Algebraische Ausdrücke

Je nachdem, wie eine Variable mit anderen Parametern oder Konstanten in einer Aufgabenstellung verknüpft ist, entstehen unterschiedliche Ausdrücke, die in Abhängigkeit der verwendeten Operationen klassifiziert werden.

Ist die Variable ausschließlich durch die Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation verknüpft, so entstehen ganze rationale Ausdrücke. Sie werden auch als Polynome bezeichnet.

Beispiel: $2x^3 + x - 7 = 2x \cdot x \cdot x + x - 7$

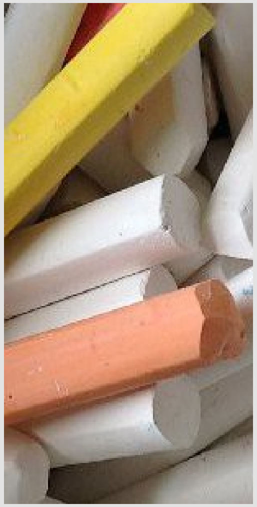
Ist auch die Division zugelassen, so erhält man gebrochen rationale Ausdrücke.

Ein algebraischer Ausdruck liegt vor, wenn auch Wurzelzeichen – angewendet auf die Variable – zulässig sind.

Addition Subtraktion Multiplikation	$\rightarrow$	**Ganzer rationaler Ausdruck** + Division	$\rightarrow$	**Gebrochen rationaler Ausdruck** + Wurzel	$\rightarrow$	

$\rightarrow$ *Algebraischer Ausdruck*

$$2\,x^2 + 3\,, \quad x^3 - 7 \quad \rightarrow \quad \frac{2\,x^2 + 3}{x^3 - 7} \quad \rightarrow \quad \sqrt{2\,x^2 + 3}$$



Definition:

Der ganze rationale Ausdruck mit der Variable x

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n x^n , \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

heißt Polynom *n-ten* Grades. a_i heißen die Koeffizienten des Polynoms; jeder einzelne Summand wird als Glied des Polynoms bezeichnet.

Der Name "Polynom" bedeutet, dass der Ausdruck aus mehreren (poly: *griechisch* viel) Gliedern besteht. Treten nur zwei Glieder auf, so heißt der Ausdruck Binom. Davon abgeleitet ist die Bezeichnung "binomische Formel" für:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

Der Exponent der Variablen bestimmt den Grad des Gliedes, der höchste Exponent – den Grad des Polynoms.

Beispiel:

Der ganze rationale Ausdruck $2 + x - 3x^2 + 6x^3$ besteht aus

– einem Glied *0-ten* Grades: 2

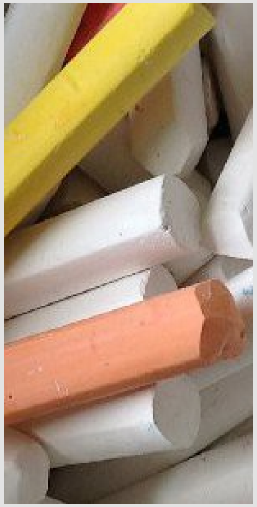
– einem Glied *1-ten* Grades: x

– einem Glied *2-ten* Grades: $-3x^2$

– einem Glied *3-ten* Grades: $6x^3$

Es handelt sich um ein Polynom *3-ten* Grades.

Falls es sich um ganze rationale Ausdrücke handelt, dürfen nur nichtnegative, ganzzahlige Exponenten vorkommen.



Bestimmen Sie den Grad des Polynoms:

1. $2\,x^2 + 7\,x - 3\,x^6$
2. $\sqrt{10\,x} - x^3$
3. $\sqrt{10} + 2\,x - x^3$
4. $(x + 4)^2$
5. $\sqrt{x} + 3\,x + x^4$
6. $\dfrac{1}{x}$
7. $x^{\frac{2}{3}} + x^2 - 12$
8. $(x + 4)^5$
9. $x^{-3} + x^2\,\sqrt{2} - 8\,x$

Der Grad des Polynoms:

1.	$2x^2 + 7x - 3x^6$	ist ein Polynom 6. Grades
2.	$\sqrt{10x} - x^3$	ist wegen der Wurzel kein Polynom
3.	$\sqrt{10} + 2x - x^3$	ist ein Polynom 3. Grades
4.	$(x + 4)^2$	ist ein Polynom 2. Grades
5.	$\sqrt{x} + 3x + x^4$	ist wegen der Wurzel kein Polynom
6.	$\dfrac{1}{x}$	ist kein Polynom
7.	$x^{\frac{2}{3}} + x^2 - 12$	ist wegen der gebrochen rationalen Exponenten kein Polynom
8.	$(x + 4)^5$	ist ein Polynom 5. Grades
9.	$x^{-3} + x^2\sqrt{2} - 8x$	ist wegen des negativen Exponenten kein Polynom

$$(x-1)\cdot(x^2+x-3) = x^3-4x+3$$

Polynome werden gliedweise multipliziert. Das Ergebnis ist wieder ein Polynom mit einem Grad, der sich aus der Summe der Grade der beiden Faktorpolynome ergibt.

Das heißt, multipliziert man ein Polynom *n-ten* Grades mit einem Polynom *m-ten* Grades, so ergibt sich ein Polynom *$(n+m)$-ten* Grades.

Gliedweise Multiplikation heißt, dass jedes Glied des einen Faktors mit jedem Glied des anderen Faktors multipliziert wird. Die Summe der Produkte ergibt das Ergebnispolynom.

$$2x^4 - 5x^2 - 12 = 0, \qquad u = x^2 \quad \rightarrow \quad 2u^2 - 5u - 12 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}, \qquad u_1 = 4, \qquad u_2 = -\frac{3}{2}$$

$$2u^2 - 5u - 12 = 2\,(u - u_2)\,(u - u_1) = (2u + 3)\,(u - 4)$$

$$2x^4 - 5x^2 - 12 = (2x^2 + 3)\,(x^2 - 4) = (2x^2 + 3)\,(x - 2)\,(x + 2)$$

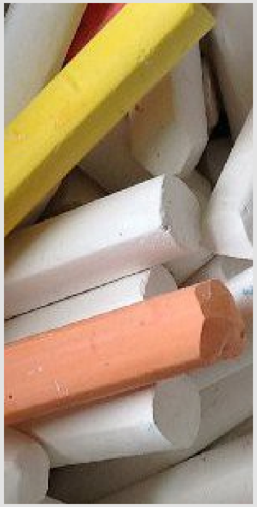
Ist ein Produkt gleich Null, so muss mindestens ein Faktor gleich Null sein !

1. Faktor: $(2x^2 + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -3/2 \quad \rightarrow$ es gibt keine reelle Lösung
2. Faktor: $(x - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$
3. Faktor: $(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$

$$2x^4 - 5x^2 - 12 = (2x^2 + 3)(x - 2)(x + 2)$$

Man mag in einer ersten Reaktion geneigt sein, dies als unnütze oder gar unsinnige Aufgabenstellung anzusehen. Die Antwort ergibt sich aus einer Fragestellung, die uns bereits im Zusammenhang mit der Bruchrechnung begegnet ist. Um zu erkennen, ob ein Bruch zu kürzen ist, muss man Nenner und Zähler in Primfaktoren zerlegen. Gemeinsame Primfaktoren kann man gegeneinander kürzen.

$$\frac{x^2 + 2x}{2x^4 - 5x^2 - 12} = \frac{x(x+2)}{(2x^2+3)(x-2)(x+2)} = \frac{x}{(2x^2+3)(x-2)}$$



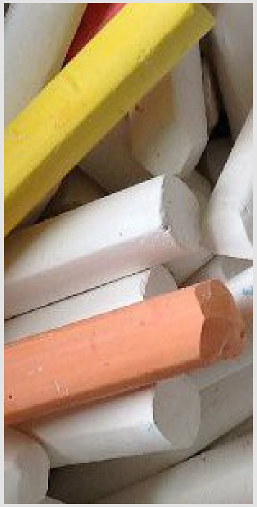
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$



Zerlege in ganzzahlige Polynomfaktoren:

1. $12\,x^3 - 27\,x$
2. $y^3 + 1$
3. $8\,x^3 + y^3 \cdot z^3$
4. $a^2 + 10\,a + 25 - 49\,b^2$
5. $32\,x^3 - 18\,x$
6. $a^3 + 2\,a^2\,b + a\,b^2 - a^2 - 2\,a\,b - b^2$

1. $12\,x^3 - 27\,x \;=\; 3\,x\,(4\,x^2 - 9) \;=\; 3\,x\,(2\,x - 3)\,(2\,x + 3)$

2. $y^3 + 1 \;=\; (y + 1)\,(y^2 - y + 1)$

3. $8\,x^3 + y^3 \cdot z^3 \;=\; (2\,x)^3 + (y \cdot z)^3 \;=\; (2\,x + y\,z)\,(4\,x^2 - 2\,x\,y\,z + y^2\,z^2)$

4. $a^2 + 10\,a + 25 - 49\,b^2 \;=\; (a + 5)^2 - (7\,b)^2 \;=\; (a + 5 - 7\,b)\,(a + 5 + 7\,b)$

5. $32\,x^3 - 18\,x \;=\; 2\,x\,(16\,x^2 - 9) \;=\; 2\,x\,((4\,x)^2 - 3^2) \;=$

   $= \; 2\,x\,(4\,x - 3)\,(2\,x + 3)$

6. $a^3 + 2\,a^2\,b + a\,b^2 - a^2 - 2\,a\,b - b^2 \;=$

   $= \; a\,(a^2 + 2\,a\,b + b^2) - (a^2 + 2\,a\,b + b^2) \;=\; a\,(a + b)^2 - (a + b)^2 \;=$

   $= \; (a - 1)\,(a + b)^2$