http://www.flickr.com/photos/sigfrid/2083988836/

Biquadratische Gleichungen

Definition:

Eine Gleichung 4. Grades der Form

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

heißt biquadratische Gleichung.

Falls eine biquadratische Gleichung eine Lösung x_0 hat, hat sie auch eine weitere Lösung, nämlich $-x_0$, was sich einfach zeigen lässt

$$x_0 \in \mathrm{L}\,, \qquad a\,x_0^4 + b\,x_0^2 + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-x_0 \in \mathrm{L}\,, \qquad a\,(-x_0)^4 + b\,(-x_0)^2 + c = 0$$

Lösung einer biquadratischen Gleichung

Biquadratische Gleichungen lassen sich durch die Substitution $x^2 = z$ in eine quadratische Gleichung überführen und mithilfe der bekannten Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen lösen.

$$z = x^2, \qquad z^2 = x^4 \qquad \Rightarrow$$

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0 \qquad \to \qquad a\,z^2 + b\,z + c = 0$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}, \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$z_1 = x^2, \qquad z_2 = x^2 \qquad \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$

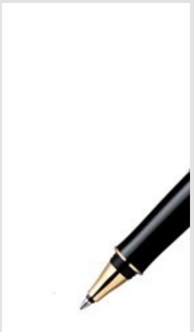
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$

Die Lösung einer biquadratischen Gleichung

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$

kann in der Form dargestellt werden

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$



Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie folgende biquadratische Gleichungen

$a)\quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$b)\quad 2x^4 - 8x^2 - 24 = 0$

$c)\quad x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Biquadratische Gleichungen: Lösung 1

1. Substitution $z = x^2$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 3z - 4 = 0$$

2. Lösung der transformierten Gleichung (p-q-Formel):

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0, \qquad z_1 = 4, \qquad z_2 = -1$$

3. Rücktransformation:

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

$x^2 = -1$ ist nicht lösbar im Reellen

4. Lösungsmenge

$$L = \{-2,\ 2\}$$

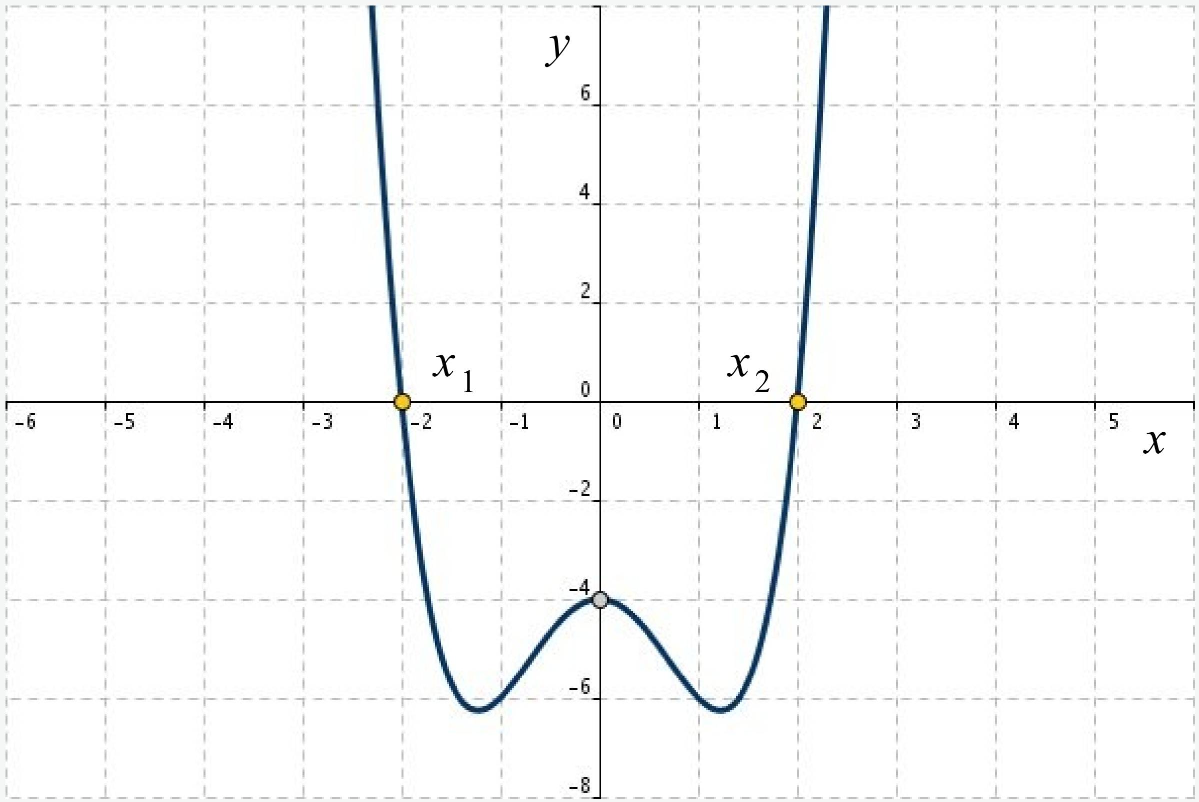


Abb. 1: Funktion f (x)

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

$x_1 = -2, \quad x_2 = 2$ – Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

1. Substitution $z = x^2$

$$x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0 \quad \to \quad z^2 - 13\,z + 36 = 0$$

2. Lösung der transformierten Gleichung (p-q-Formel):

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,, \qquad p = -13, \quad q = 36$$

$$z_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{13^2}{4} - 36} = 6.5 \pm 2.5 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 4, \quad z_2 = 9$$

3. Rücktransformation:

$$z = x^2\,, \qquad x = \pm\sqrt{z}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm\,2\,, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm\,3$$

4. Lösungsmenge

$$L = \{-3,\ -2,\ 2,\ 3\}$$

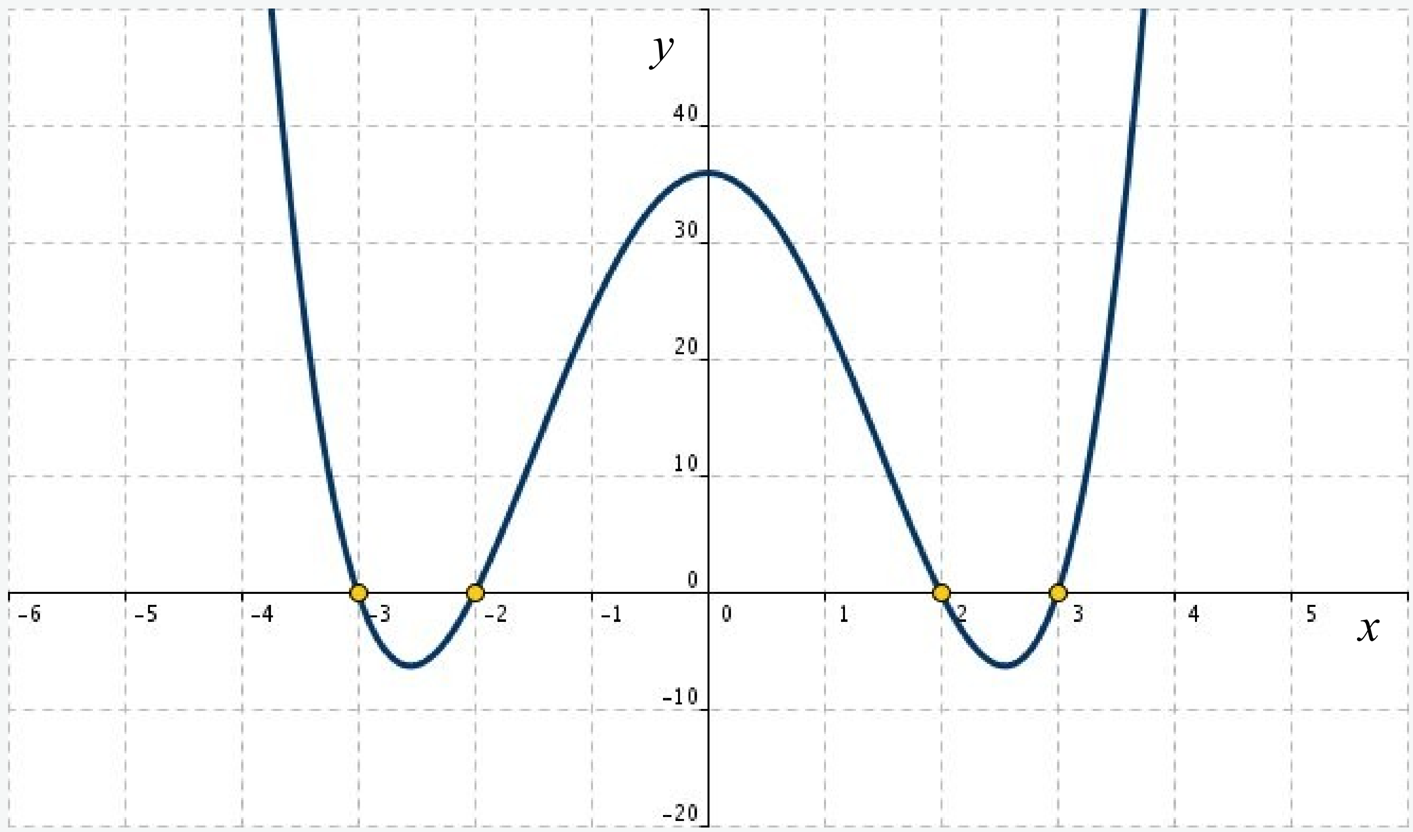


Abb. 2-1: Funktion f (x)

$$f(x) = x^4 - 13\,x^2 + 36$$

$L = \{-3,\ -2,\ 2,\ 3\}$ – Lösungsmenge der Gleichung

$$x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$$

$$2\,x^4 - 8\,x^2 - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4\,x^2 - 12 = 0$$

1. Substitution $\quad z = x^2$

$$x^4 - 4\,x^2 - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 - 4\,z - 12 = 0$$

2. Lösung der transformierten Gleichung (*p*-*q*-Formel):

$$z_1 = 6, \qquad z_2 = -2$$

3. Rücktransformation:

$$z = x^2, \qquad x = \pm\sqrt{z}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{6}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm\sqrt{-2} \quad \text{– keine reelle Lösung}$$

4. Lösungsmenge

$$L = \{-\sqrt{6}\,,\ \sqrt{6}\,\}$$

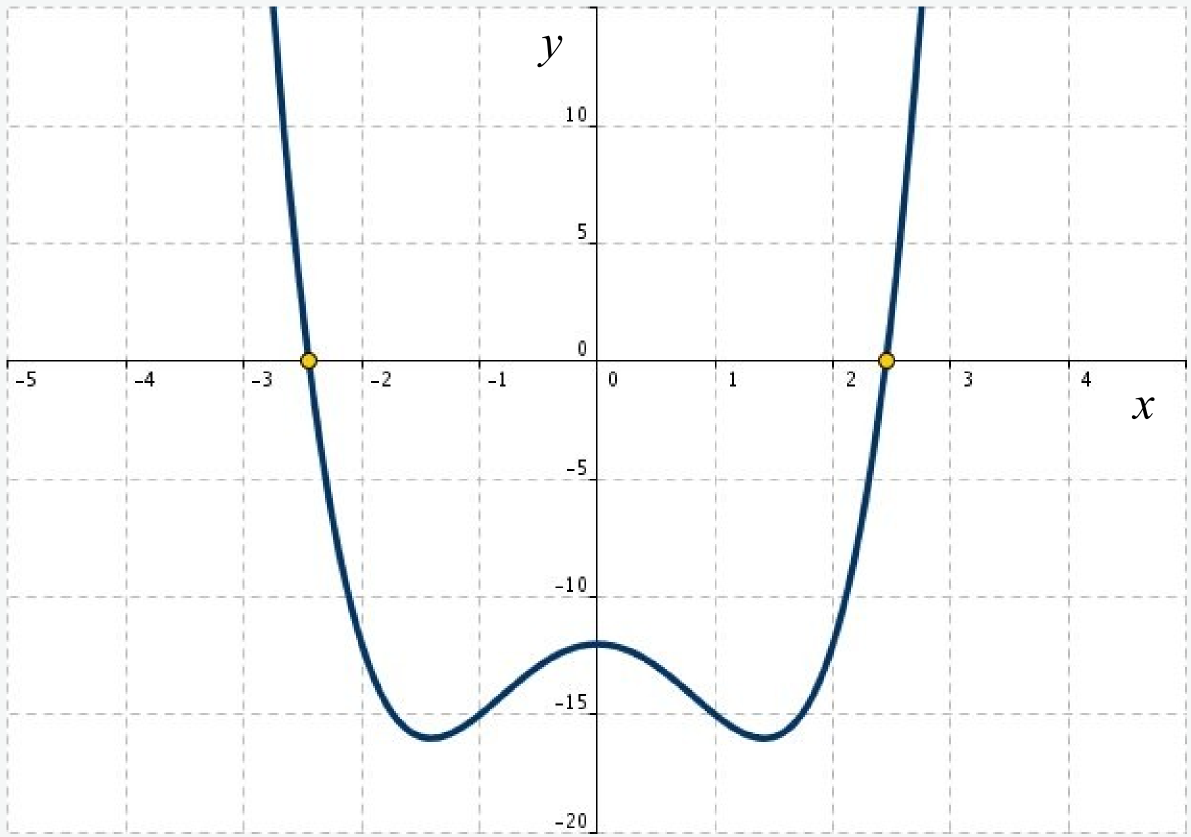


Abb. 2-2: Funktion f (x)

$$f(x) = x^4 - 4x^2 - 12$$

$L = \{ -\sqrt{6}, \ \sqrt{6} \}$ – Lösungsmenge der Gleichung

$$x^4 - 4x^2 - 12 = 0$$

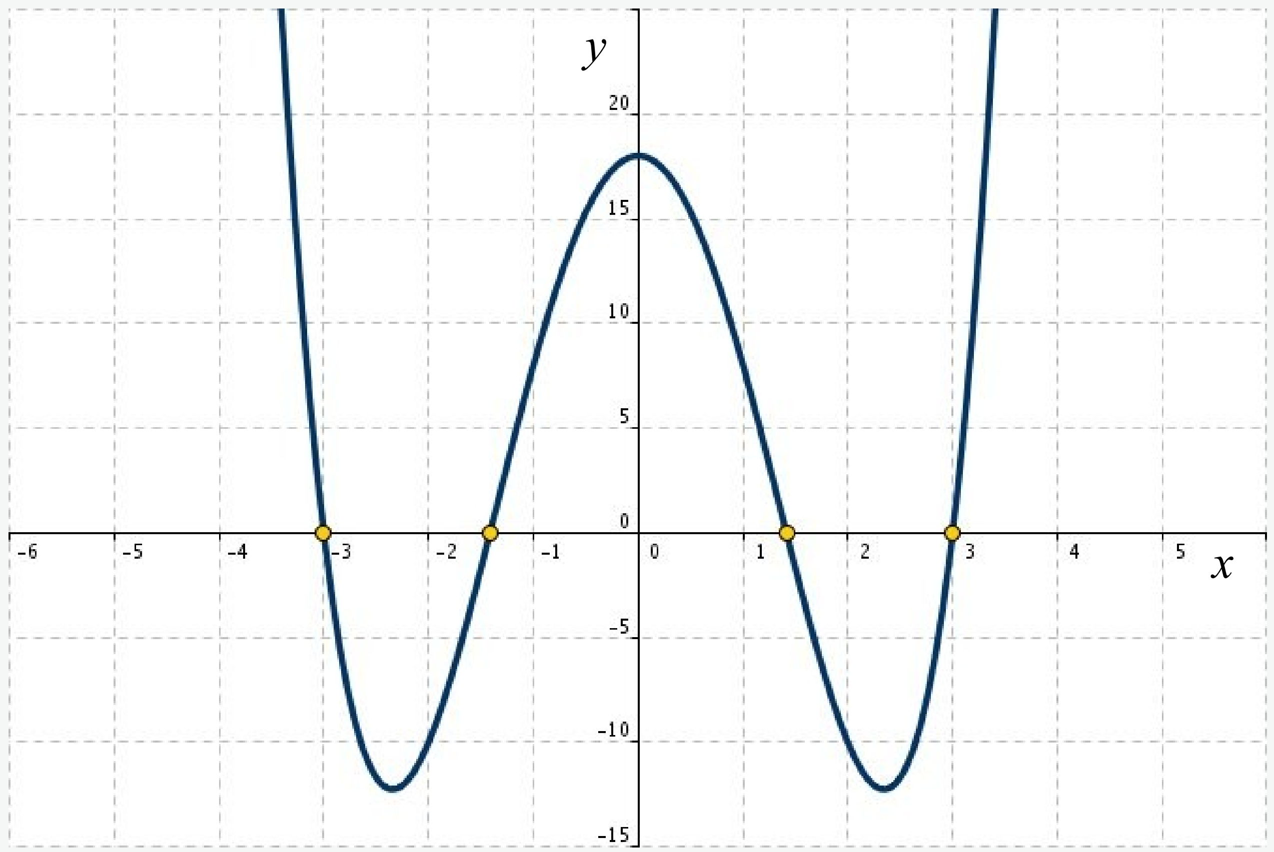
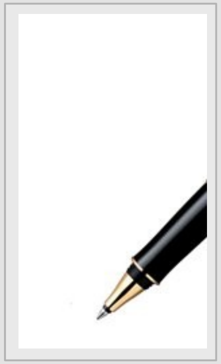


Abb. 2-3: Funktion f (x)

$$f(x) = x^4 - 11\,x^2 + 18 = 0$$

$L = \{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$ – Lösungsmenge der Gleichung

$$x^4 - 11\,x^2 + 18 = 0$$



Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Werte des Parameters a so, dass die gegebene Gleichung nur zwei reelle Lösungen hat.

$$x^4 + (3a + 1)\, x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^4 + (3a+1)\,x^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \overbrace{\rightarrow}^{z\,=\,x^2} \quad z^2 + (3a+1)\,z + \frac{1}{4} = 0$$

$$z_{1,\,2} = -\,\frac{3a+1}{2} \pm \frac{1}{2}\,\sqrt{3a\,(3a+2)}$$

$$3a\,(3a+2) = 0 \qquad : a = 0, \quad a = -\,\frac{2}{3}$$

$$x^4 + (3a+1)\,x^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \overbrace{\rightarrow}^{a\,=\,0} \quad x^4 + x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^4 + (3a+1)\,x^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \overbrace{\rightarrow}^{a\,=\,-\frac{2}{3}} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$$