$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomischer Satz

Einer der zentralen Begriffe der Algebra ist der Term.

Definition:

Eine sinnvoll verknüpfte mathematische Zeichenreihe bezeichnet man als Term. Auch eine einzelne Zahl oder eine einzelne Variable kann ein Term sein.

Terme ohne Variablen sind z.B.:

$1 \qquad 19 + 27 \qquad 12 : 5$

Terme mit Variablen sind z.B.:

$x \qquad 1 + x \qquad 5\,x - 3 \qquad 7x \;+ b$

Kein Term ist z.B.:

$2 = 7$

Verschiedene Arten von Termen:

Terme mit gleichen Variablen bezeichnet man als gleichartige Terme, z.B.:

$4\,x^2$	$3\,x^2$	$0.02\,x^2$

Verschiedenartige Terme weisen keine gleichen Variablen auf, z.B.:

$2\,x^2\,y$	$3\,a\,b$	z^4

Es gibt Terme, die aus anderen Termen zusammengesetzt sind, z.B.:

$$2\,x + 3\,x\,y + 7\,a^2 - 5\,a\,y^3$$

Viele berühmte mathematische Formeln sind nach ihrem Entdecker benannt – wie z.B. der Satz des Pythagoras. Bei den binomischen Formeln ist das anders, sie stammen nicht von einem ominösen Herrn Binom, sondern tragen ihren Namen wegen der speziellen Terme, die Gegenstand dieser Formeln sind, den sogenannten Binomen.

Ein Binom ist ein Term, der aus zwei Gliedern besteht.

Einige Beispiele für Binome sind

$$a + b\,, \qquad 2\,a - 7\,b\,, \qquad x - 4\,y$$

Weiterhin kann man Binome nach ihrem Grad unterscheiden. Der Grad eines Binoms entspricht dabei dem Exponenten seiner äußeren Klammern. $(a - b)$ ist ein Binom ersten Grades, $(x + y)^2$ ein Binom zweiten Grades usw. Je höher der Grad eines Binoms wird, desto komplizierter gestaltet sich seine Berechnung.

Berühmte Binome zweiten Grades, die als erste, zweite und dritte binomische Formeln bekannt sind:

erste binomische Formel

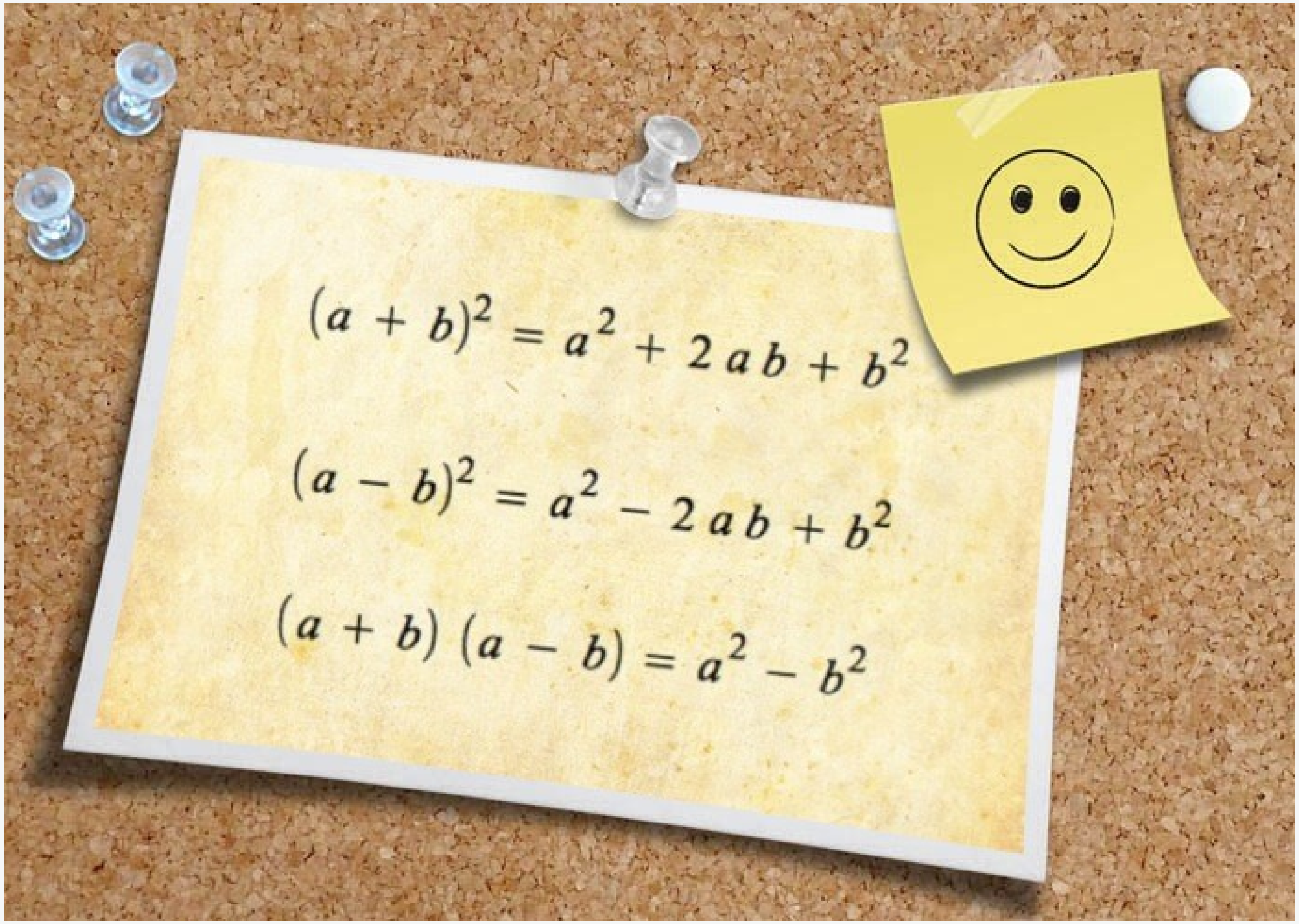
$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

zweite binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

dritte binomische Formel

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$


$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

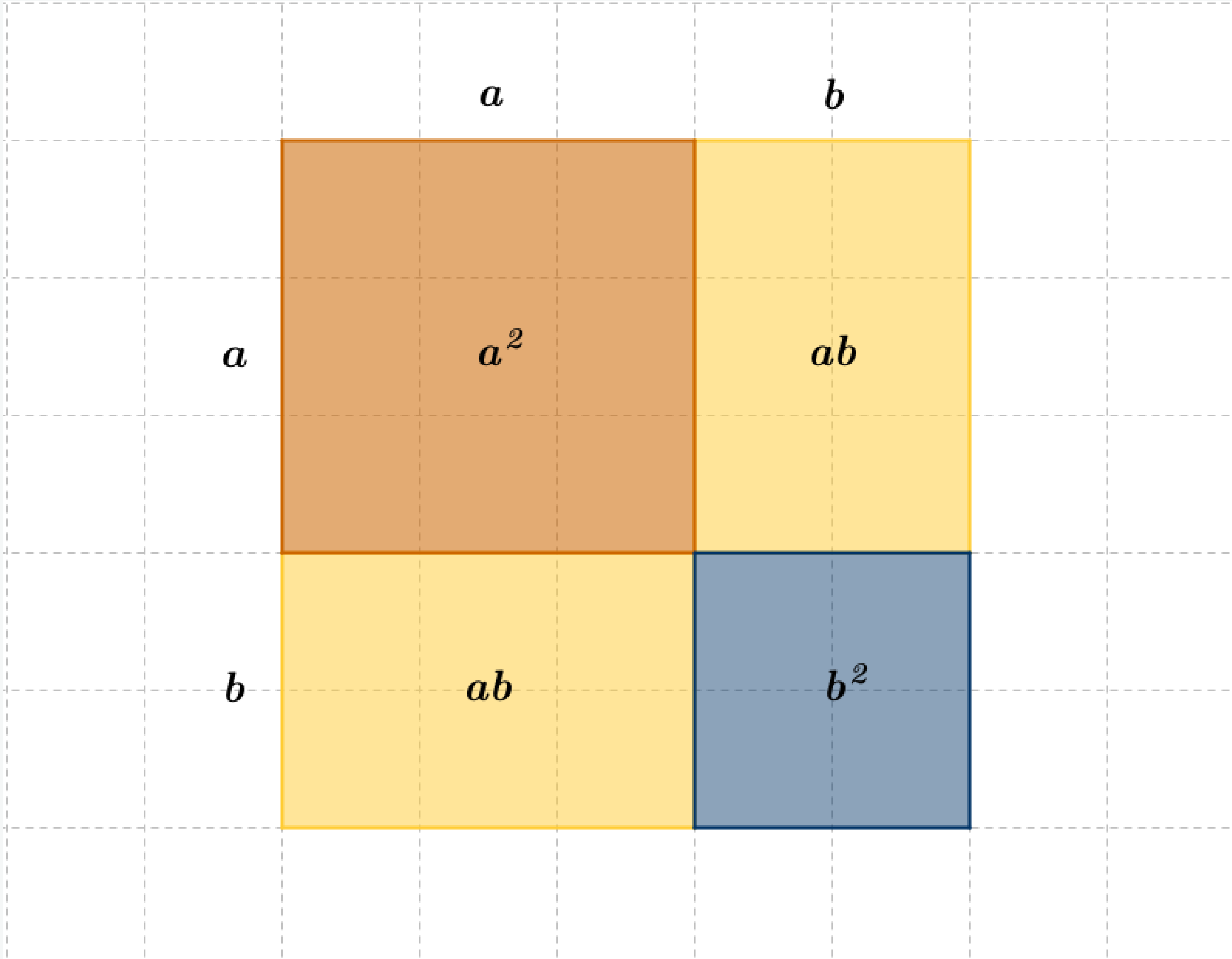


Abb.1: Graphische Darstellung der ersten binomischen Formel

Die Richtigkeit der ersten binomischen Formel kann auch graphisch dargestellt und nachgewiesen werden.

Es soll eine Formel für $(a + b)^n$ mit beliebigem n aufgestellt werden. Für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ ergibt sich nach dem Start mit $n = 0$ und Multiplikation des Ergebnisses jeweils mit $a + b$:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

Die Faktoren, die vor den einzelnen Termen stehen, die aus a bzw. b und den zugehörigen Potenzen bestehen, werden als Binomialkoeffizienten bezeichnet.

Wir schreiben als Beispiel das Binom 4. Grades ausführlicher aus:

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= a^4 b^0 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + a^0\,b^4 \\ &= a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4\end{aligned}$$

Einiges fällt schnell auf:

1) Die höchsten Exponenten entsprechen dem Grad des Binoms

2) a fängt mit dem höchsten Exponenten an. Er verringert sich mit jedem Teilterm um *1*, bis er den Wert *0* erreicht hat.

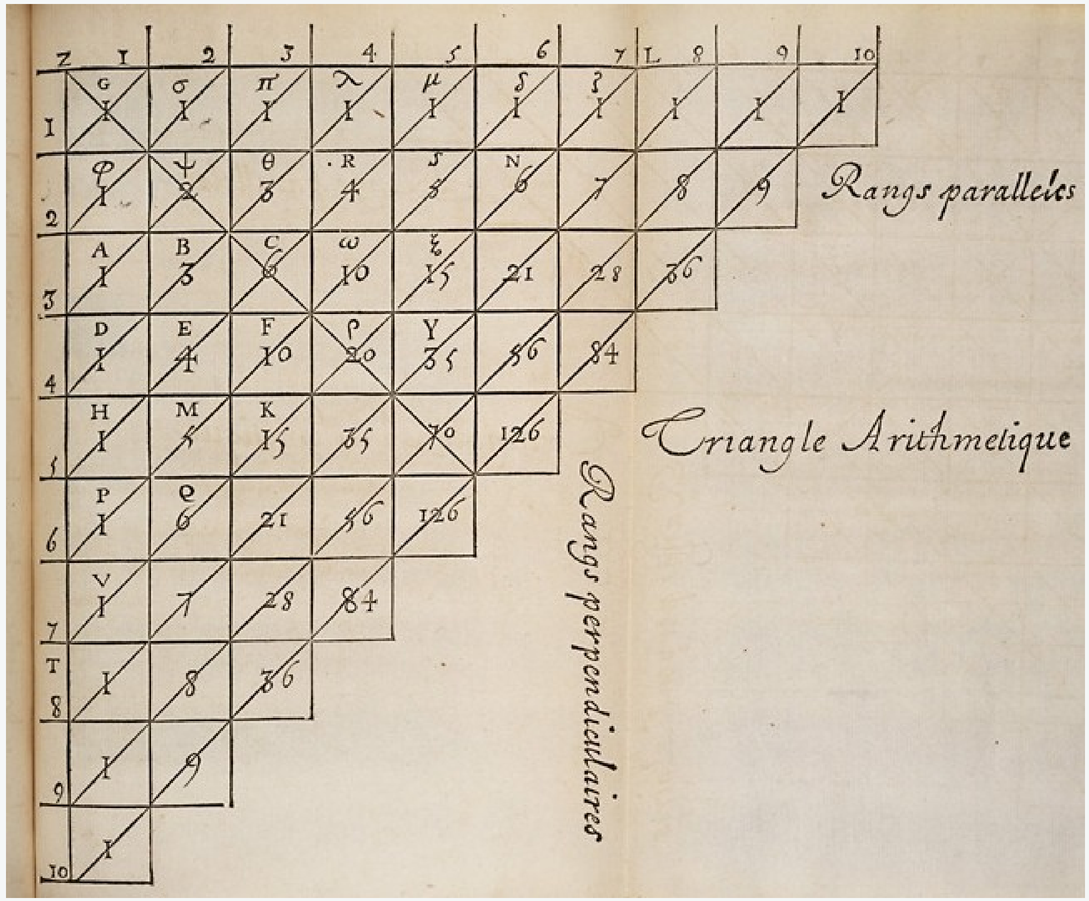
3) Mit b verhält es sich genau umgekehrt.

Diese Gesetzmäßigkeiten sind allgemeingültig.

Jetzt wenden wir uns den Binomialkoeffizienten, den Ausdrücken, die vor a und b stehen, zu. Wenn man sie untereinader schreibt, ergibt sich ein Dreieck. Die Zahlen in diesem Dreieck sind nicht vom Himmel gefallen, sondern folgen einer ganz bestimmten Regelmäßigkeit. An der Spitze steht eine 1, und auch die jeweils erste und letzte Zahl in einer Reihe ist eine 1. Die anderen Zahlen ergeben sich dann aus der Addition der schräg über ihnen stehenden Zahlen – und schon ist das Pascalsche Dreieck fertig.

Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal, ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/66/TrianguloPascal.jpg

Abb.3 : Blaise Pascals Version des Dreiecks

Entwickeln Sie folgende Binome

Aufgabe 1:

$a)\ (3+x)^2, \quad (1-z)^2, \quad (4-5x)^2, \quad (6-3x)^2$

$b)\ (2x+y)^2, \quad (x-3y)^2, \quad (7x-5y)^2$

$c)\ (11+2x)^2, \quad (9x-3y)^2, \quad (5a-6y)^2$

Aufgabe 2:

$a)\ (a+b)(x+y)^2, \quad (2-3u)(u-v)^2, \quad (a-2b)(2a-b)^2$

$b)\ (x-3y)(3x+y)^2, \quad (1-2z)(z-2z^2)^2$

Aufgabe 3: $(5a+2b)^2, \quad (3x-xy)^2, \quad (ax-a^2y)^2$

Aufgabe 4:

$a)\ (1+2a-x)^2, \quad (2-4b-3x)^2, \quad (3-3x+x^2)^2$

$b)\ (1-3a-b+2x^2)^2, \quad (2-ax+bx-x^3)^2$

$c)\ (2(a-5b)-x^2y)^2, \quad (a-ab-3b^2+abx)^2$

$a)\quad (3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$

$(1 - z)^2 = 1 - 2z + z^2$

$(4 - 5x)^2 = 16 - 40x + 25x^2$

$$(6 - 3x)^2 = (3(2 - x))^2 = 9(2 - x)^2 = 9(4 - 4x + x^2) =$$
$$= 36 - 36x + 9x^2$$

$b)\quad (2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

$(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

$(7x - 5y)^2 = 49x^2 - 70xy + 25y^2$

$c)\quad (11 + 2x)^2 = 11^2 + 2 \cdot 11 \cdot 2x + (2x)^2 = 121 + 44x + 4x^2$

$(9x - 3y)^2 = (9x)^2 - 2 \cdot 9x \cdot 3y + (3y)^2 = 81x^2 - 54xy + 9y^2$

$(5a - 6y)^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 6y + (6y)^2 = 25a^2 - 60ay + 36y^2$

$a)\ \ (a+b)\,(x+y)^2 =$

1) Binomische Formel anwenden

$$= (a+b)\,(x^2+2\,x\,y+y^2) =$$

2) Klammern ausmultiplizieren

$$= a\,x^2 + 2\,a\,x\,y + a\,y^2 + b\,x^2 + 2\,b\,x\,y + b\,y^2$$

Oder man kann zunächst so vorgehen:

$$(a+b)\,(x+y)^2 = a(x+y)^2 + b(x+y)^2$$

$$(2-3\,u)\,(u-v)^2 = (2-3\,u)\,(u^2-2\,u\,v+v^2) =$$

$$= -2\,u^3 + 4\,u^2 v + 2\,u^2 - 2\,u\,v^2 - 4\,u\,v + 2\,v^2$$

$$(a-2\,b)\,(2\,a-b)^2 = 4\,a^3 - 12\,a^2 b + 9\,a\,b^2 - 2\,b^3$$

$b)\ (x - 3y)(3x + y)^2 =$

$= 9x^3 - 21x^2 y - 17xy^2 - 3y^3$

$(1 - 2z)(z - 2z^2)^2 =$

$= -8z^5 + 12z^4 - 6z^3 + z^2 = z^2(-8z^3 + 12z^2 - 6z + 1)$

Man kann auch zuerst z in der zweiten Klammer faktorisieren:

$(1 - 2z)(z - 2z^2)^2 = (1 - 2z)(z(1 - 2z))^2 = z^2(1 - 2z)^3 =$

und die Binomische Formel

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

für $a = 1$ und $b = -2z$ anwenden

$= z^2(-8z^3 + 12z^2 - 6z + 1)$

$$(5a + 2b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 2b + (2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$$

$$\begin{aligned}(3x - xy)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot xy + (xy)^2 = 9x^2 - 6x^2y + x^2y^2 \\ &= x^2(9 - 6y + y^2)\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebniss bekommt man, wenn man das Binom zuerst in Form eines Produkts darstellt: $3x - xy = x(3 - y)$:

$$(3x - xy)^2 = (x(3 - y))^2 = x^2(3 - y)^2 = x^2(9 - 6y + y^2)$$

$$\begin{aligned}(ax - a^2y)^2 &= (a(x - ay))^2 = a^2(x - ay)^2 = \\ &= a^2(x^2 - 2 \cdot x \cdot ay + (ay)^2) = a^2(x^2 - 2axy + a^2y^2)\end{aligned}$$

a) $(1+2a-x)^2 = 1+4a^2+x^2-4ax+4a-2x$

$(2-4b-3x)^2 = 4+16b^2+9x^2+24bx-16b-12x$

$(3-3x+x^2)^2 = 9+x^4+6x^3+3x^2-18x$

b) $(1-3a-b+2x^2)^2 =$

$= 9a^2+6ab-12ax^2-6a+b^2-4bx^2-2b+4x^4+4x^2+1$

$(2-ax+bx-x^3)^2 =$

$= a^2x^2-2abx^2+2ax^4-4ax+b^2x^2-2bx^4+4bx+x^6-4x^3+4$

c) $(2(a-5b)-x^2y)^2 =$

$= 4a^2-40ab-4ax^2y+100b^2+20bx^2y+x^4y^2$

$(a-ab-3b^2+abx)^2 = a^2b^2x^2-2a^2b^2x+a^2b^2+$

$+2a^2bx-2a^2b+a^2-6ab^3x+6ab^3-6ab^2+9b^4$

Aufgabe 5: Entwickeln Sie folgende Binome

$a)\ \ (2+\sqrt{3}\,)^2, \qquad (3-\sqrt{2}\,)^2, \qquad (2-3\sqrt{5}\,)^2$

$b)\ \ (3+\sqrt{x}\,)^2, \qquad (5-\sqrt{x}\,)^2, \qquad (2+3\sqrt{x}\,)^2$

$c)\ \ (7+\sqrt{2x}\,)^2, \qquad (3-\sqrt{3x}\,)^2, \qquad (6+\sqrt{2x}\,)^2$

$d)\ \ (7+3\sqrt{7x}\,)^2, \qquad (x-\sqrt{3x}\,)^2, \qquad (x+3\sqrt{2x}\,)^2$

Aufgabe 6: Schreiben Sie die folgenden Brüche so um, dass keine Wurzel im Nenner steht, z.B.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$a)\ \ \dfrac{3}{4+\sqrt{3}}, \qquad b)\ \ \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}, \qquad c)\ \ \dfrac{5}{4-\sqrt{2x}}$

$a)$ $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 4\cdot\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\cdot\sqrt{3}$

$\left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 11 - 6\sqrt{2}\,, \qquad \left(2-3\sqrt{5}\right)^2 = 49 - 12\sqrt{5}$

$b)$ $\left(3+\sqrt{x}\right)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 9 + 6\sqrt{x} + x$

$\left(5-\sqrt{x}\right)^2 = 25 + x - 10\sqrt{x}$

$\left(2+3\sqrt{x}\right)^2 = 4 + 9x + 12\sqrt{x}$

$c)$ $\left(7+\sqrt{2x}\right)^2 = 49 + 2x + 14\sqrt{2x}$

$\left(3-\sqrt{3x}\right)^2 = 9 + 3x - 6\sqrt{3x}$

$\left(6+\sqrt{2x}\right)^2 = 36 + 2x + 12\sqrt{2x}$

$d)$ $\left(7+3\sqrt{7x}\right)^2 = 49 + 63x + 42\sqrt{7x}$

$\left(x-\sqrt{3x}\right)^2 = x^2 + 3x - 2x\sqrt{3x}$

$\left(x+3\sqrt{2x}\right)^2 = x^2 + 18x + 6x\sqrt{2x}$

In den Rechnungen werden wir die dritte binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

in folgender Form benutzen:

$$\left(a + \sqrt{b}\,\right)\left(a - \sqrt{b}\,\right) = a^2 - \left(\sqrt{b}\,\right)^2 = a^2 - b$$

$a)$ $$\frac{3}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{3\left(4 - \sqrt{3}\,\right)}{4^2 - \left(\sqrt{3}\,\right)^2} = \frac{3\left(4 - \sqrt{3}\,\right)}{16 - 3} = \frac{3\left(4 - \sqrt{3}\,\right)}{13}$$

$b)$ $$\frac{1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{5}\,\right)$$

$c)$ $$\frac{5}{4 - \sqrt{2x}} = \frac{5\left(4 + \sqrt{2x}\,\right)}{16 - 2x}$$