

Logarithmieren Sie folgende Funktionen und stellen Sie sie in einer möglichst einfachen Form dar:

$$1) \quad f(x) = \sqrt{x \sqrt{x}}, \quad g(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} \sqrt[4]{x^2}}$$

$$2) \quad f(x) = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}, \quad g(x) = \sqrt{x \sqrt{x^3 \sqrt{x^5}}}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$$

Lösen Sie folgende logarithmische Gleichung:

Aufgabe 8: $\frac{\lg(x+1)}{\lg 4 - \lg 2} = 2$

$$1) \quad f(x) = \sqrt{x \sqrt{x}}, \quad \ln f(x) = \frac{3}{4} \ln x$$

$$g(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} \sqrt[4]{x^2}}, \quad \ln g(x) = \frac{1}{3} \ln x$$

$$2) \quad f(x) = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}, \quad \ln f(x) = \frac{7}{8} \ln x$$

$$g(x) = \sqrt{x \sqrt{x^3 \sqrt{x^5}}}, \quad \ln g(x) = \frac{15}{8} \ln x$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad \ln f(x) = \ln x - \ln(x - 1) - \ln(x + 1)$$

$$g(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}, \quad \ln g(x) = \ln 3 + \ln x - \ln(2x - 1) - \ln(2x + 1)$$

$$G \quad : \quad \frac{\lg(x+1)}{\lg 4 - \lg 2} = 2$$

$$D(G) = D(\lg(x+1)) = (-1, \infty)$$

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg 4 - \lg 2} = \frac{\lg(x+1)}{2 \lg 2 - \lg 2} = \frac{\lg(x+1)}{\lg 2} = 2$$

$$\lg(x+1) = 2 \lg 2 = \lg 4, \quad x+1 = 4, \quad x = 3$$

$$x = 3 \in D(G)$$

Logarithmische Gleichung: Lösung 8

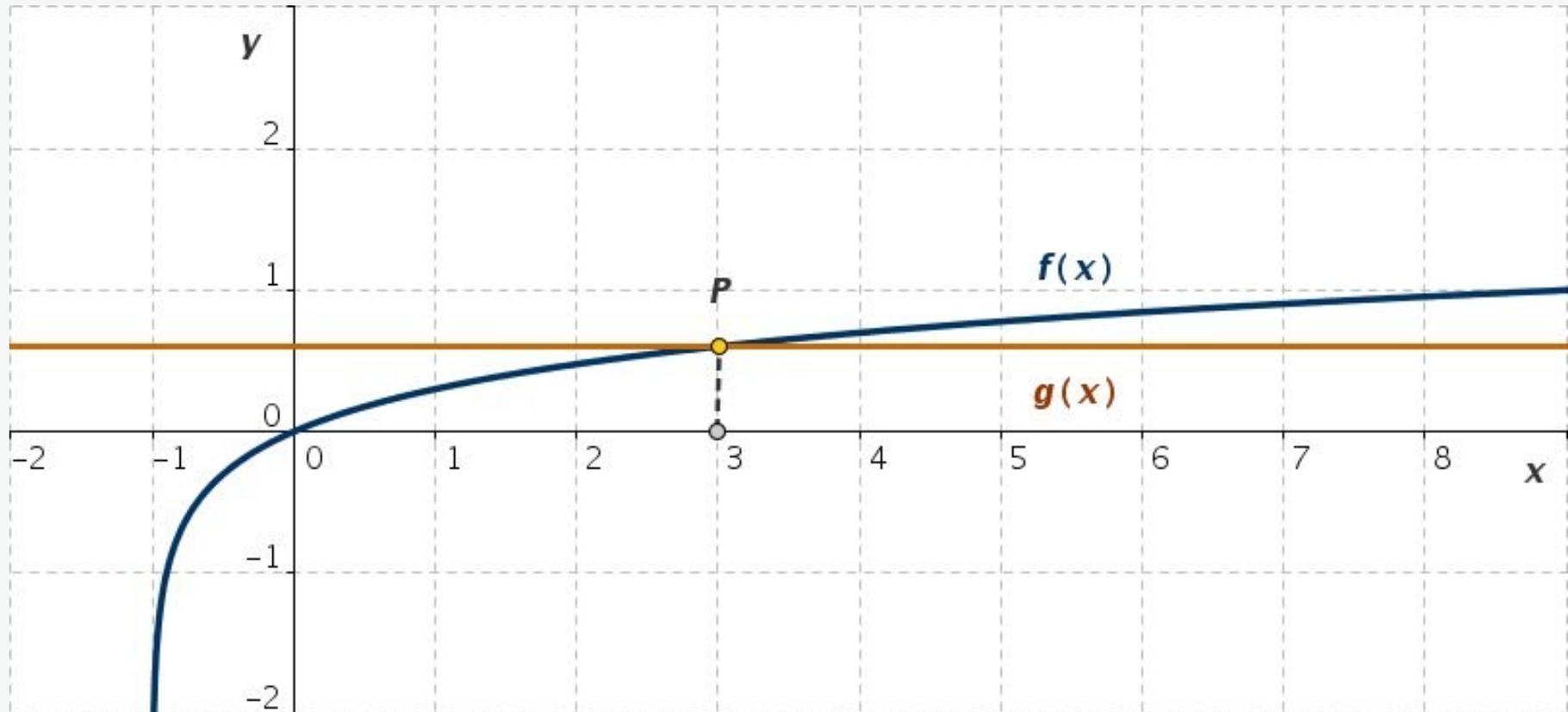
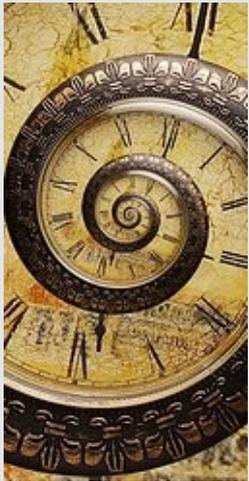


Abb. L8: Graphische Lösung der logarithmischen Gleichung

$$f(x) = \lg(x + 1), \quad g(x) = \lg 4$$

$$G : \lg(x + 1) = \lg 4, \quad D(G) = (-1, \infty)$$

Die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich im Punkt $P = (3, \lg 4)$.



Lösen Sie folgende logarithmischen Gleichungen:

Aufgabe 9:
$$\lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$$

Aufgabe 10:

$$\lg(\sqrt{1+x}) + 3\lg(\sqrt{1-x}) = \lg(\sqrt{1-x^2}) + 2$$

Aufgabe 11:

$$\lg\sqrt{5x-4} + \lg\sqrt{x+1} = 2 + \lg 0.18$$

Logarithmische Gleichung: Lösung 9

$$G : \lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg \frac{1}{2} - \lg x$$

$$D\left(\lg\left(\frac{1}{2} + x\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right), \quad D(\lg x) = (0, \infty) \Rightarrow D(G) = (0, \infty)$$

$$G : \lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg \frac{1}{2} - \lg x, \quad \lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg \frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} + x = \frac{1}{2x} \quad (\times 2x), \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad : x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad : x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = -1 \notin D(G), \quad x_2 = \frac{1}{2} \in D(G)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \text{ - ist die Lösung der Gleichung } G$$

Logarithmische Gleichung: Lösung 9

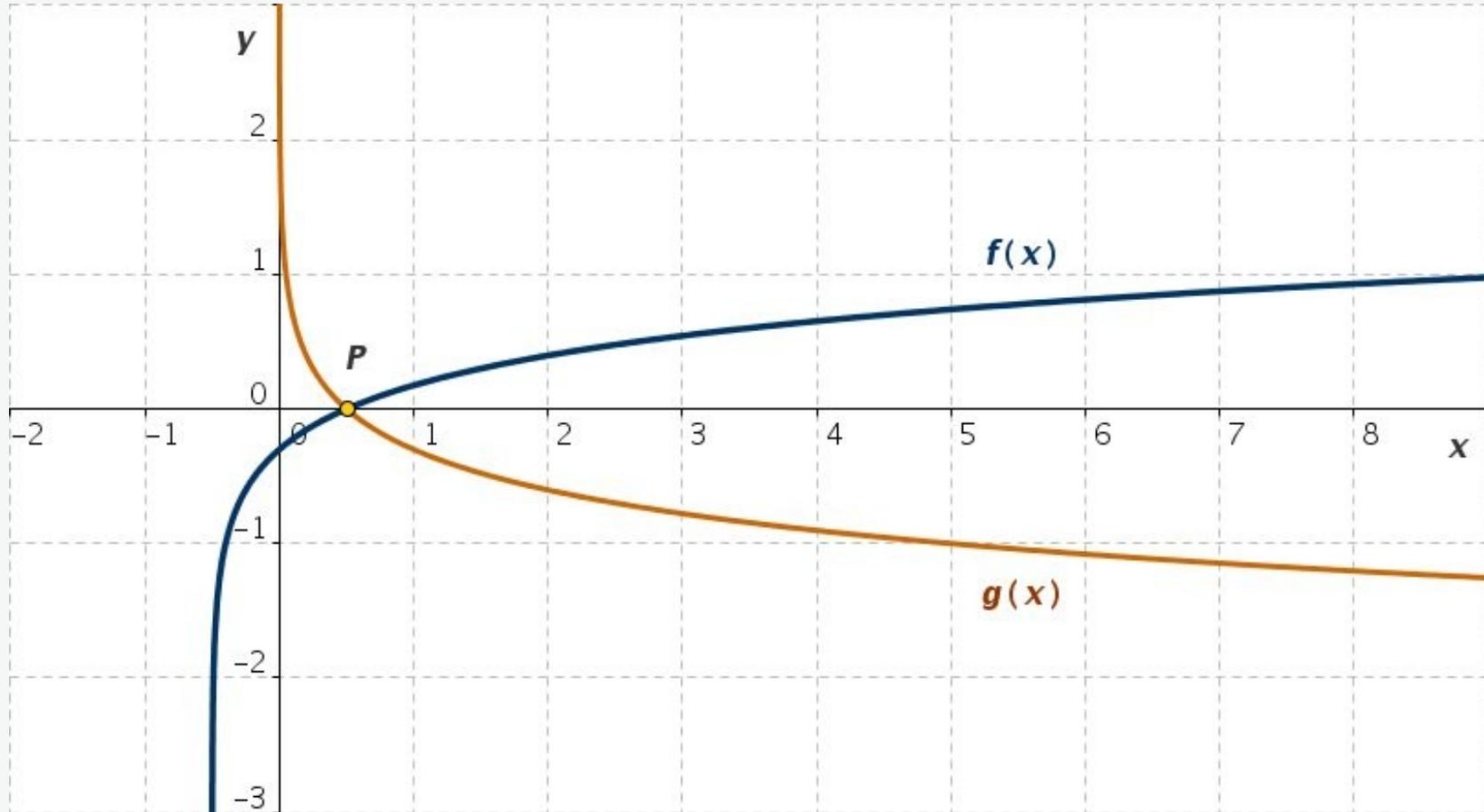


Abb. L9: Graphische Lösung der logarithmischen Gleichung

$$G : \lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x, \quad D(G) = (0, \infty)$$

$$f(x) = \lg\left(\frac{1}{2} + x\right), \quad g(x) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$$

Die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich im Punkt $P = (1/2, 0)$.

Logarithmische Gleichung: Lösung 10

$$G : \lg(\sqrt{1+x}) + 3 \lg(\sqrt{1-x}) = \lg(\sqrt{1-x^2}) + 2$$

$$D(\lg(\sqrt{1+x})) = (-1, \infty), \quad D(\lg(\sqrt{1-x})) = (-\infty, 1)$$

$$D(\lg \sqrt{1-x^2}) = (-1, 1)$$

$$D(G) = (-1, \infty) \cap (-\infty, 1) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$$

$$G : \frac{1}{2} \lg(1+x) + \frac{3}{2} \lg(1-x) = \frac{1}{2} \lg(1-x^2) + 2$$

$$G : \lg(1+x) + 3 \lg(1-x) = \lg(1-x^2) + 4$$

$$\lg(1-x^2) = \lg(1-x)(1+x) = \lg(1-x) + \lg(1+x)$$

$$\lg(1+x) + 3 \lg(1-x) = \lg(1+x) + \lg(1-x) + 4$$

$$2 \lg(1-x) = 4, \quad \lg(1-x) = 2 = \lg 100$$

$$G : \lg(1-x) = 2 = \lg 100 \Rightarrow 1-x = 100 \Rightarrow x = -99$$

$$x = -99 \notin D(G)$$

Diese Gleichung hat keine reelle Lösung

Logarithmische Gleichung: Lösung 10

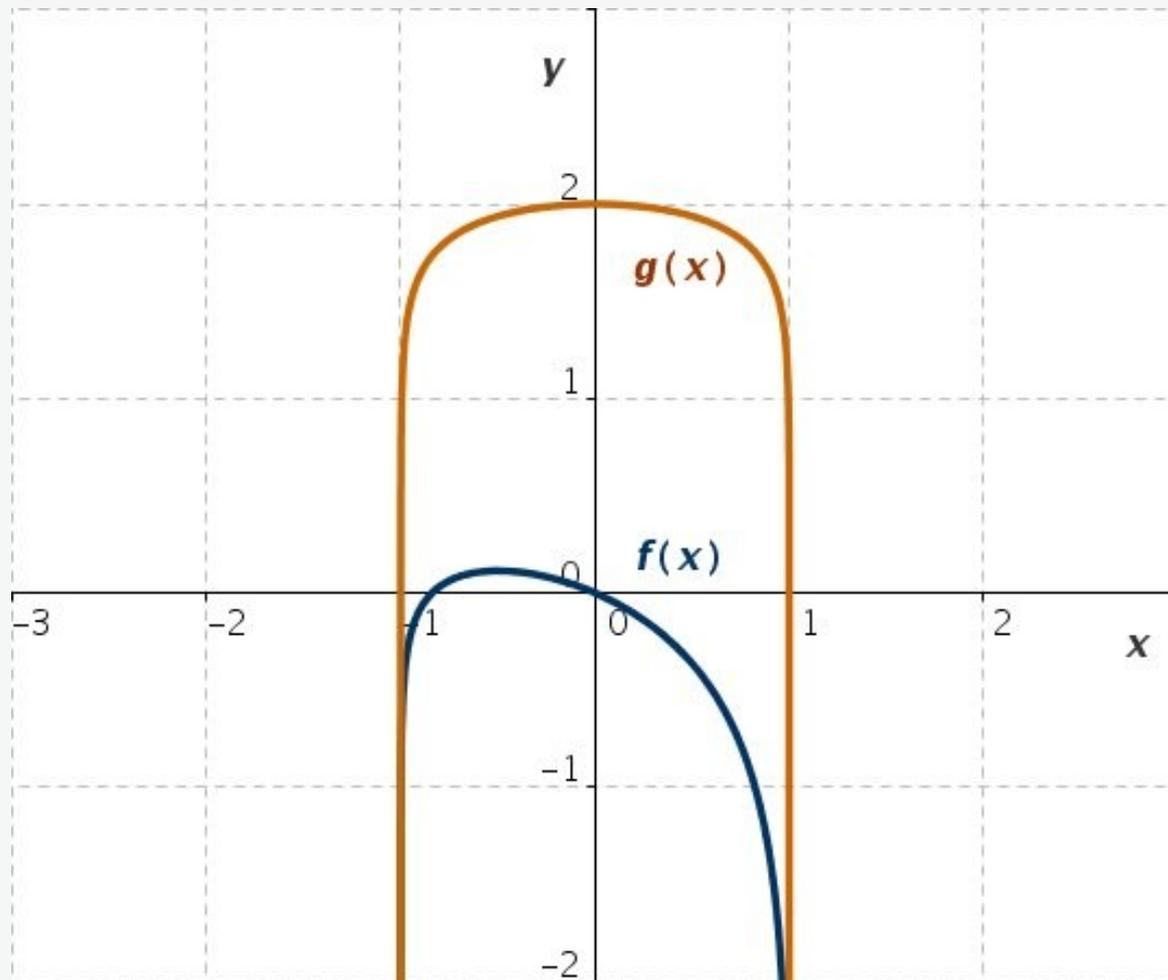


Abb. L10: Zur graphischen Lösung der logarithmischen Gleichung: die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt

$$G \quad : \lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$$

$$f(x) = \lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x}, \quad g(x) = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$$

Logarithmische Gleichung: Lösung 11

$$G : \lg \sqrt{5x - 4} + \lg \sqrt{x + 1} = 2 + \lg 0.18$$

$$D(\lg \sqrt{5x - 4}) = \left(\frac{4}{5}, \infty\right), \quad D(\lg \sqrt{x + 1}) = (-1, \infty)$$

$$D(G) = \left(\frac{4}{5}, \infty\right) \cap (-1, \infty) = \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$$

$$G : \frac{1}{2} \lg(5x - 4) + \frac{1}{2} \lg(x + 1) = 2 + \lg 0.18$$

$$\lg 0.18 = \lg(18 \cdot 10^{-2}) = \lg(18) - 2 \lg 10 = \lg(18) - 2$$

$$G : \lg[(5x - 4)(x + 1)] = 2 \lg 18 = \lg 18^2$$

$$(5x - 4)(x + 1) = 18^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 + x - 328 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 81}{10}, \quad x_1 = -\frac{41}{5}, \quad x_2 = 8$$

$$x_1 = -\frac{41}{5} \notin D(G), \quad x_2 = 8 \in D(G)$$

$x_2 = 8$ - ist die Lösung der Gleichung G

Logarithmische Gleichung: Lösung 11

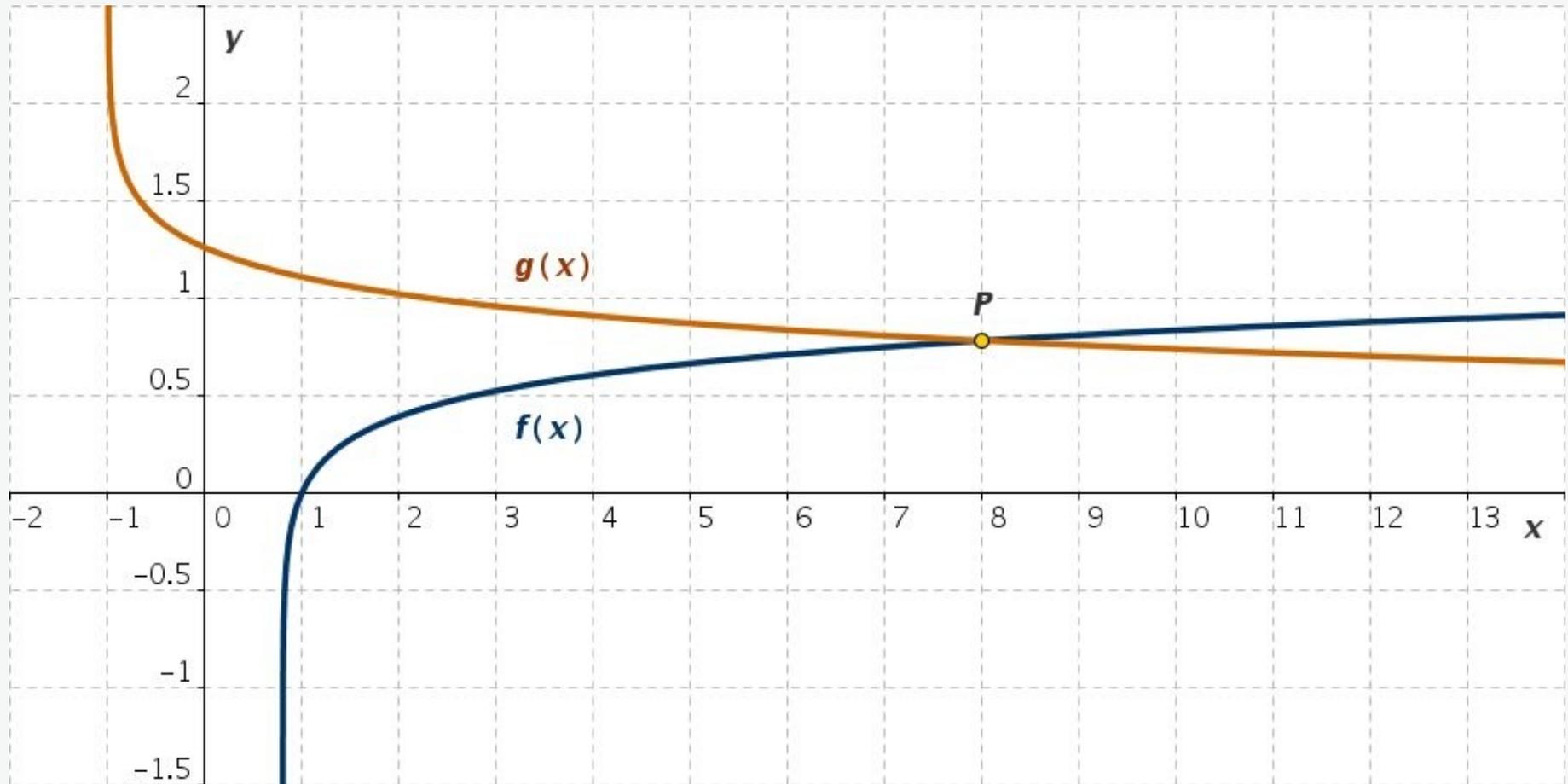


Abb. L11: Graphische Lösung der logarithmischen Gleichung

$$G : \lg \sqrt{5x - 4} + \lg \sqrt{x + 1} = 2 + \lg 0.18, \quad D(G) = \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$$

$$f(x) = \lg \sqrt{5x - 4}, \quad g(x) = 2 + \lg 0.18 - \lg \sqrt{x + 1}$$

Die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich im Punkt $P = (8, \lg 6)$.