Vereinfachung von Brüchen

Vereinfachung von Brüchen: Aufgabe 1

In den Brüchen sollen die negativen Exponenten beseitigt werden:

$$a)\ \frac{a^{-m} \cdot b^{-n}}{c^{-p} \cdot d^{-q}}, \qquad b)\ \frac{x^{-2} + y^{-3}}{x^{-3} - y^{-2}}$$

Hinweis:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Die Regel für die Vereinfachung von Brüchen:

Kommen im Zähler (im Nenner) eines Bruches Potenzen mit negativen Exponenten als Faktoren vor, so dürfen diese Potenzen mit dem entsprechenden positiven Exponenten in den Nenner (in den Zähler) gebracht werden.

Für Potenzen mit negativen Exponenten, die in Brüchen als Summanden auftreten, lässt sich keine ebenso einfache Rechenregel angeben.

a)
$$\frac{a^{-m}\cdot b^{-n}}{c^{-p}\cdot d^{-q}} = \frac{\dfrac{1}{a^m}\cdot\dfrac{1}{b^n}}{\dfrac{1}{c^p}\cdot\dfrac{1}{d^q}} = \frac{\dfrac{1}{a^m\cdot b^n}}{\dfrac{1}{c^p\cdot d^q}} = \frac{c^p\cdot d^q}{a^m\cdot b^n}$$

Doppelbrüche können auf folgende Weise beseitigt werden:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a}} = a\,, \qquad \frac{1}{\dfrac{1}{a^n}} = a^n$$

b) Auch hier werden zuerst die Potenzen mit negativen Exponenten in Brüche umgeschrieben:

$$\frac{x^{-2}+y^{-3}}{x^{-3}-y^{-2}} = \frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^3}}{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^2}} = \frac{\dfrac{y^3+x^2}{x^2\,y^3}}{\dfrac{y^2-x^3}{x^3\,y^2}} = \frac{(y^3+x^2)}{x^2\,y^3}\cdot\frac{x^3\,y^2}{(y^2-x^3)} =$$

$$= \frac{x\,(y^3+x^2)}{y\,(y^2-x^3)}$$

a) Der Bruch $\left(\dfrac{2\,x^{-2} \cdot y^{3}}{3\,u^{-4} \cdot v^{n}} \right)^{-7}$

soll so vereinfacht werden, dass keine negativen Exponenten mehr auftreten.

b) Der Ausdruck $\left[\left[(2\,a^{0} + 3\,b^{2})^{3} \right]^{0} \right]^{-6}$

soll so weit wie möglich vereinfacht werden.

$$\left(\frac{2\,x^{-2} \cdot y^{3}}{3\,u^{-4} \cdot v^{n}} \right)^{-7}$$

Es bieten sich mehrere Lösungswege an.

So kann man zunächst den negativen Exponenten -7 beseitigen, indem man den Kehrwert des Bruches mit 7 potenziert. Auf diese Weise entsteht

$$\left(\frac{2 \cdot x^{-2} \cdot y^{3}}{3 \cdot u^{-4} \cdot v^{n}} \right)^{-7} = \left(\frac{3 \cdot u^{-4} \cdot v^{n}}{2 \cdot x^{-2} \cdot y^{3}} \right)^{7} = \left(\frac{3 \cdot x^{2} \cdot v^{n}}{2 \cdot u^{4} \cdot y^{3}} \right)^{7} = \frac{3^{7} \cdot x^{14} \cdot v^{7n}}{2^{7} \cdot u^{28} \cdot y^{21}}$$

Anderer Lösungsweg:

$$\left(\frac{2 \cdot x^{-2} \cdot y^{3}}{3 \cdot u^{-4} \cdot v^{n}} \right)^{-7} = \frac{2^{-7} \cdot x^{14} \cdot y^{-21}}{3^{-7} \cdot u^{28} \cdot v^{-7n}} = \frac{3^{7} \cdot x^{14} \cdot v^{7n}}{2^{7} \cdot u^{28} \cdot y^{21}}$$

Potenzen: Lösung 2b

$$\left[\left[(2\,a^0 + 3\,b^2)^3 \right]^0 \right]^{-6}$$

Man kann die ineinander geschachtelten Klammern von innen nach außen auflösen, aber auch von außen nach innen. Würde man von innen nach außen gehen, so müsste man zuerst das Binom in die dritte Potenz erheben, um danach von diesem Zwischenergebnis die nullte Potenz bilden zu können. Unabhängig davon, was vorher berechnet worden ist, als Ergebnis wird man 1 erhalten.

Hätte man dagegen sofort erkannt, dass hier von einem komplizierten Ausdruck die nullte Potenz berechnet werden soll, so hätte man sofort das Ergebnis notieren können.

Die gegebenen Terme bzw. Ergebnisse sind mit positiven Exponenten darzustellen:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}, \quad \left(\frac{3\,x^{-1}}{y}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{9}{4}\right)^{-3}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{1}{6}\right)^{-4}\left(\frac{2}{5}\right)^{5}$

c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}, \quad \left(\frac{2\,a^2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{6}{5\,a^3}\right)^{2}$

d) $\left(\frac{3\,x^{-2}}{2\,y}\right)^{3}\left(\frac{3\,x}{y}\right)^{-1}, \quad \left(-\frac{4\,x^3}{3^2}\right)^{-3}\left(\frac{2\,x^2}{3}\right)^{5}$

e) $\left(\frac{3^2\,x}{4\,a}\right)^{-4} : \left(\frac{16\cdot 3^{-1}\,x^{-2}}{-a^{-2}}\right)^{2}$

f) $\frac{(a+b)^0}{(a+b)^{-1}}, \quad \frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}\,, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}\,, \qquad \left(\frac{3\,x^{-1}}{y}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{x\,y}\right)^{-3} = \left(\frac{x\,y}{3}\right)^{3} = \frac{x^3\,y^3}{27}$$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{9}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{6} = \frac{16}{81}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{4}{9}\right)^{-1} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}\,, \qquad \left(\frac{1}{6}\right)^{-4}\left(\frac{2}{5}\right)^{5} = \frac{2^9\cdot 3^4}{5^5} = \frac{41472}{3125}$$

c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}\left(\frac{y}{x}\right)^{-5} = \left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\right)^{-5} = 1^{-5} = 1$

$$\left(\frac{2\,a^2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{6}{5\,a^3}\right)^{2} = \left(\frac{3}{2\,a^2}\right)^{3}\left(\frac{6}{5\,a^3}\right)^{2} = \frac{3^3\,(2\cdot 3)^2}{2^3\,5^2\,a^{12}} = \frac{3^5\,2^2}{2^3\,5^2\,a^{12}} =$$

$$= \frac{3^5}{2\cdot 5^2\,a^{12}} = \frac{243}{50\,a^{12}}$$

d) $$\left(\frac{3\,x^{-2}}{2\,y}\right)^{3}\left(\frac{3\,x}{y}\right)^{-1} = \frac{3^2}{2^3\;y^2\;x^7} = \frac{9}{8\;x^7\;y^2}$$

$$\left(-\,\frac{4\,x^3}{3^2}\right)^{-3}\left(\frac{2\,x^2}{3}\right)^{5} = -\,\frac{3\,x}{2}$$

e) $$\left(\frac{3^2\,x}{4\,a}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{16\cdot 3^{-1}\;x^{-2}}{-a^{-2}}\right)^{-2} = \left(\frac{4\,a}{3^2\,x}\right)^{4}\cdot\left(-\,\frac{a^{-2}}{16\cdot 3^{-1}\;x^{-2}}\right)^{2} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

f) $$\frac{(a+b)^0}{(a+b)^{-1}} = \frac{1}{(a+b)^{-1}} = a+b$$

$$\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} = \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{\frac{a+b}{a\,b}} = a\,b$$