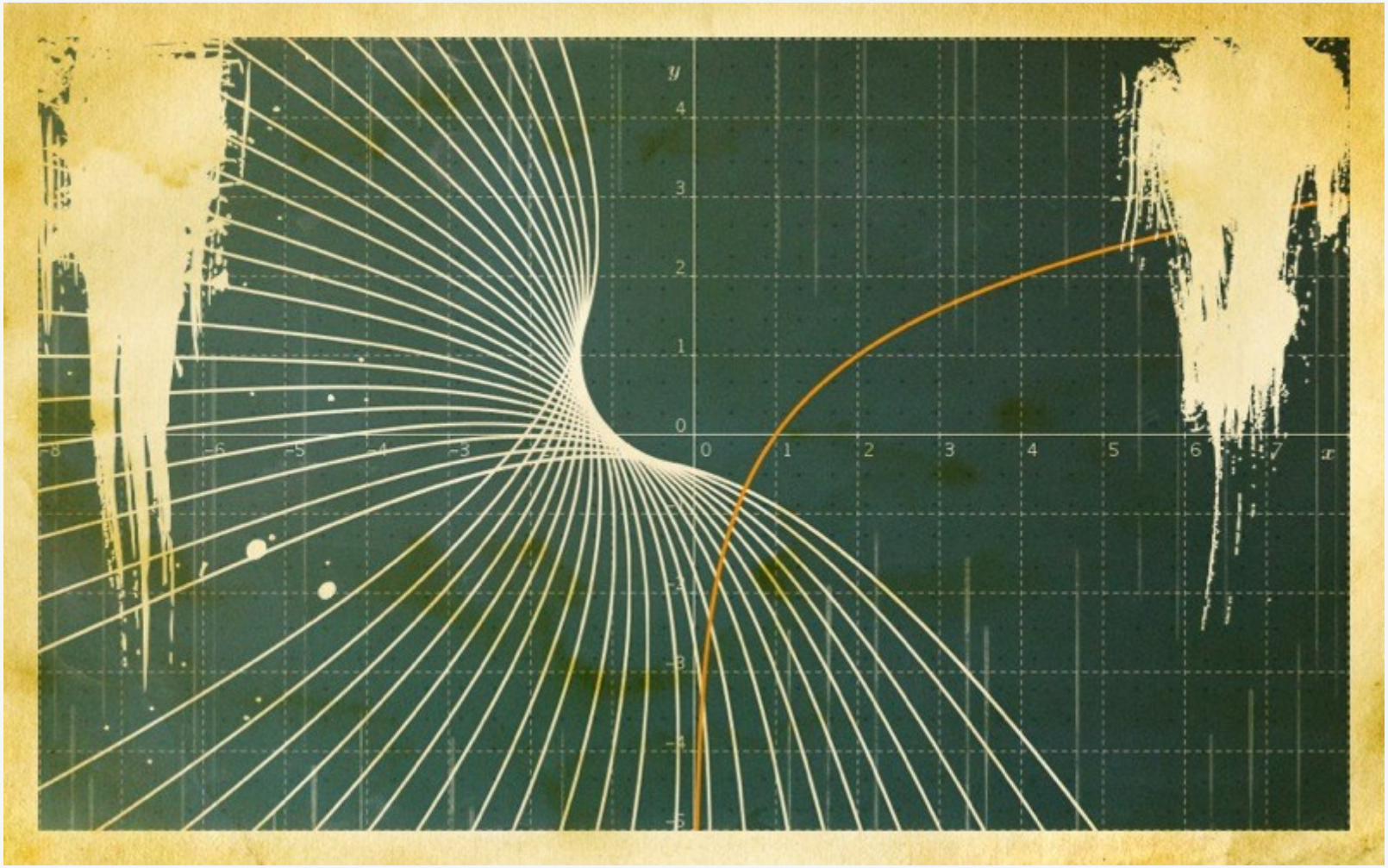
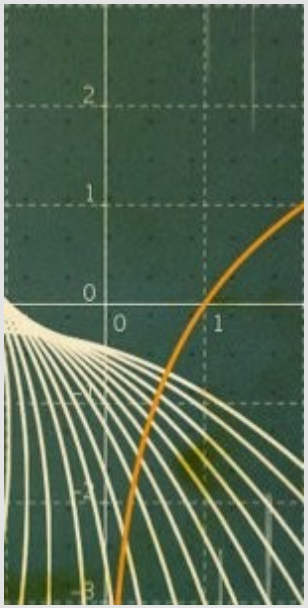


Der Logarithmus als Umkehrung der Exponentiation

y
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
0
1
2
$y = \log_2(x)$
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7



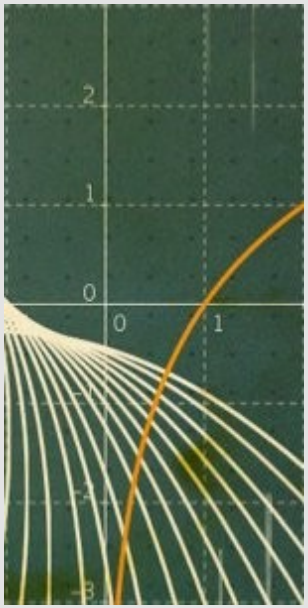
Umkehrfunktion:

- Welche Funktionen haben eine Umkehrfunktion ?
- Warum sind Umkehrfunktionen so wichtig?

Exponentialfunktion:

- Definition der Exponentialfunktion mit ihren Eigenschaften.

Was wollen wir am Ende dieses Teils verstanden haben ?



- Wie der Logarithmus als mathematisches Instrument eingesetzt wird,
- dass die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist,
- welche Eigenschaften die Logarithmusfunktion hat,
- wie einfache logarithmische Terme berechnet werden.

Finden Sie die Lösung folgender algebraischen Gleichungen:

1) $x^2 = 4,$ 2) $\sqrt{x} = 2.$

1) Um diese quadratische Gleichung zu lösen, ziehen wir die Wurzel aus beiden Seiten der Gleichung, oder wir stellen die Gleichung als Produkt von zwei linearen Faktoren dar:

$$x^2 = 4, \qquad x = \pm\sqrt{4}, \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 2,$$

$$x^2 = 4, \qquad x^2 - 4 = 0, \qquad (x-2)(x+2) = 0, \qquad x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

2) Um die Wurzelgleichung zu lösen, quadrieren wir beide Seiten der Gleichung:

$$\sqrt{x} = 2, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 2^2, \qquad x = 4.$$

Die beiden Gleichungen können so aufgelöst werden, weil die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion $y = x^2$ ist, und umgekehrt.

$$2^x = 4, \qquad 2^x = 3$$

Die zweite Gleichung kann man nicht algebraisch lösen. Die Exponentialfunktion

$$y = 2^x$$

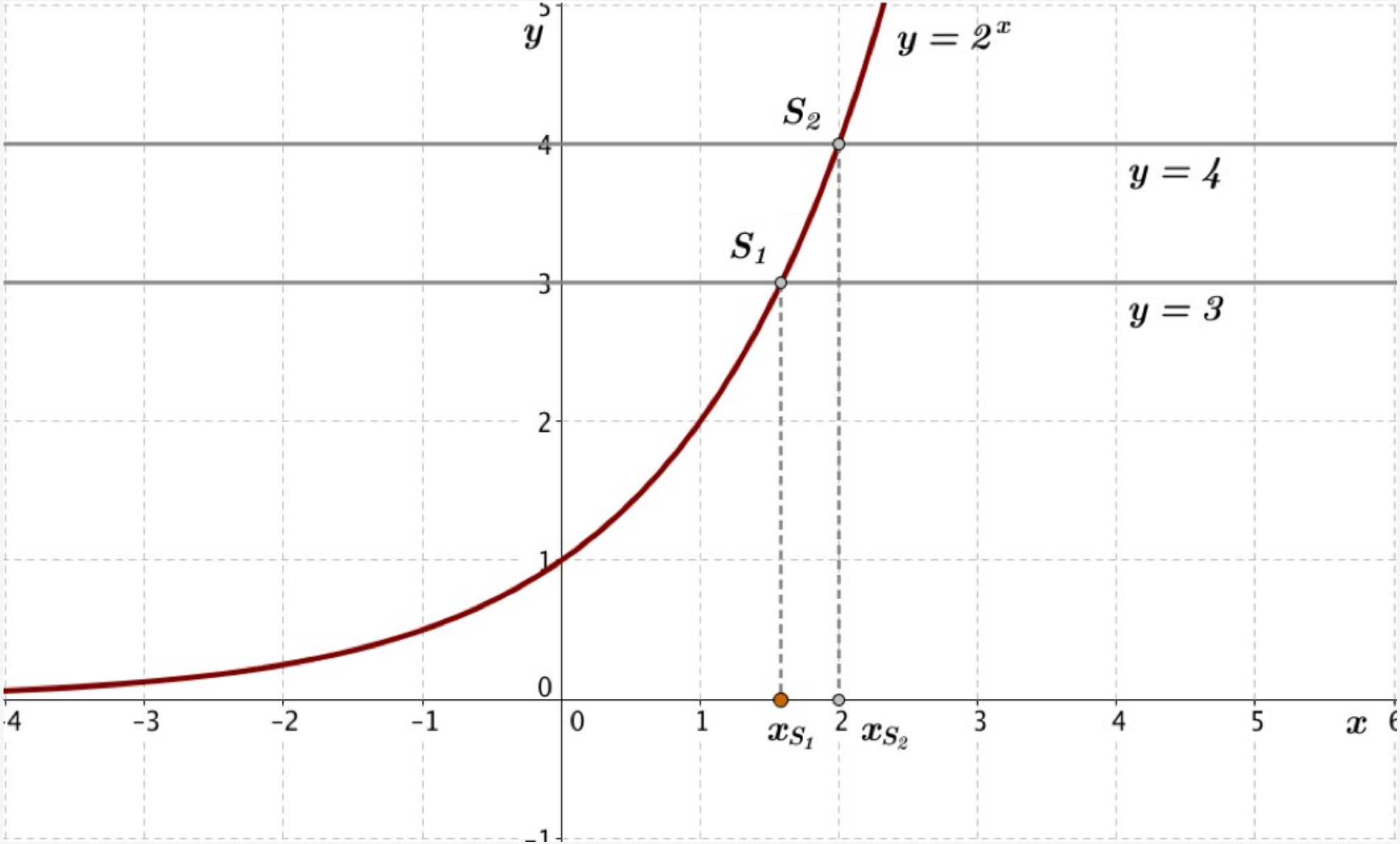
gehört zu den transzendenten Funktionen. Gleichungen mit transzendenten Funktionen sind mit algebraischen Operationen nicht auflösbar. Um solche Gleichung lösen zu können, muss

- diese Funktion einer eineindeutigen Abbildung entsprechen (injektiv sein), weil sie dann eine Umkehrfunktion hat.

  Visuell kann man anhand einer graphischen Darstellung erkennen, ob eine Funktion einer eineindeutigen Abbildung entspricht: Die Funktionskurve darf mit keiner zur x-Achse parallelen Geraden mehr als einen Schnittpunkt haben.

- die Umkehrfunktion dieser Exponentialfunktion bekannt sein. Die Umkehrfunktion kann auch graphisch gewonnen werden, indem man die Kurve der Funktion $y = 2^x$ an der Geraden $y = x$ spiegelt.

Exponentialfunktion $y = 2^x$



Um die Funktion $y = 2^x$ zu zeichnen, bestimmen wir einige *(x,y)*-Paare, die die Funktionsgleichung erfüllen:

$(x\,,\ y) = (x\,,\ 2^x)$:

$$P_1 = \left(-6,\ \frac{1}{64}\right), \quad P_2 = \left(-5,\ \frac{1}{32}\right), \quad P_3 = \left(-4,\ \frac{1}{16}\right), \quad P_4 = \left(-3,\ \frac{1}{8}\right),$$

$$P_5 = \left(-2,\ \frac{1}{4}\right), \quad P_6 = \left(-1,\ \frac{1}{2}\right), \quad P_7 = (0,\ 1), \quad P_8 = (1,\ 2), \quad P_9 = (2,\ 4).$$

Es folgt die graphische Abbildung der Funktion:

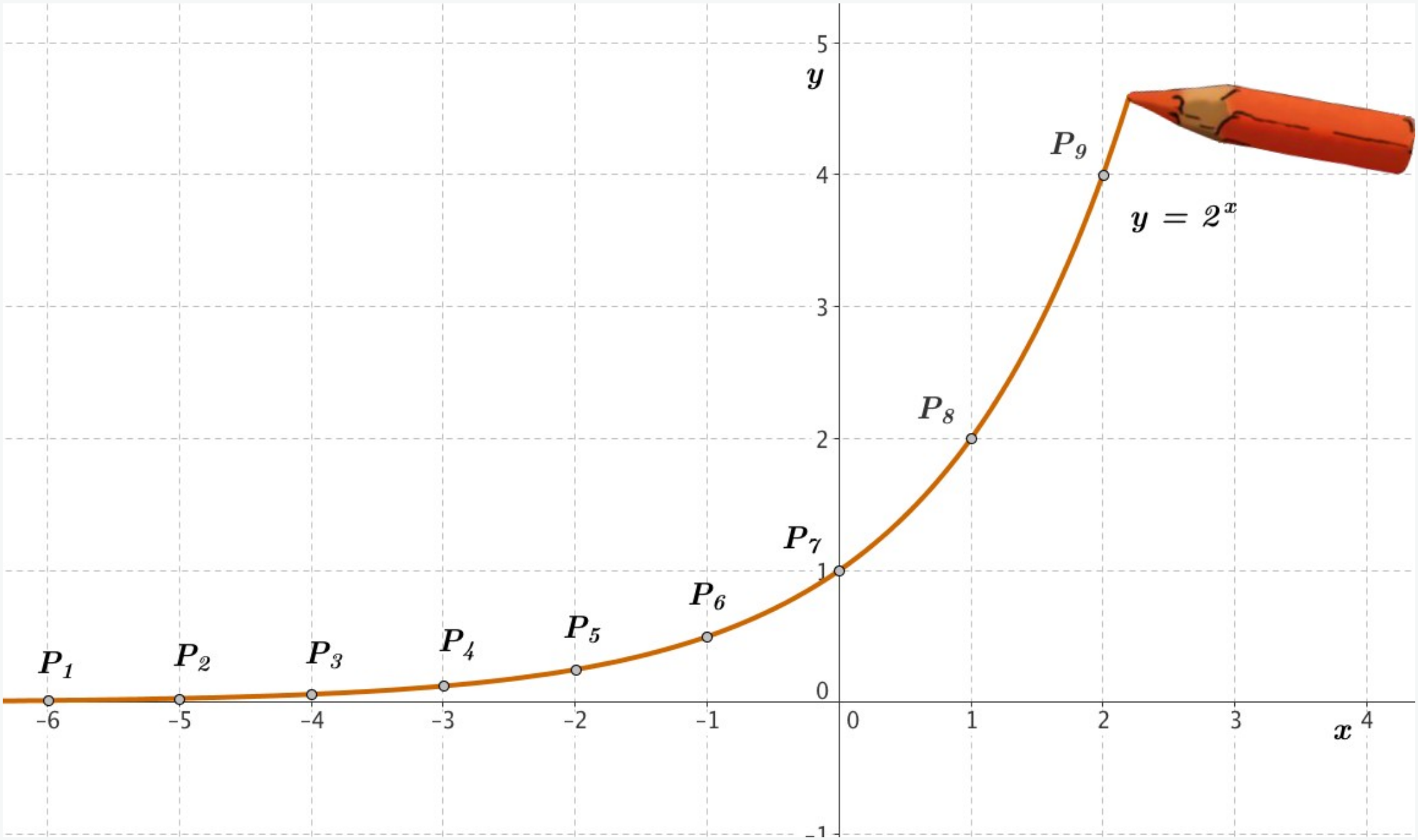


Abb. 1-1: Graphische Darstellung der Exponentialfunktion mit Basis 2. Eine Kurve wird durch die gegebenen Punkte gezeichnet.

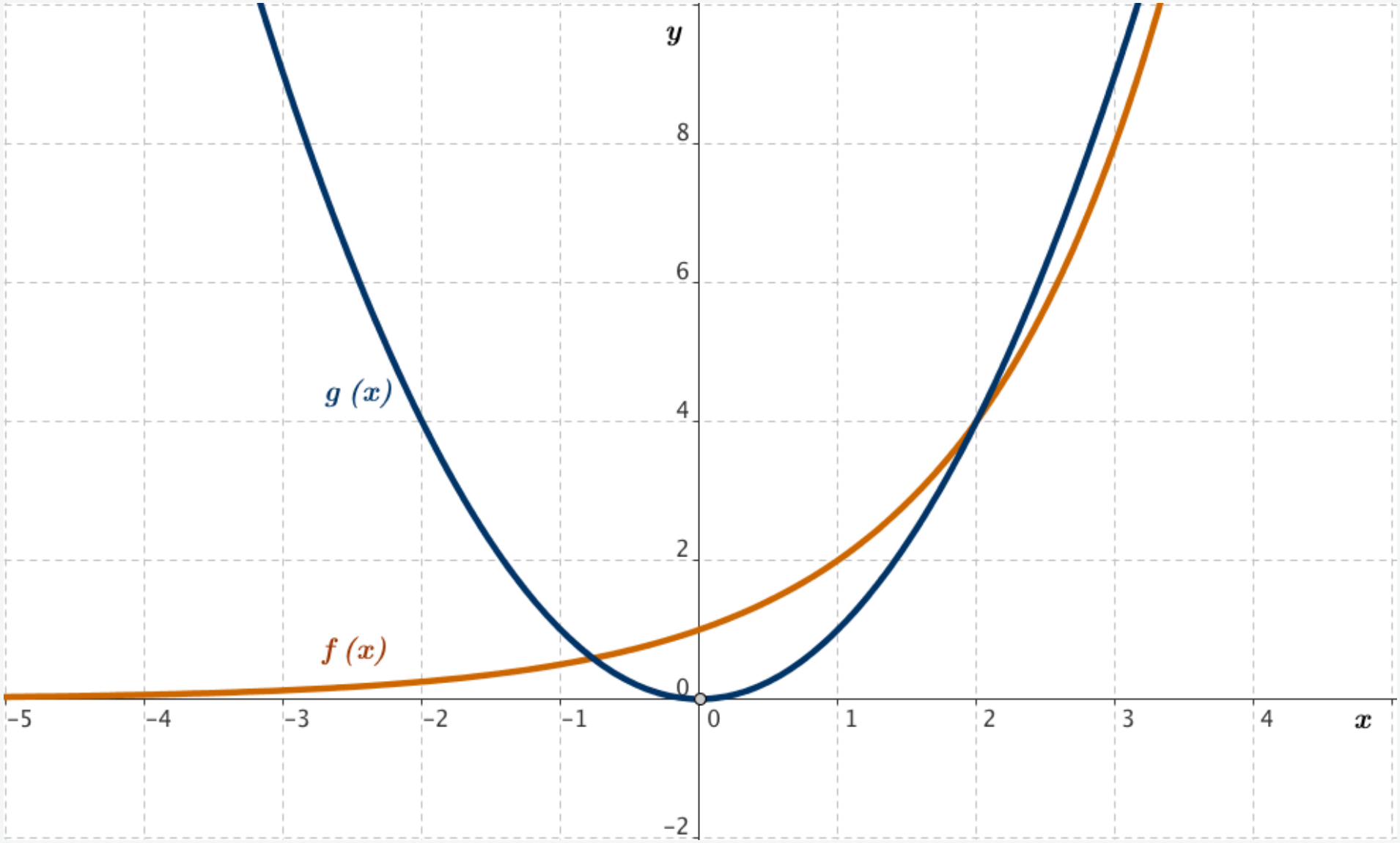


Abb. 1-2: Exponentialfunktion mit Basis 2 und quadratische Funktion $y = x^2$

Die Exponentialfunktion $y = 2^x$ ist eine im ganzen Definitionsbereich streng monoton steigende Funktion. Sie besitzt deshalb eine Umkehrfunktion. Wenn wir diese Umkehrfunktion kennen, können wir die Exponentialgleichung

$$y = 2^x$$

nach x auflösen.

Eine an der Linie $y = x$ gespiegelte Umkehrfunktion der Exponentialfunktion wird duch folgende Paare bestimmt:

$$(x\,,\ 2^x) \quad \rightarrow \quad (2^x\,,\ x)$$

Wir erhalten die Paare der Logarithmusfunktion mit der Basis 2:

$$(x\,,\ y): \quad \left(\frac{1}{64}\,,\ -6\right),\ \left(\frac{1}{32}\,,\ -5\right),\ \left(\frac{1}{16}\,,\ -4\right),\ \left(\frac{1}{8}\,,\ -3\right),\ \left(\frac{1}{4}\,,\ -2\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}\,,\ -1\right),\ (1,\ 0),\ (2,\ 1),\ (4,\ 2).$$

Tabelle 1: ***Die Wertetabelle zur graphischen Darstellung der Logarithmusffunktion*** $y = \log_2 x$

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = 2^y$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8
(x, y)	$(1/8, -3)$	$(1/4, -2)$	$(1/2, -1)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(4, 2)$	$(8, 3)$

Definition:

Unter der Logarithmusfunktion $y = \log_2 x$ versteht man die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = 2^x$

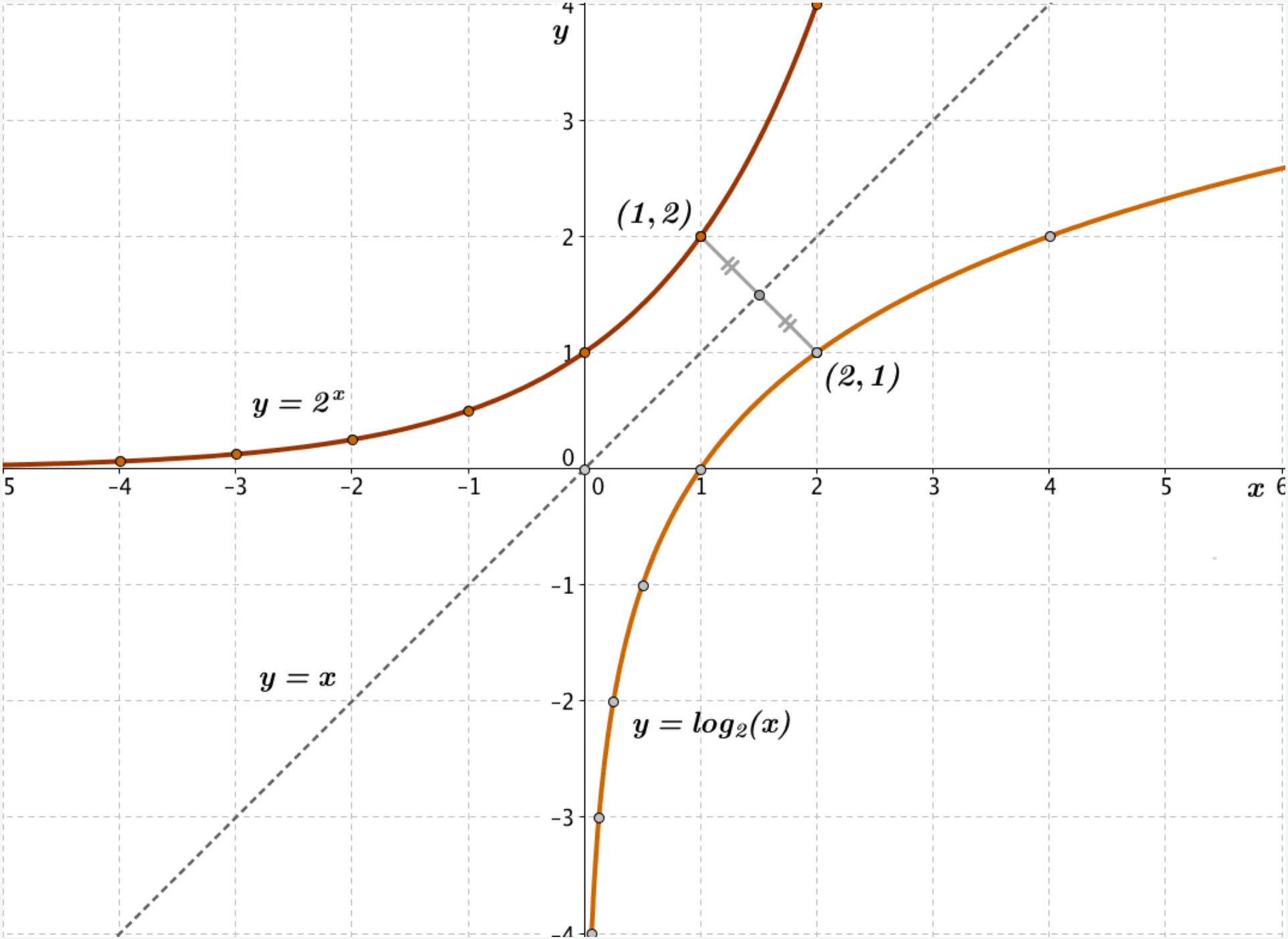


Abb. 2-1: Exponentailfunktion mit der Basis 2 (rot) und ihre Umkehrfunktion, die Logarithmusfunktion zur Basis 2 (orange)

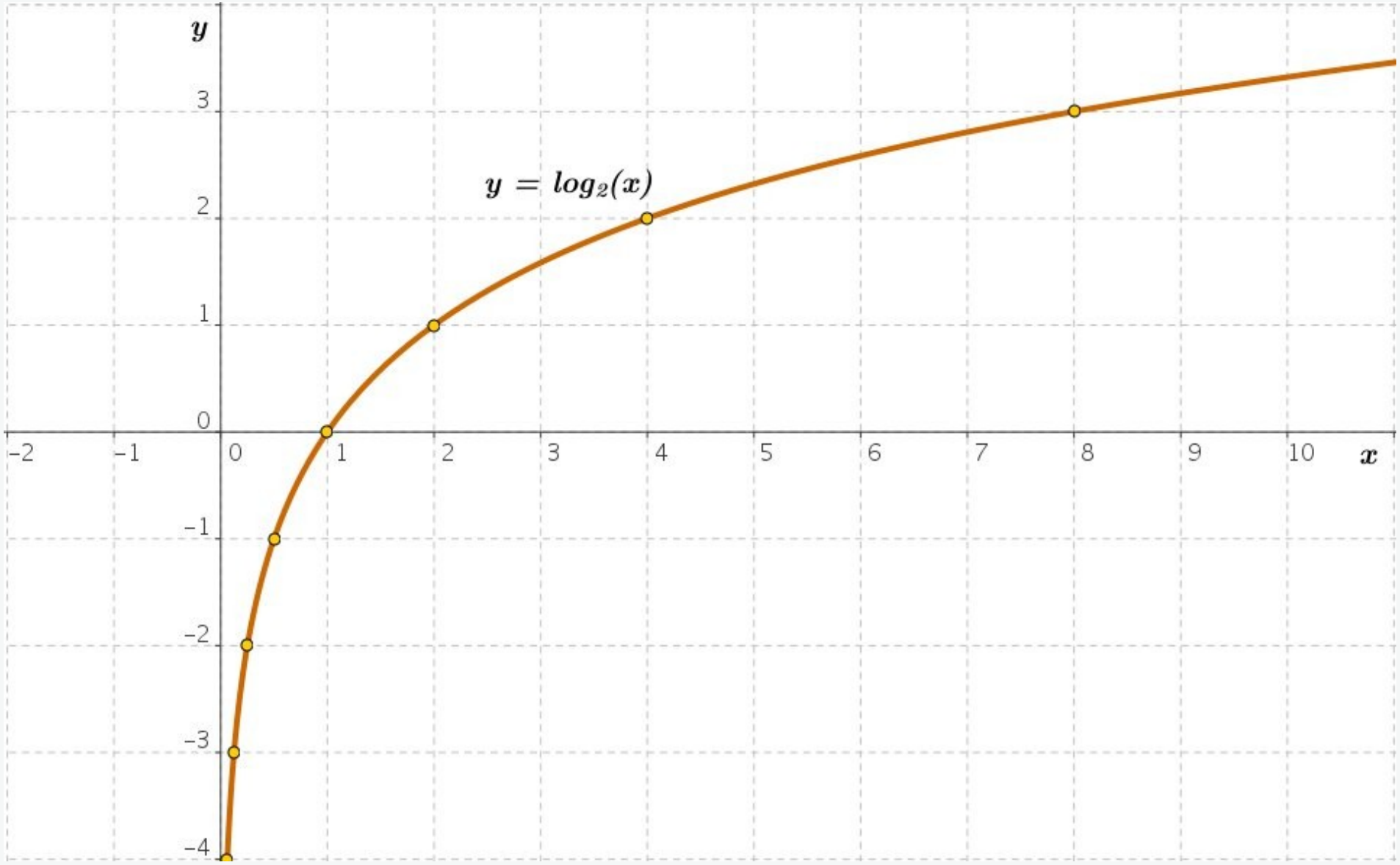
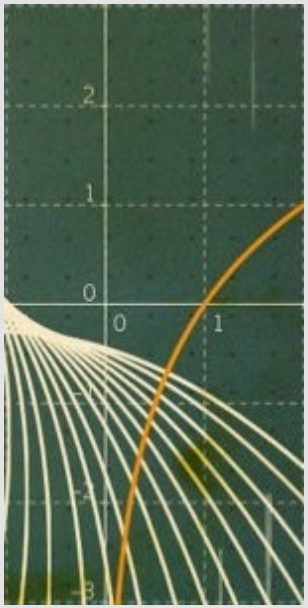


Abb. 2-2: Die Logarithmusfunktion zur Basis 2



Definition:

Der Logarithmus zur Basis *2* einer positiven Zahl x ist derjenige Exponent y, mit dem die Basis *2* zu potenzieren ist, um x zu erhalten

$$y = \log_2 x\,, \qquad 2^y = x$$

$$x\,,\ y \in \mathbb{R}\,, \qquad x > 0$$

$y = \log_2 x$ gelesen: Logarithmus von x zur Basis *2*

2 – die Basis, x – der Numerus, y – der Logarithmus

Beispiele:

$\log_2 8 = 3$ weil $2^3 = 8$

$\log_2 4 = 2$ weil $2^2 = 4$

$\log_2 2 = 1$ weil $2^1 = 2$

$\log_2 \frac{1}{2} = -1$ weil $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$10^3 = 1\,000 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} 1\,000 = 3$$

$$10^{-2} = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} 0.01 = -2$$

$$10^6 = 1\,000\,000 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} 1\,000\,000 = 6$$

$$10^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} 1 = 0$$

$$2^5 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 32 = 5$$

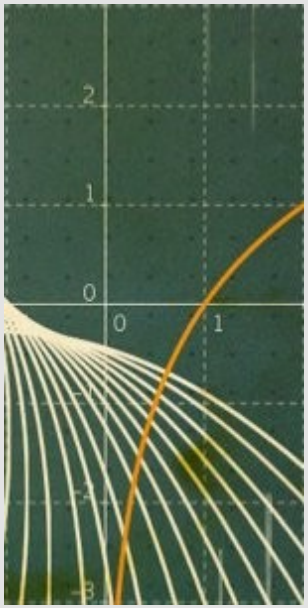
$$2^{-5} = \frac{1}{32} \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{1}{32} = -5$$

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{32} 2 = \frac{1}{5}$$

$$5^3 = 125 \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 125 = 3$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64} \quad \Leftrightarrow \quad \log_4 \frac{1}{64} = -3$$

$$256^{\frac{1}{2}} = \sqrt{256} = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{256} 16 = \frac{1}{2}$$



Definition:

Der Logarithmus einer positiven Zahl x zur Basis b ist derjenige Exponent y, mit dem die Basis b zu potenzieren ist, um x zu erhalten

$$y = \log_b x\,, \qquad b^y = x$$

$$x\,,\ y\ \in \mathbb{R}\,, \qquad b > 0, \quad x \neq 1, \quad x > 0$$

$y = \log_b x$ gelesen: Logarithmus von y zur Basis b

Im 17. Jahrhundert entwickelte der Schweizer Uhrmacher Jost Bürgi ein neues System zur Berechnung von Logarithmen, welches er 1620 nach langer Arbeit veröffentlichte. Aber schon vorher, im Jahre 1614, veröffentlichte der schottische Baron Napier ein Buch über Logarithmen, das ihn als "Erfinder der Logarithmen" berühmt machte. Ihre Arbeiten und Erkenntnisse über Logarithmen entwickelten Bürgi und Napier jedoch unabhängig voneinander.

Wikipedia

John Napier (1550 - 1617)

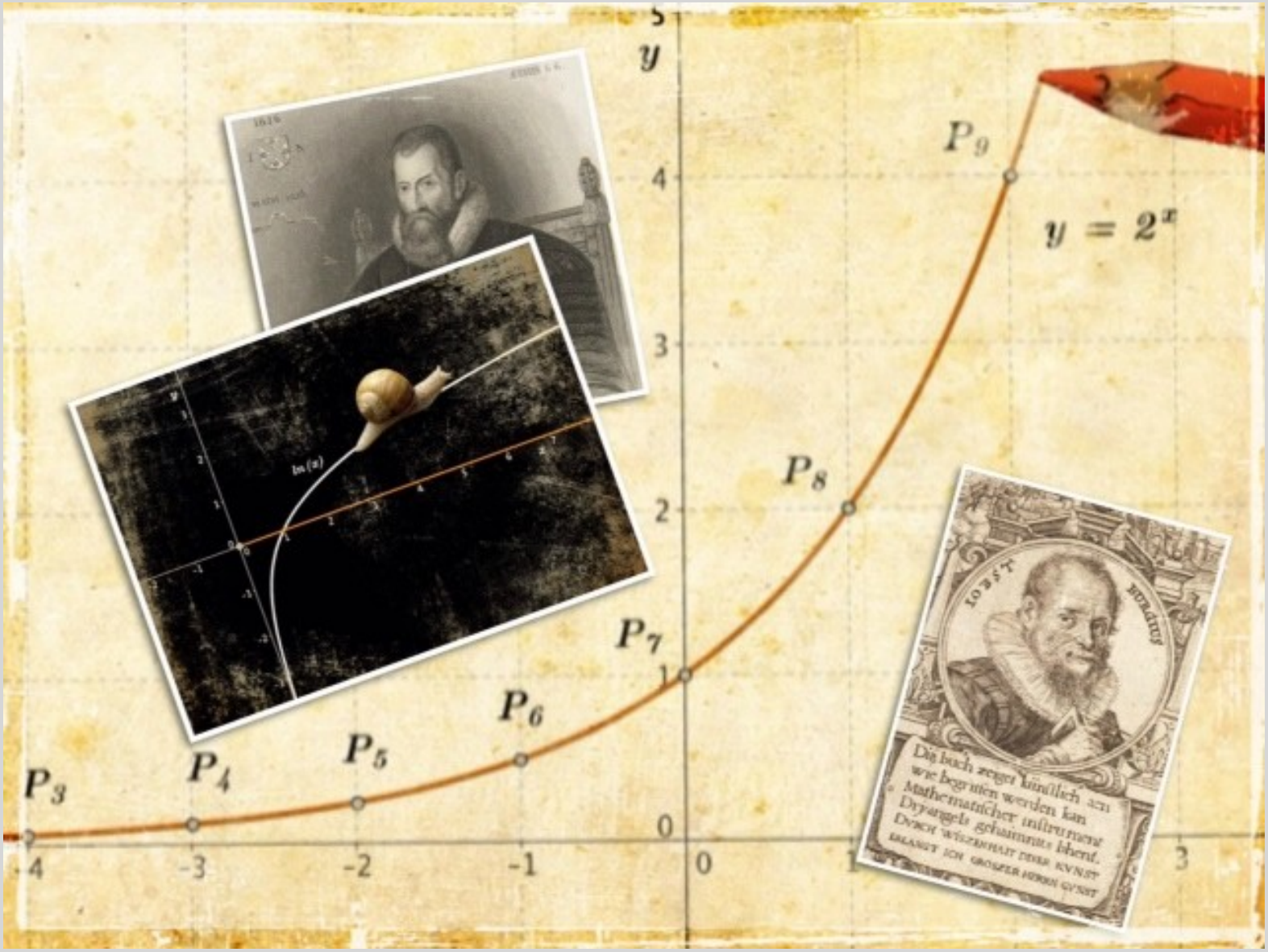
John Napier, Philosoph und Mathematiker

Jost Bürgi (1552 - 1632)

Jost Bürgi war ein Schweizer Uhrmacher, Instrumentenbauer und Astronom

Jost Bürgi (1552 - 1632)

Mechanischer Himmelsglobus, hergestellt bei Bürgi 1594 in Kassel jetzt im Schweizerischen Landesmuseum in Zürich


y
P_9
$y = 2^x$
P_8
P_7
P_6
P_5
P_4
P_3
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
3