*Binomischer Satz*

$$(a+b)^n =$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Binomialkoeffizienten (*"n über k"*):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (k,\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad k \leqslant n)$$

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1$$

n Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \qquad 0! = 1$

Die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

eignet sich auch zur Berechnung von $(a-b)^n$

$$(a-b)^n =$$

$$= a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 - \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + (-1)^n b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

In allen Gliedern, in denen eine ungerade Potenz von $b$ steht, erscheint ein Minuszeichen.

*Blaise Pascal*

Entwickeln Sie folgende Binome

Aufgabe 1: $(x + y)^5$

Aufgabe 2: $(x + y)^6$

Aufgabe 3: $(x - y)^3$

Aufgabe 4: $(x - y)^5$

Aufgabe 5: $(a + 2b)^5$

$$(x+y)^5 = x^5 + \binom{5}{1} x^4 \cdot y + \binom{5}{2} x^3 \cdot y^2 + \binom{5}{3} x^2 \cdot y^3 + \binom{5}{4} x \cdot y^4 + y^5$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5\,!}{1\,!\,(5-1)\,!} = \frac{5\,!}{4\,!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5\,!}{2\,!\,(5-2)\,!} = \frac{5\,!}{2\,!\;3\,!} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5\,!}{3\,!\,(5-3)\,!} = \frac{5\,!}{3\,!\;2\,!} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5\,!}{4\,!\,(5-4)\,!} = \frac{5\,!}{4\,!\;1\,!} = 5$$

$$\boxed{(x+y)^5 = x^5 + 5\,x^4 \cdot y + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 5 \cdot x \cdot y^4 + y^5}$$

$$(x + y)^6 =$$

$$= x^6 + \binom{6}{1} x^5 \cdot y + \binom{6}{2} x^4 \cdot y^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot y^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot y^4 + \binom{6}{5} x \cdot y^5 + y^6$$

$$\binom{6}{1} = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\;4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6!}{3!\;3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\;2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = \frac{6!}{5!} = 6$$

$$(x + y)^6 = x^6 + 6\; x^5 \cdot y + 15 \cdot x^4 \cdot y^2 + 20 \cdot x^3 \cdot y^3 + 15 \cdot x^2 \cdot y^4 + 6\; x \cdot y^5 + y^6$$

Lösung 3: $(x - y)^3 = x^3 - 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 - y^3$

Lösung 4: $(x - y)^5 =$

$$= x^5 - 5\,x^4 \cdot y + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 - 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 5 \cdot x \cdot y^4 - y^5$$

Lösung 5: $(a + 2\,b)^5 =$

$$= a^5 + \binom{5}{1} a^4 \cdot (2\,b) + \binom{5}{2} a^3 \cdot (2\,b)^2 + \binom{5}{3} a^2 \cdot (2\,b)^3 +$$

$$+ \binom{5}{4} a \cdot (2\,b)^4 + (2\,b)^5 = a^5 + 5\,a^4 \cdot (2\,b) + 10\,a^3 \cdot (2\,b)^2 +$$

$$+ 10\,a^2 \cdot (2\,b)^3 + 5\,a \cdot (2\,b)^4 + (2\,b)^5 = a^5 + 10\,a^4 \cdot b + 40\,a^3 \cdot b^2 +$$

$$+ 40\,a^3 \cdot b^2 + 80\,a^2 \cdot b^3 + 80\,a \cdot b^4 + 32\,b^5$$

$$(a + 2\,b)^5 = a^5 + 10\,a^4 \cdot b + 40\,a^3 \cdot b^2 + 40\,a^3 \cdot b^2 + 80\,a^2 \cdot b^3 +$$

$$+ 80\,a \cdot b^4 + 32\,b^5$$