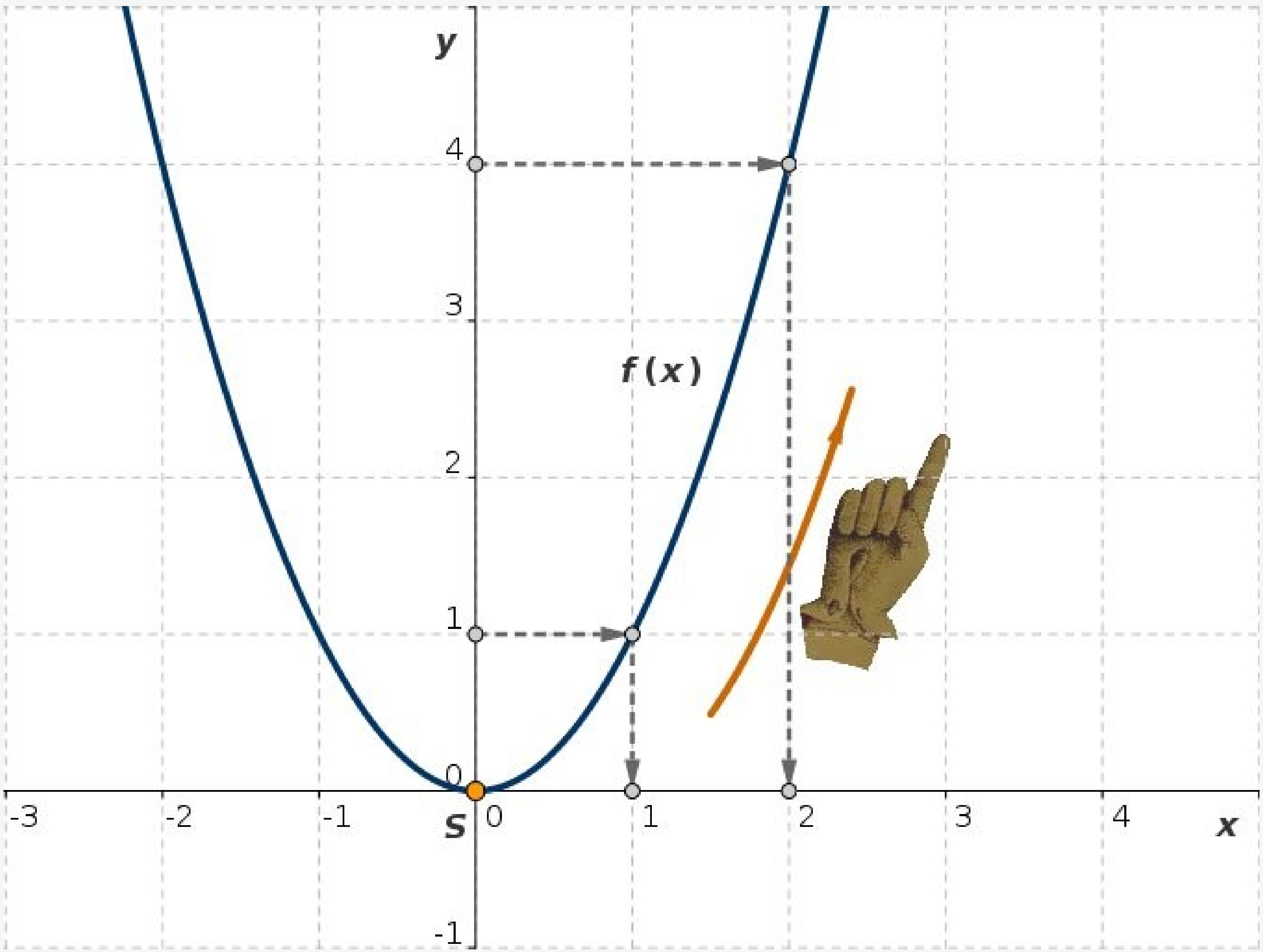


Abb. 2-5: Monotonieeigenschaft der Normalparabel $y = x^2$ im positiven Definitionsbereich

$$f(x) = x^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 < x_2, \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Definition:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall I des Definitionsbereiches monoton wachsend, wenn für alle

$$x_1, \; x_2 \in I \subset D, \quad x_1 < x_2$$

gilt:

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Definition:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall I des Definitionsbereiches monoton fallend, wenn für alle

$$x_1, \; x_2 \in I \subset D, \quad x_1 < x_2$$

gilt:

$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für $x \leq 0$ monoton fallend und für $x \geq 0$ monoton wachsend.

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem folgende quadratische Funktionen. Erklären Sie ihre Eigenschaften anhand der graphischen Darstellung

$a)\ f(x) = x^2, \qquad g(x) = 3\,x^2$

$b)\ f(x) = x^2, \qquad g(x) = 0.4\,x^2$

$c)\ f(x) = x^2, \qquad g(x) = -x^2$

$d)\ f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -3\,x^2$

$e)\ f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -0.3\,x^2$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion $y = x^2$ folgende Werte auf dem Zahlenstrahl

$$\sqrt{2}\,, \qquad \sqrt{3}$$

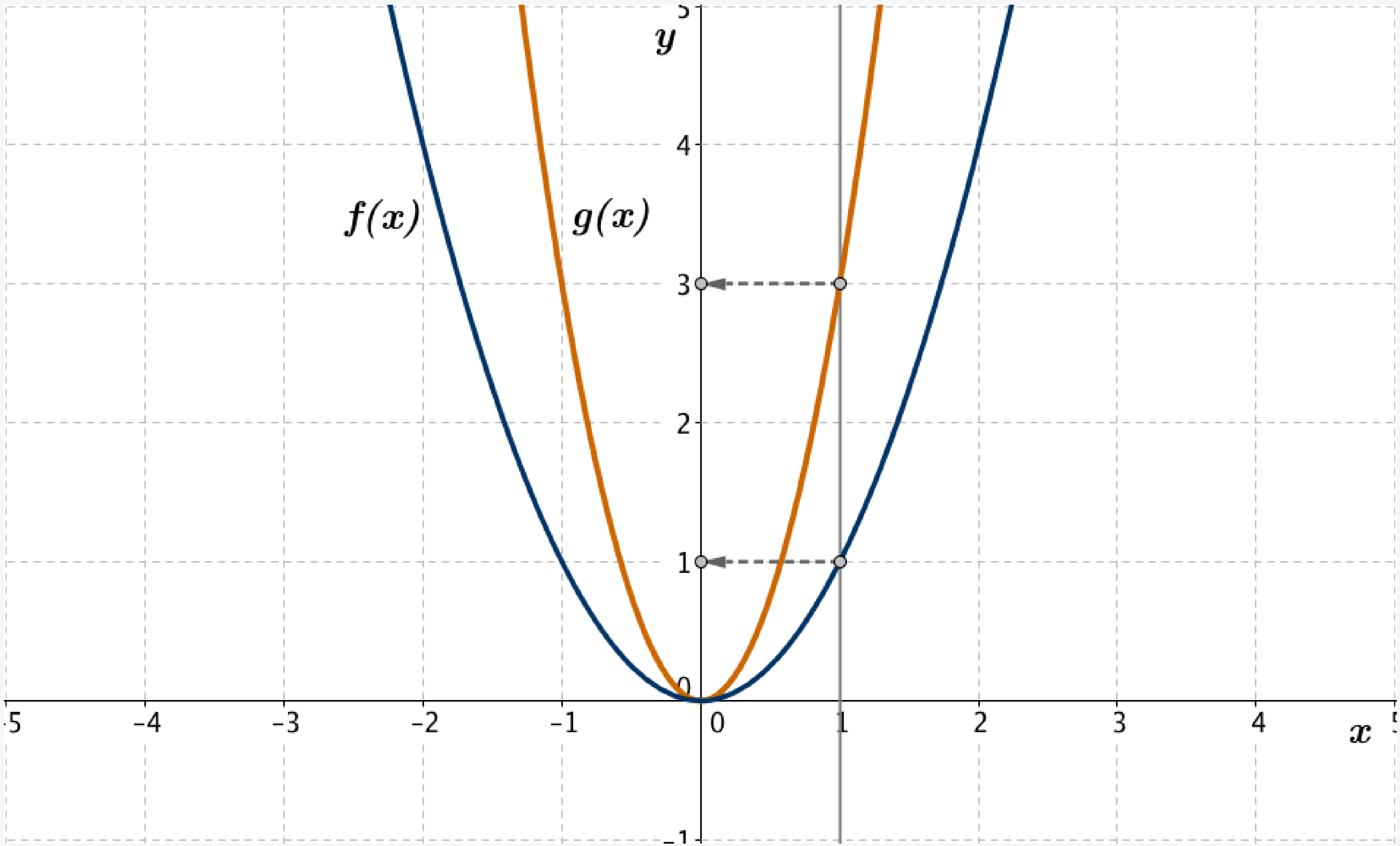


Abb. L1-a: Parabeln $y = f(x)$ und $y = g(x)$

Normalparabel: $a = 1, \quad f(x) = x^2$

Streckung der Normalparabel: $a = 3, \quad g(x) = 3\,x^2$

Quadratische Funktionen $y = a\,x^2$: Lösung 1b

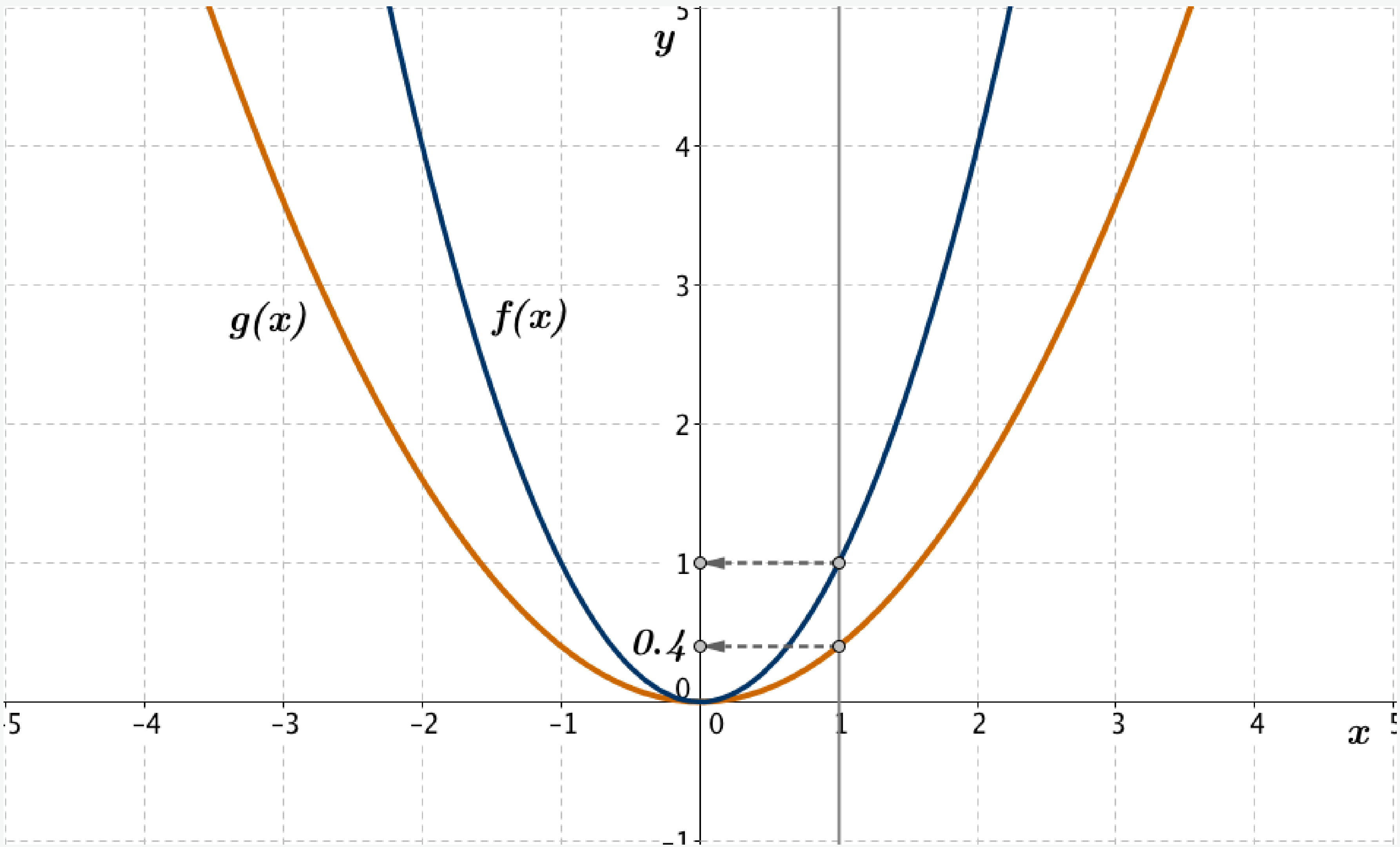


Abb. L1-b: Parabeln $y = f\,(x)$ und $y = g\,(x)$

Normalparabel: $a = 1, \quad f\,(x) = x^2$

Stauchung der Normalparabel: $a = 0.4, \quad g\,(x) = 0.4\,x^2$

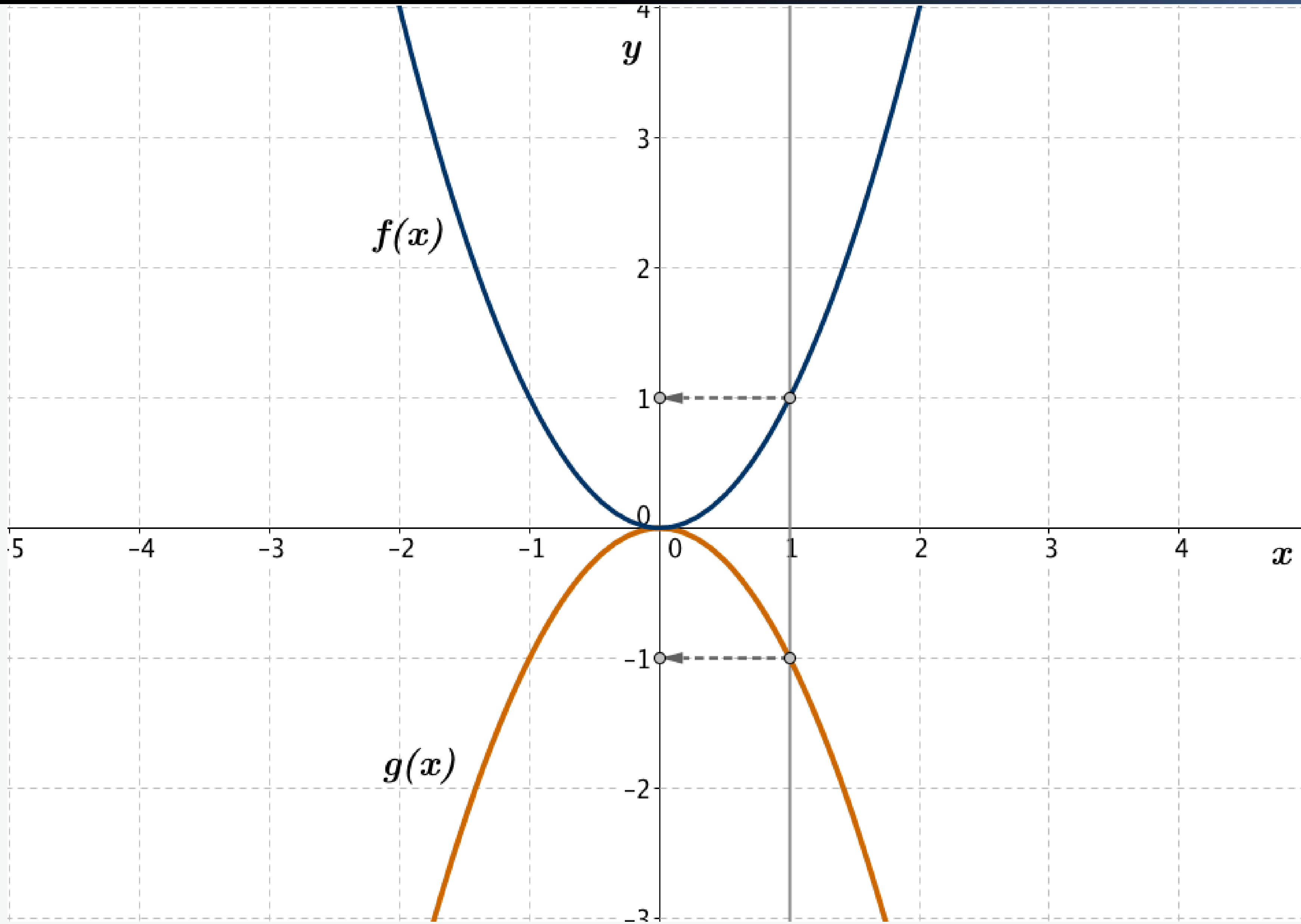


Abb. L1-c: Parabeln $y = f(x)$ und $y = g(x)$

Normalparabel: $a = 1, \quad f(x) = x^2$

Spiegelung der Normalparabel: $a = -1, \quad g(x) = -x^2$

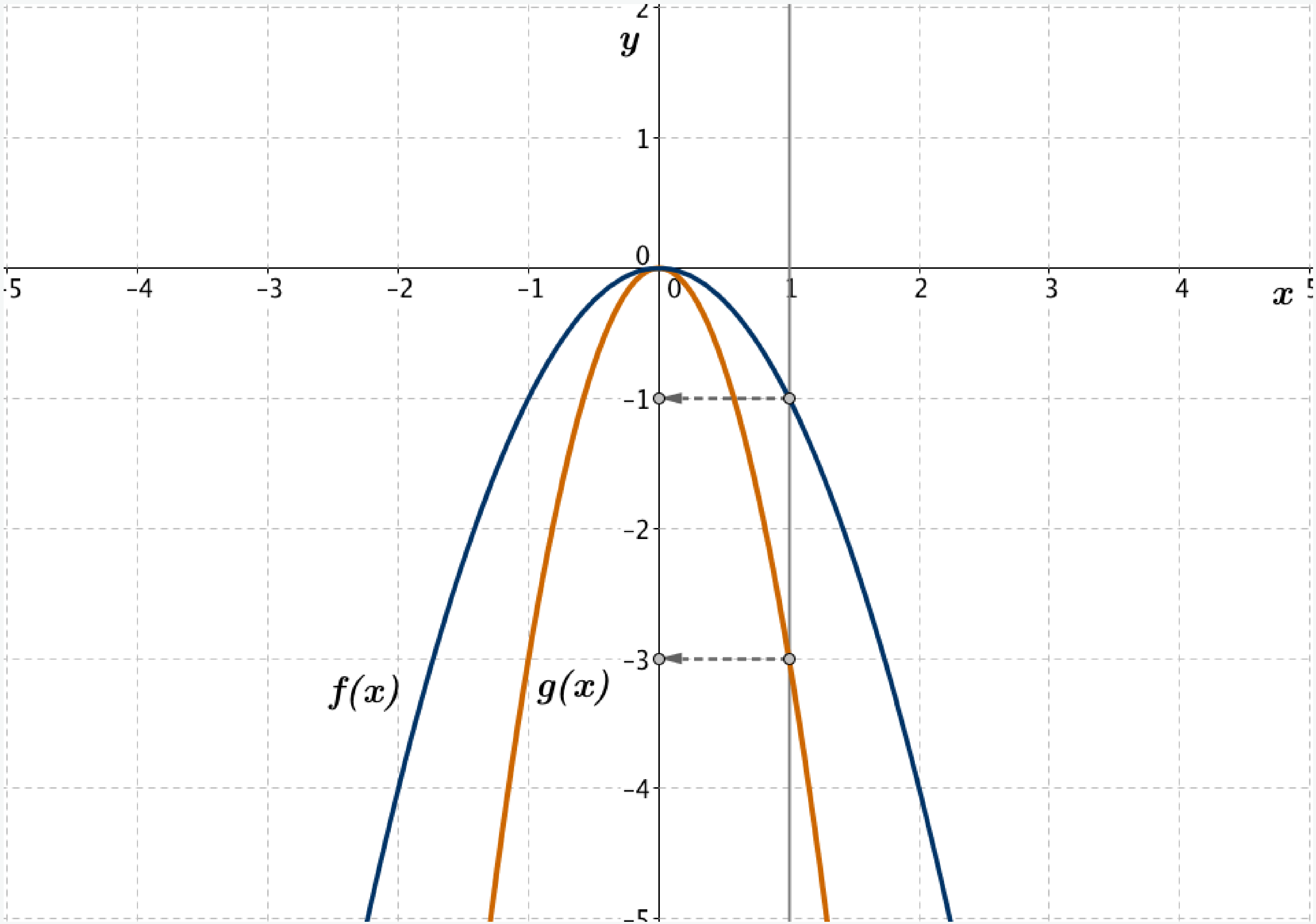


Abb. L1-d: Parabeln $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -3\,x^2$$

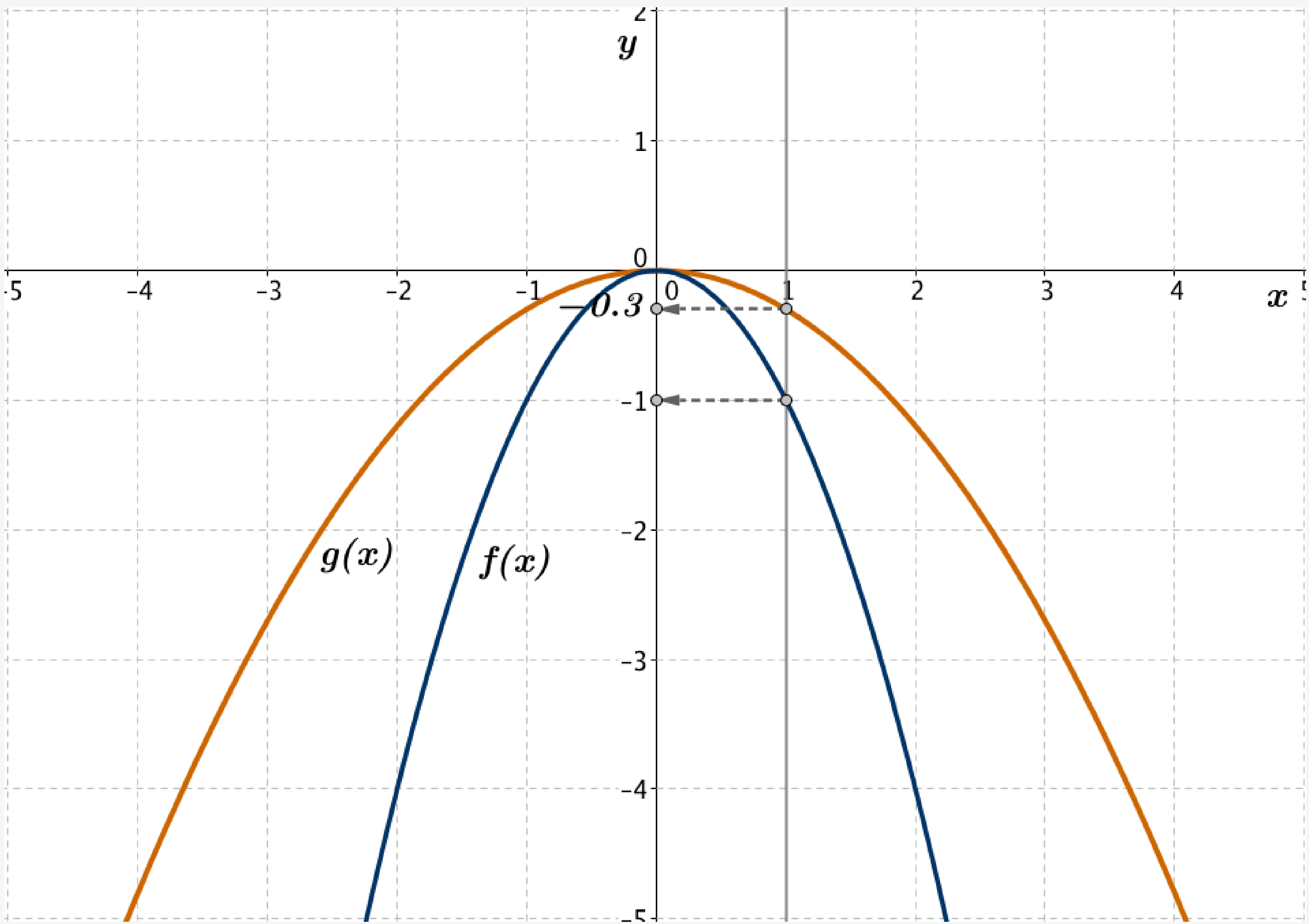


Abb. L1-e: Parabeln y = f (x) und y = g (x)

$$f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -0.3\,x^2$$

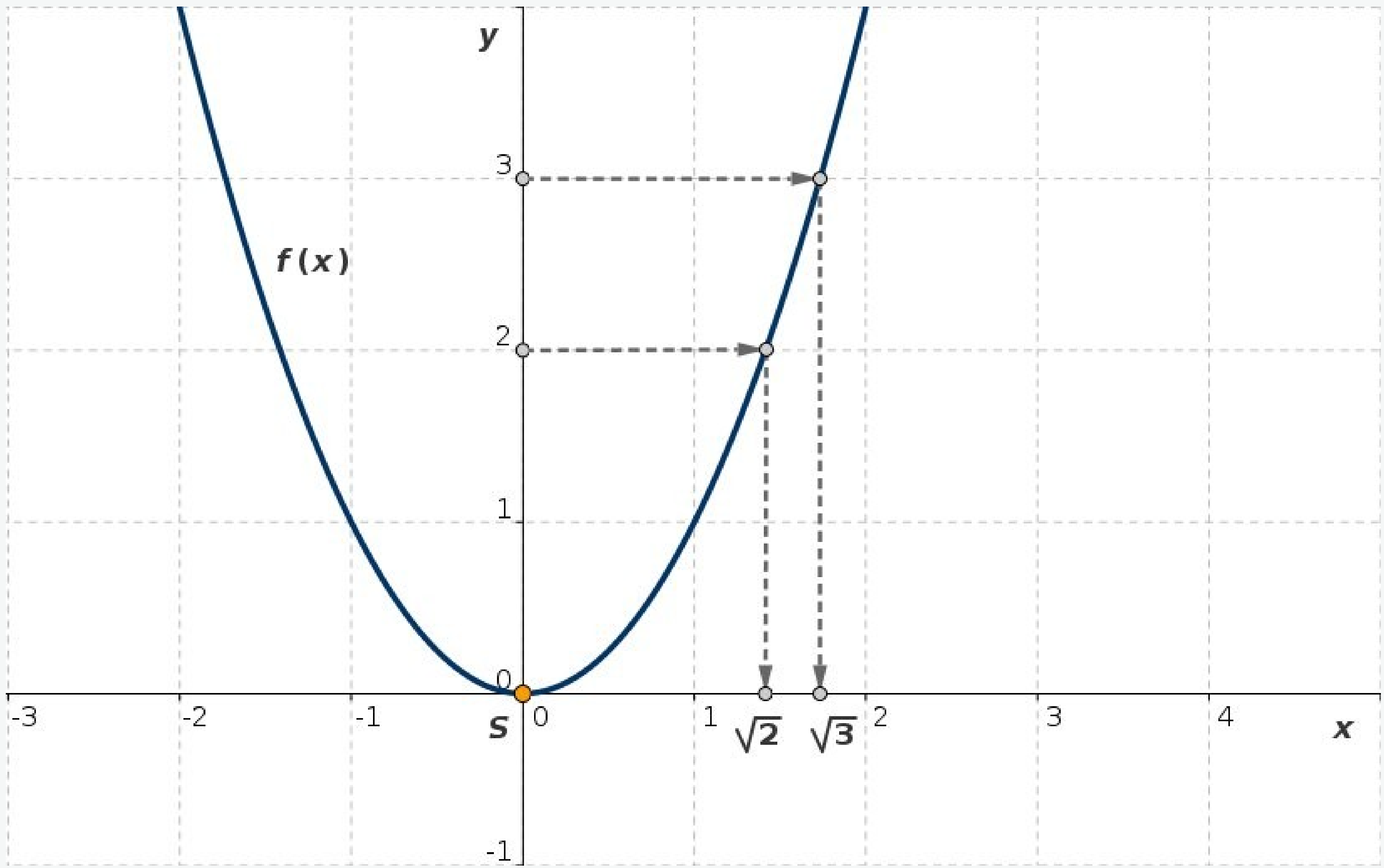
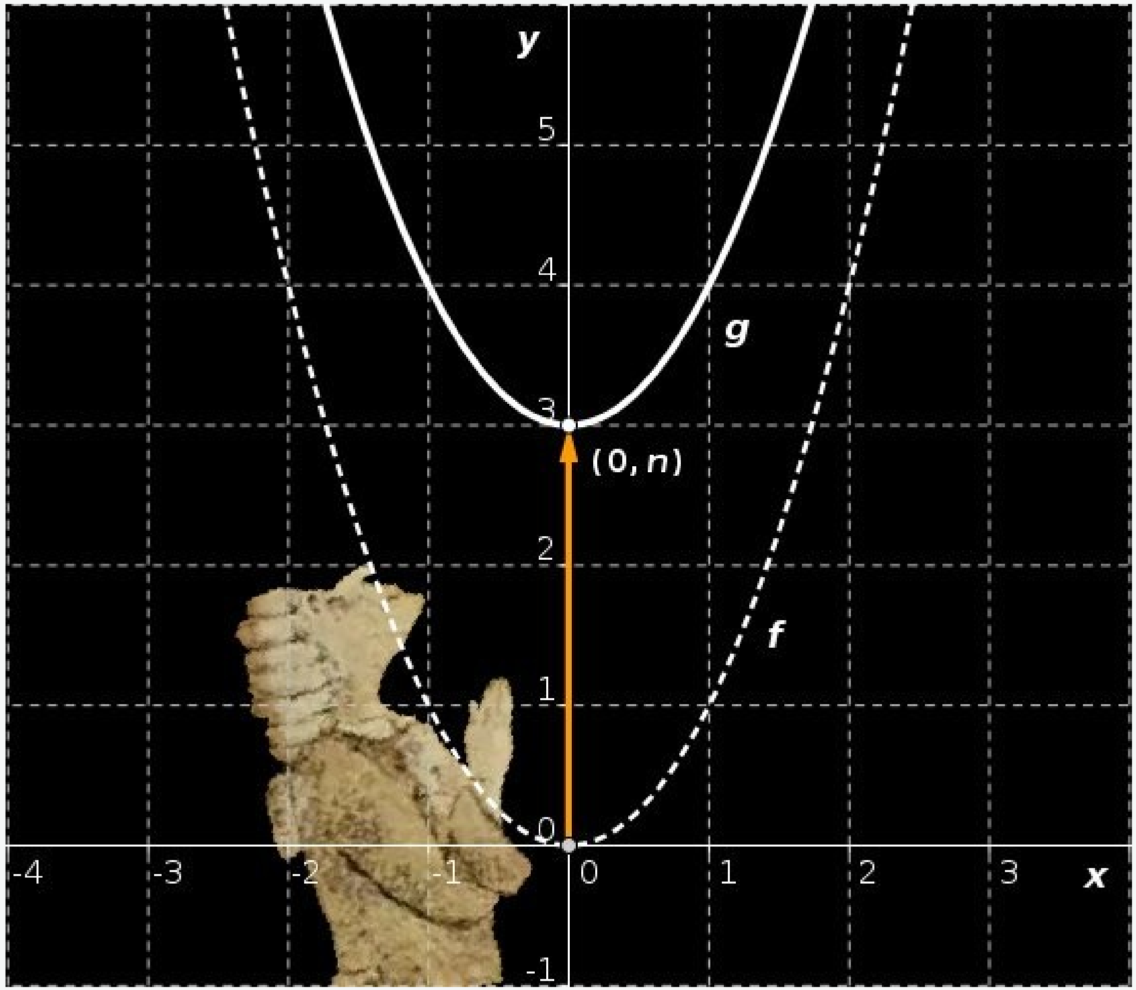


Abb. L2: Graphische Lösung der Aufgabe



http://www.youtube.com/watch?v=5z5sgNl6cDg

Abb. 3-1: Die Normalparabel $f(x) = x^2$ wird um $n = 3$ Einheiten in die positive Richtung der y-Achse verschoben

Den Graphen der Funktion $y = x^2 + n$ erhält man durch Verschiebung des Graphen der Funktion $y = x^2$ in Richtung der y-Achse um n Einheiten.

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^2 + n$$

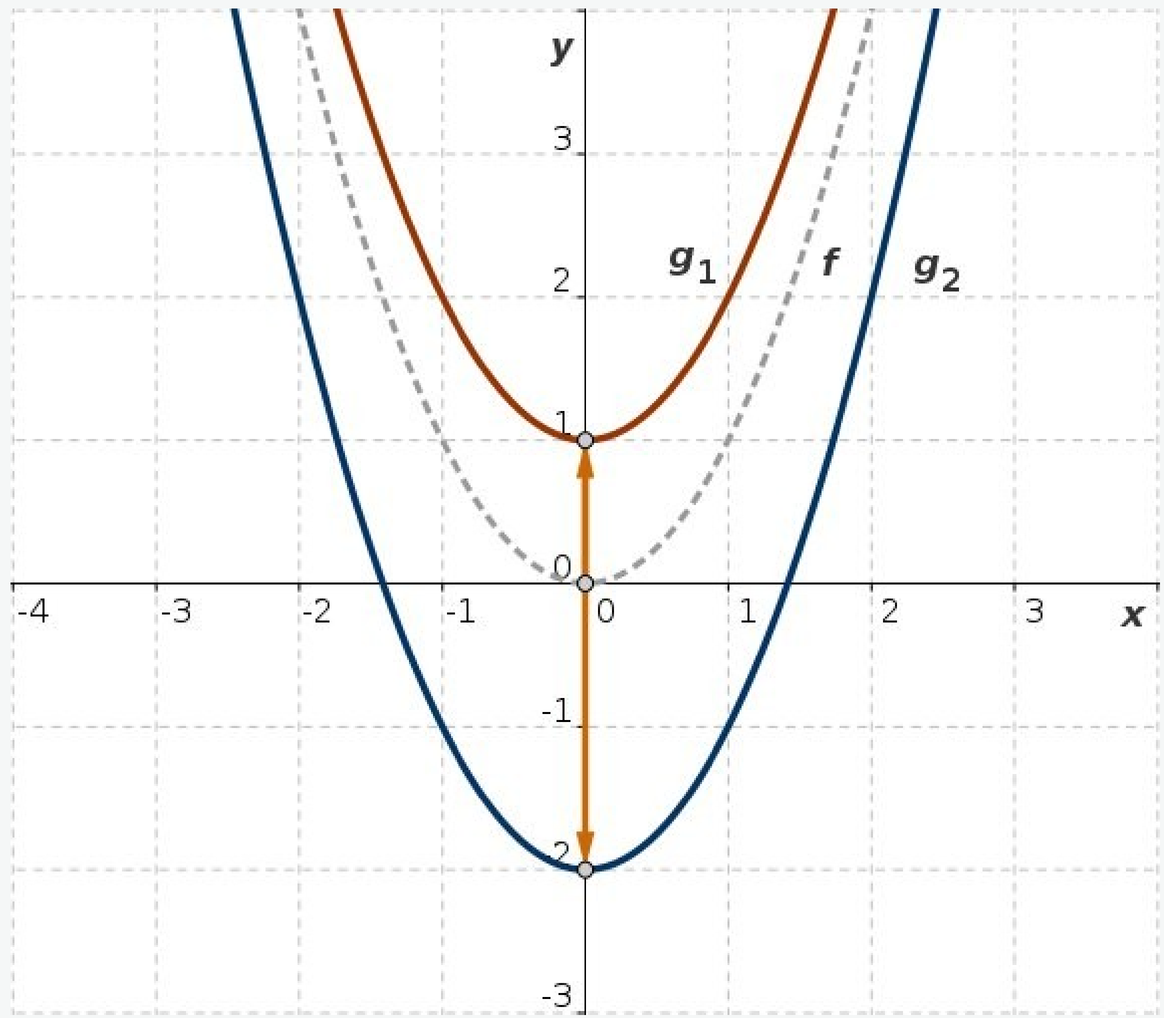
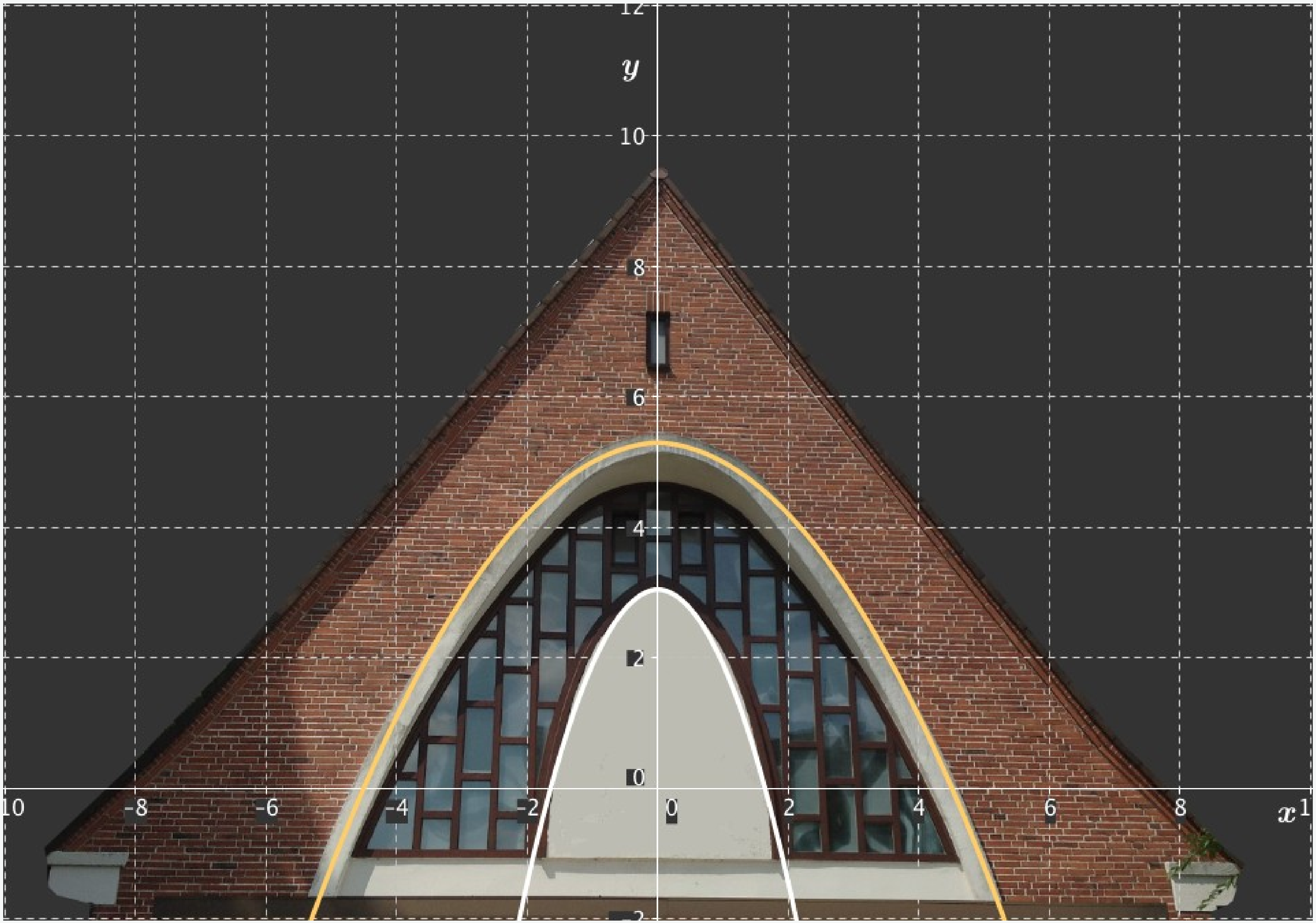


Abb. 3-2: Die Normalparabel $f(x) = x^2$ wird um 1 Einheit in die positive Richtung der y-Achse und um 2 Einheiten in die negative Richtung der y-Achse verschoben

Die Verschiebung erfolgt für $n > 0$ in positive Richtung der y-Achse, für $n < 0$ in negative Richtung der y-Achse.

$$f(x) = x^2, \qquad g_1(x) = x^2 + 1, \qquad g_2(x) = x^2 - 2$$


12
y
10
8
6
4
2
0
-2
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
10

Aufgabe 3:

Zeichnen Sie folgende Funktionen und erklären Sie Ihren Verlauf:

$a)\quad g_1(x) = 2\,x^2 + 2, \qquad g_2(x) = 0.2\,x^2 - 1$

$b)\quad g_1(x) = -3\,x^2 - 1, \qquad g_2(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{2}$

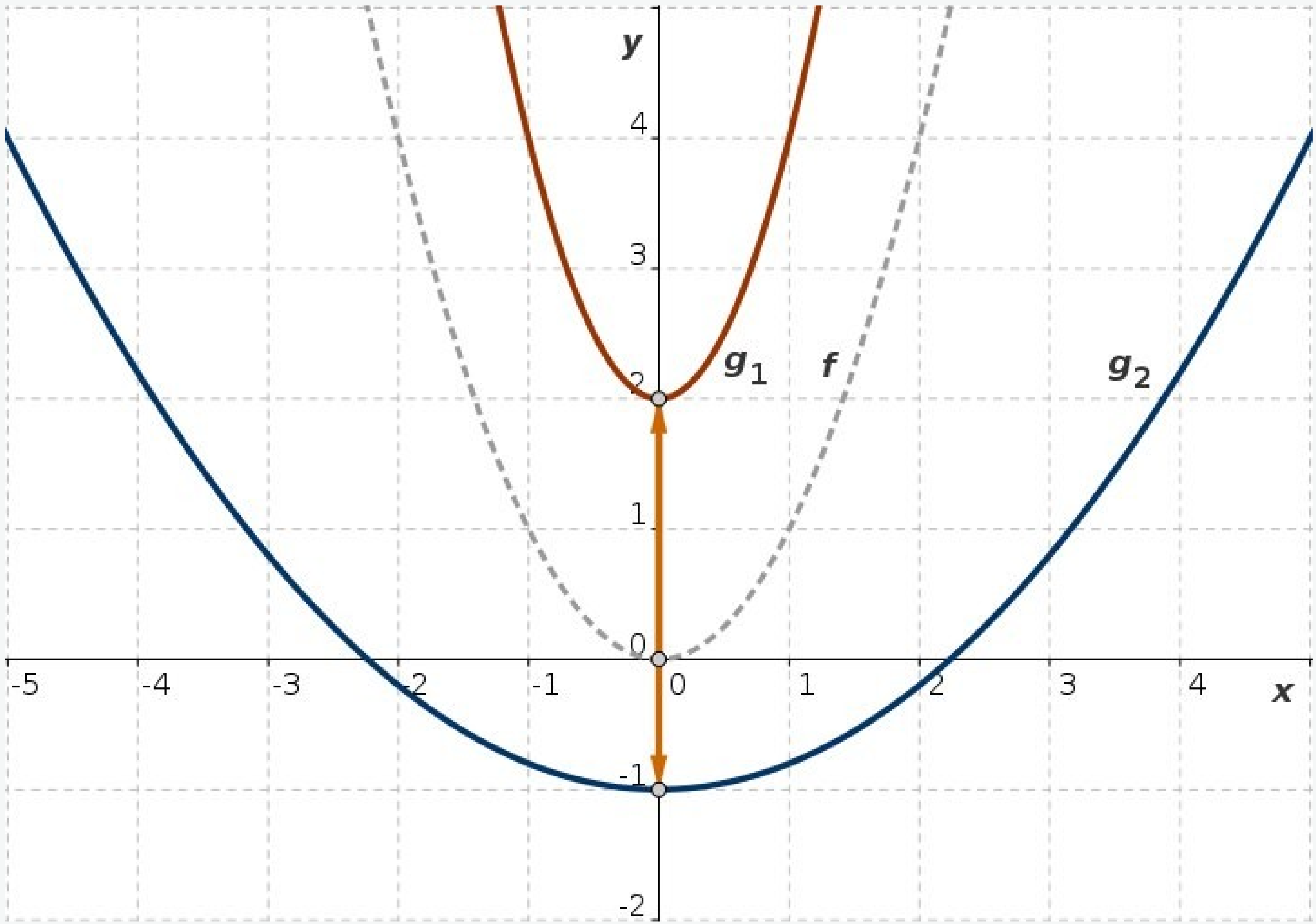


Abb. L3-1: Graphische Darstellung der quadratischen Funktionen

$$f(x) = x^2, \qquad g_1(x) = 2x^2 + 2, \qquad g_2(x) = 0.2x^2 - 1$$

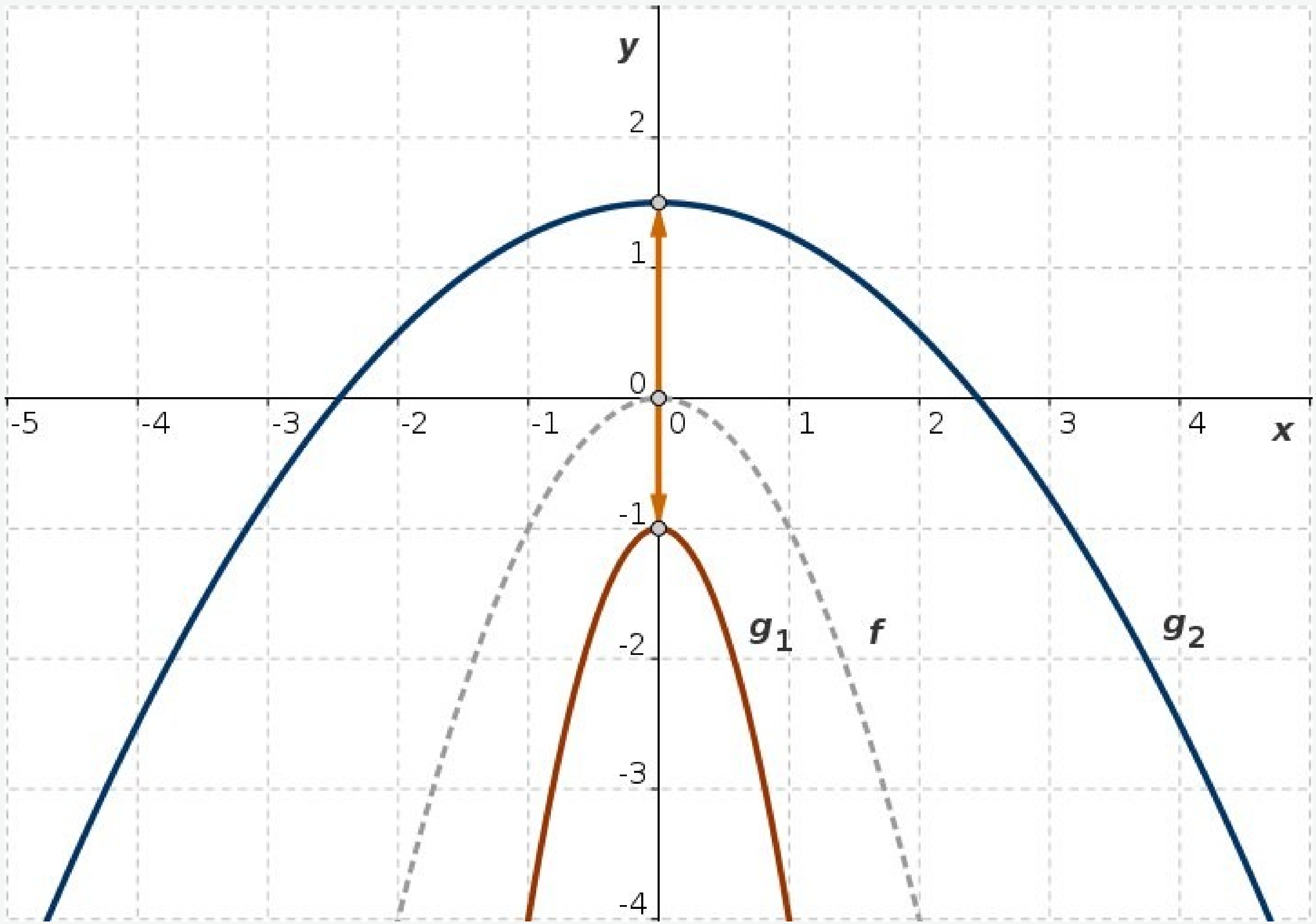


Abb. L3-2: Graphische Darstellung der quadratischen Funktionen

$$f\,(x) = -\,x^2\,, \qquad g_1(x) = -3\,x^2 - 1, \qquad g_2(x) = -\,\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}$$

$a\,)\quad g_1(x) = 2\,x^2 + 2\ :$

Streckung: $a = 2$, Verschiebung um $n = 2$ in die positive Richtung der y-Achse

$g_2(x) = 0.2\,x^2 - 1:$

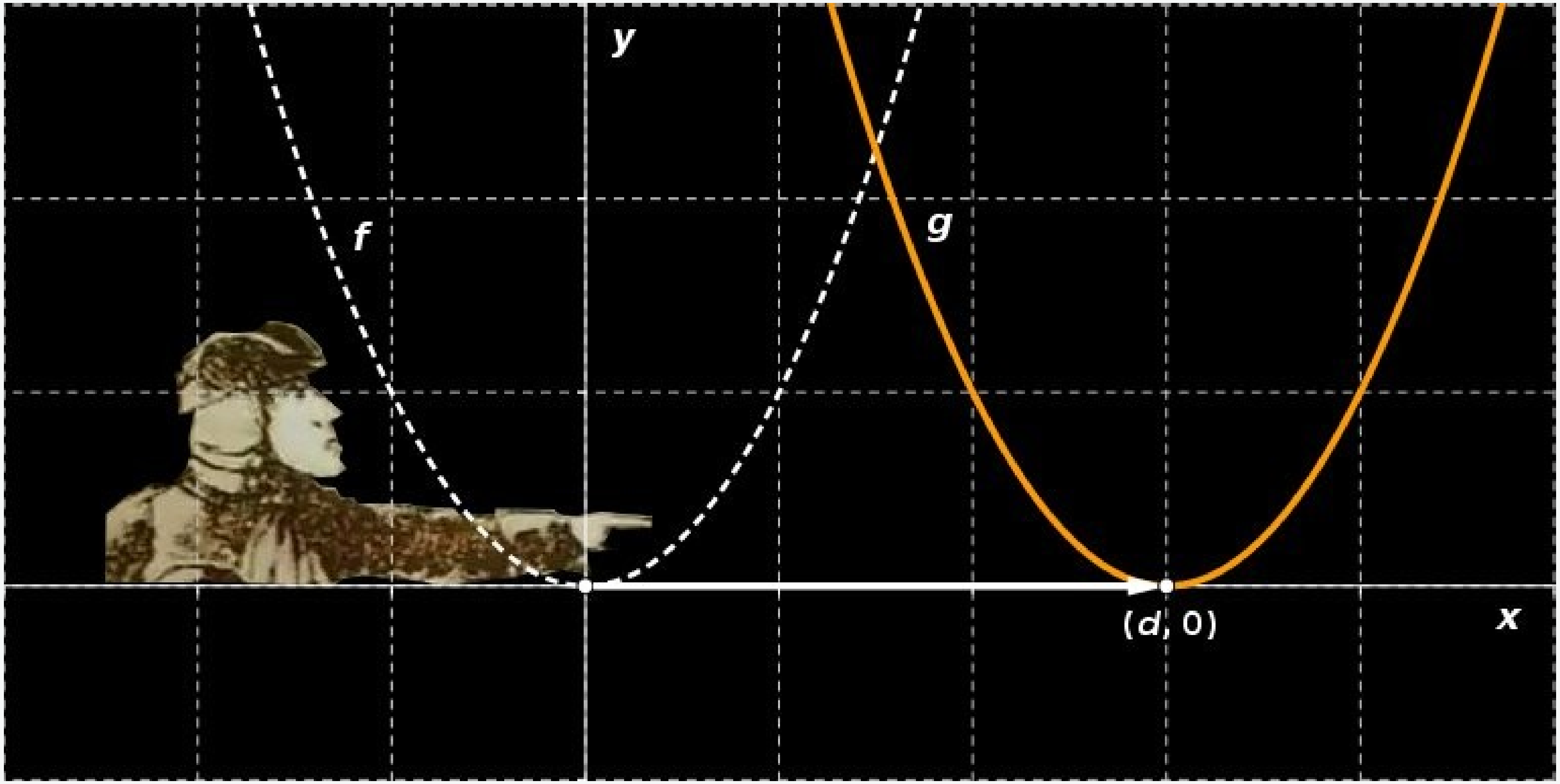
Stauchung: $a = 0.2$, Verschiebung um $n = 1$ in die negative Richtung der y-Achse

$b\,)\quad g_1(x) = -3\,x^2 - 1$

Spiegelung an der x-Achse, Streckung: $a = 3$, Verschiebung um $n = 1$ in die negative Richtung der y-Achse

$$g_2(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}$$

Spiegelung an der x-Achse, Stauchung: $a = 0.25$, Verschiebung um $n = 3/2$ in die positive Richtung der y-Achse



http://www.youtube.com/watch?v=5z5sgNl6cDg

Abb. 4-1: Die Normalparabel $f(x) = x^2$ wird um d Einheiten in die positive Richtung der x-Achse verschoben

Den Graphen der Funktion $y = g(x)$ erhält man durch Verschiebung des Graphen der Funktion $y = f(x)$ in Richtung der x-Achse um d Einheiten.

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = (x - d)^2$$

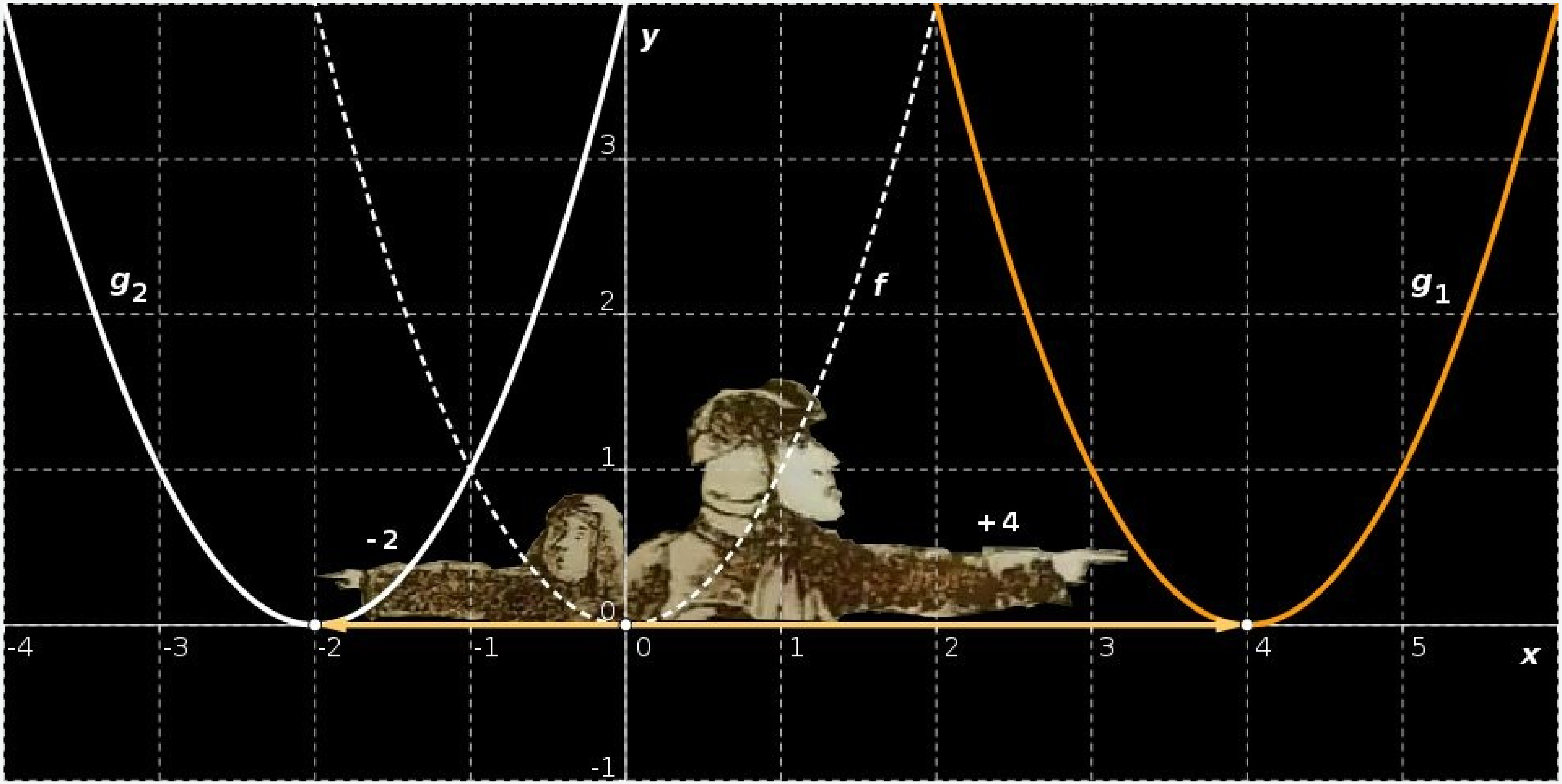


Abb. 4-2: Die Normalparabel $f(x) = x^2$ wird um 4 Einheiten in die positive Richtung der x-Achse und um 2 Einheiten in die negative Richtung der x-Achse verschoben

Die Verschiebung erfolgt für $d > 0$ in positive, für $d < 0$ in negative x-Richtung.

$$f(x) = x^2, \quad g_1(x) = (x-4)^2 \ \ (d = 4), \quad g_2(x) = (x+2)^2 \ \ (d = -2)$$

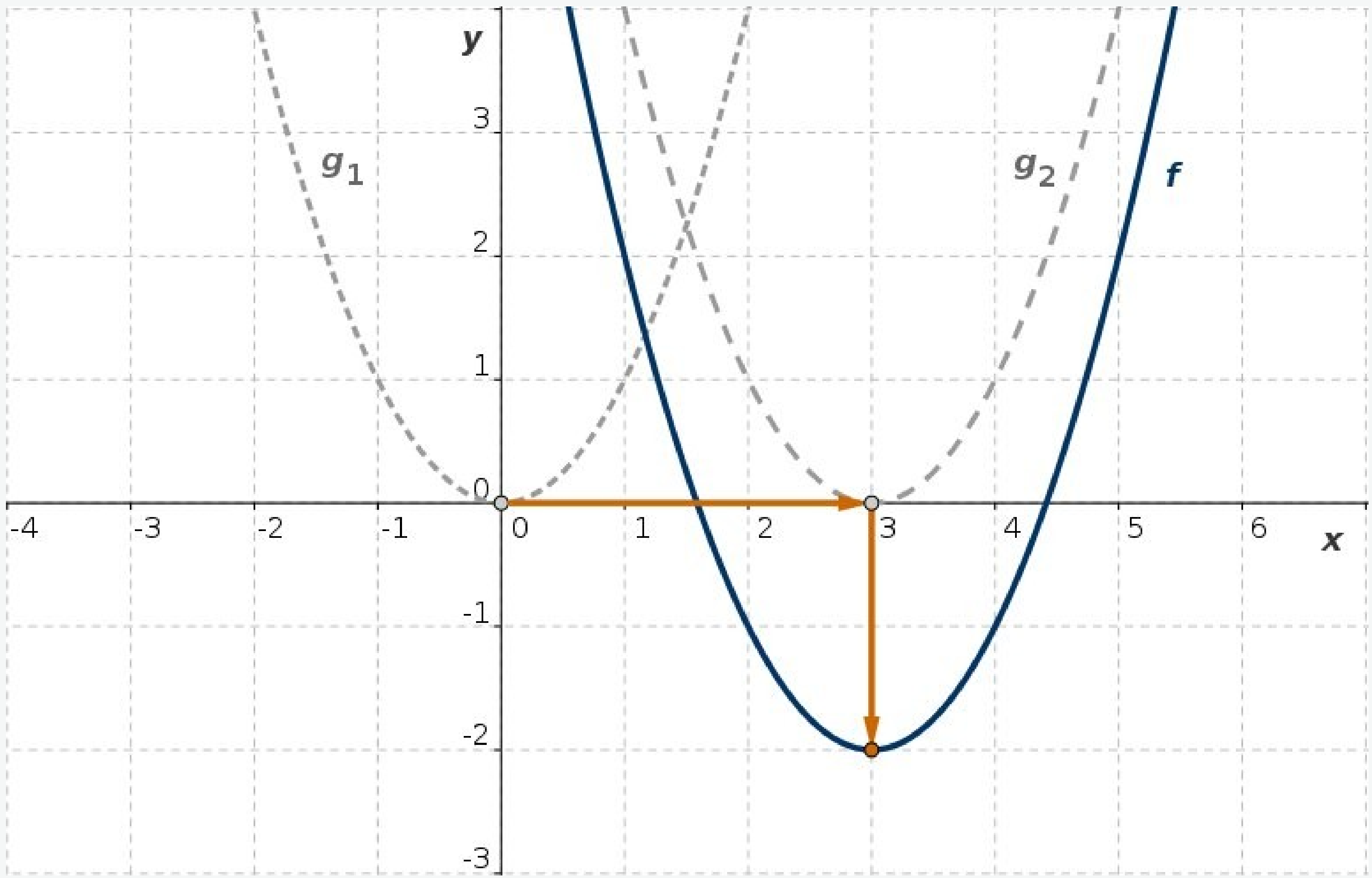


Abb. 5: Die graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$ wird durch zwei nacheinander durchzuführende Verschiebungen gewonnen

$$g_1(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad g_2(x) = (x-3)^2 \quad \rightarrow \quad f(x) = (x-3)^2 - 2$$