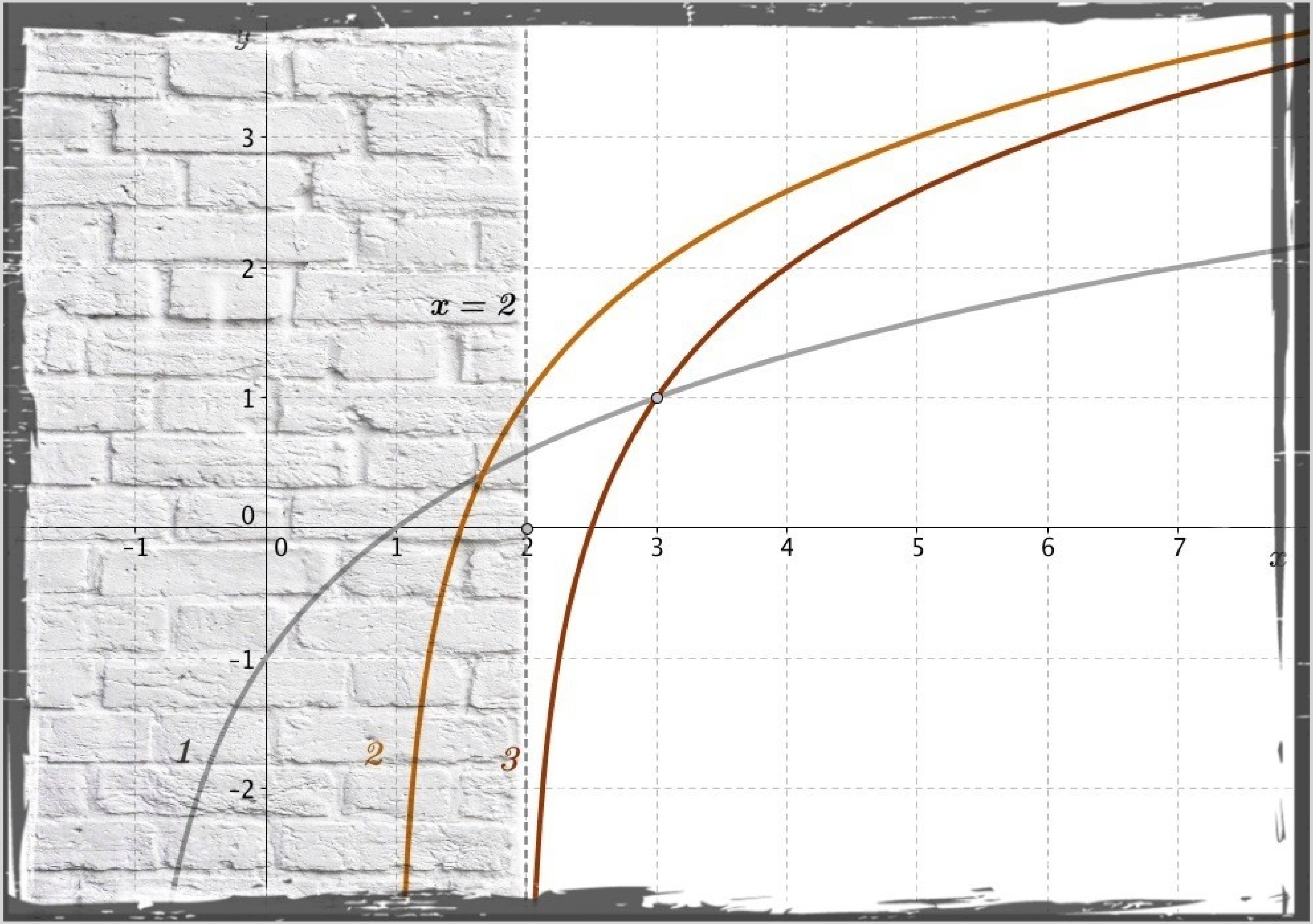


Logarithmusfunktion zur Basis 2, Aufgaben

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie eine vertikale Asymptote für die folgenden Funktionen:

$$f(x) = \log_2(x+3), \qquad g(x) = \log_2(x-2), \qquad h(x) = \log_2(x-2) + 5,$$

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die x-Koordinate des Schnittpunktes mit der x-Achse.

$$f(x) = \log_2(x+3), \qquad g(x) = \log_2(x-7), \qquad h(x) = \log_2(x+11)$$

Aufgabe 9:

In der Abbildung sind Graphen von drei Logarithmusfunktionen dargestellt. Bestimmen Sie, welcher Graph der Funktion $y = f(x)$ entspricht.

$a)$ $f(x) = \log_2(x+1),$ Abb. 9a-1

$b)$ $f(x) = \log_2(x-2) + 1,$ Abb. 9b-1

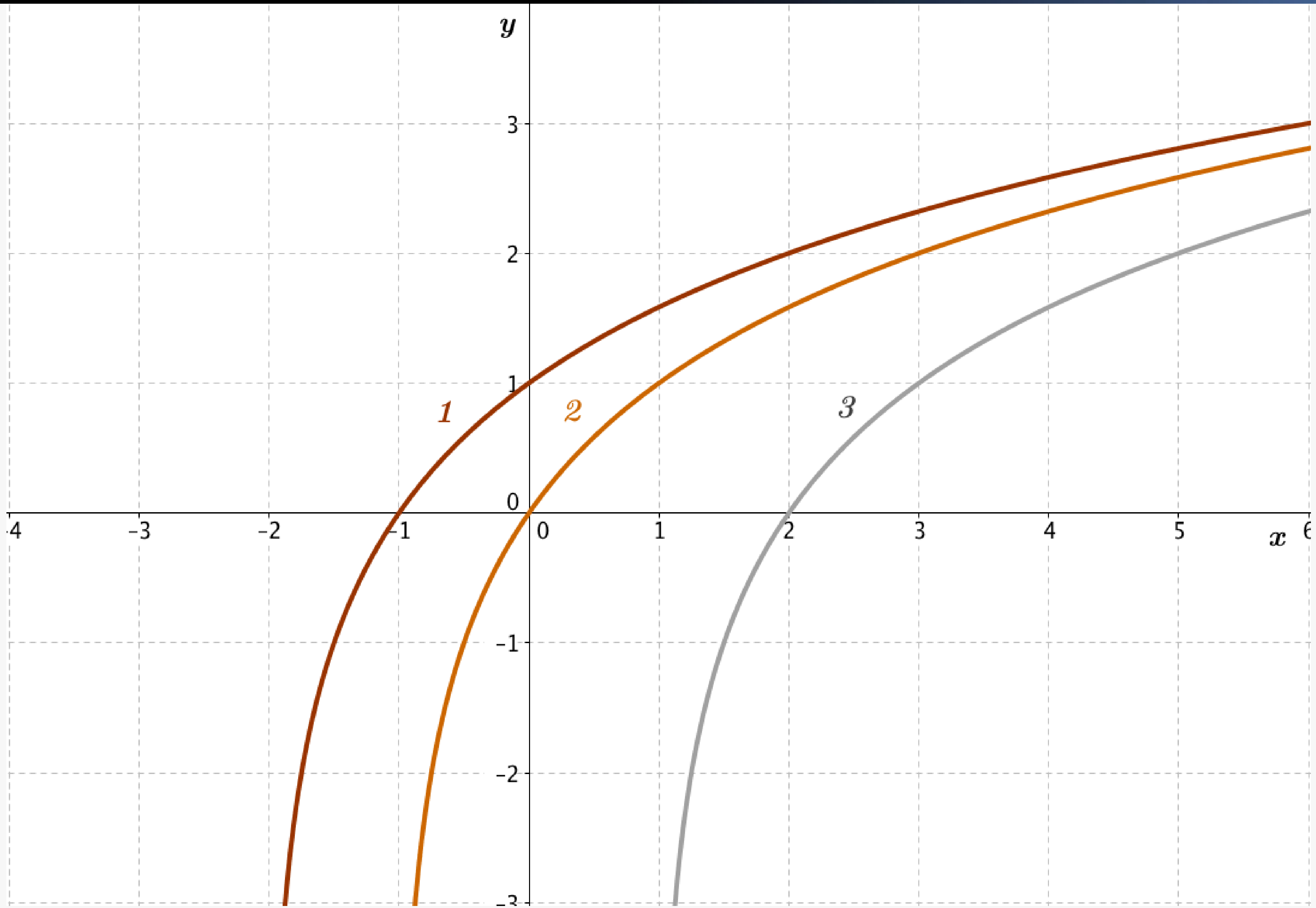


Abb. 9a-1: Die Darstellung der Aufgabe 9a

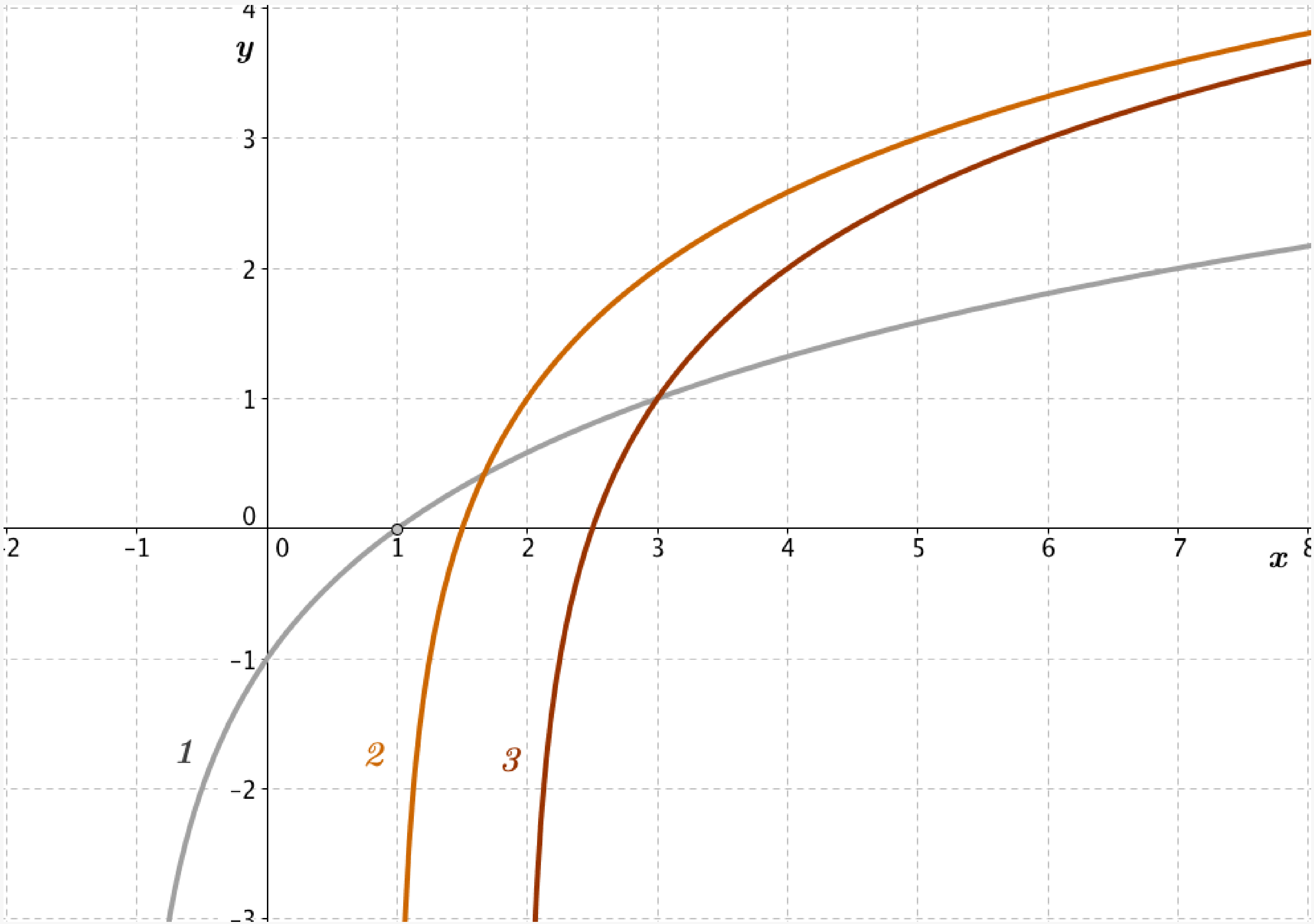


Abb. 9b-1: Die Darstellung der Aufgabe 9b

$$f(x) = \log_2(x+3), \qquad g(x) = \log_2(x-2), \qquad h(x) = \log_2(x-2) + 5,$$

Definition:

Die vertikale Asymptote $x = a$ einer Logarithmusfunktion ist durch den x-Wert gegeben, bei dem das Argument der Funktion gleich Null ist.

$$f(x) = \log_2(x+3), \qquad x + 3 = 0, \qquad x = -3$$

Die vertikale Asymptote der Funktion $y = f(x)$ ist $x = -3$.

$$g(x) = \log_2(x-2), \qquad x - 2 = 0, \qquad x = 2$$

$$h(x) = \log_2(x-2) + 5, \qquad x - 2 = 0, \qquad x = 2$$

Die vertikale Asymptote der Funktionen $y = g(x)$ und $y = h(x)$ ist $x = 2$.

Wichtig: Nur das Argument der Funktion bestimmt die vertikale Asymptote, nicht die additive Konstante, wie z.B. die Konstante 5 der Funktion $y = h(x)$.

$$f(x) = \log_2(x+3), \qquad g(x) = \log_2(x-7), \qquad h(x) = \log_2(x+11)$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist dort wo die y-Koordinate gleich Null ist:

$$S_x = (x_S, 0)$$

Mit dieser Bedingung wird die x-Koordinate des Schnittpunktes bestimmt.

$$y_S = 0 \qquad : 0 = \log_2(x_S + a), \qquad x_S + a = 1, \qquad x_S = 1 - a$$

$$y = \log_2(x+a), \qquad S_x = (x_S, 0) = (1-a, \ 0)$$

$$f(x) = \log_2(x+3), \qquad S_x = (1-3, 0) = (-2, 0), \qquad a = 3$$

$$g(x) = \log_2(x-7), \qquad S_x = (1-(-7), \ 0) = (8, 0), \qquad a = -7$$

$$h(x) = \log_2(x+11), \qquad S_x = (1-11, 0) = (-10, 0), \qquad a = 11$$

$a) \quad f(x) = \log_2(x+1)$

Diese Logarithmusfunktion ist für alle $x > -1$ definiert. Die Gerade $x = -1$ ist die vertikale Asymptote. Die Funktion hat den Schnittpunkt (0, 0) mit der x-Achse. Das ist die zweite Funktion der Abbildungen 9a-1 und 9a-2.

Die Funktion $y = log\_2\, x$ wird durch das Argument $x + 1$ um eine Einheiten nach links verschoben. Algebraisch beschreibt man diese Transformation als

$$\log_2 x \quad \to \quad \log_2(x+1)$$

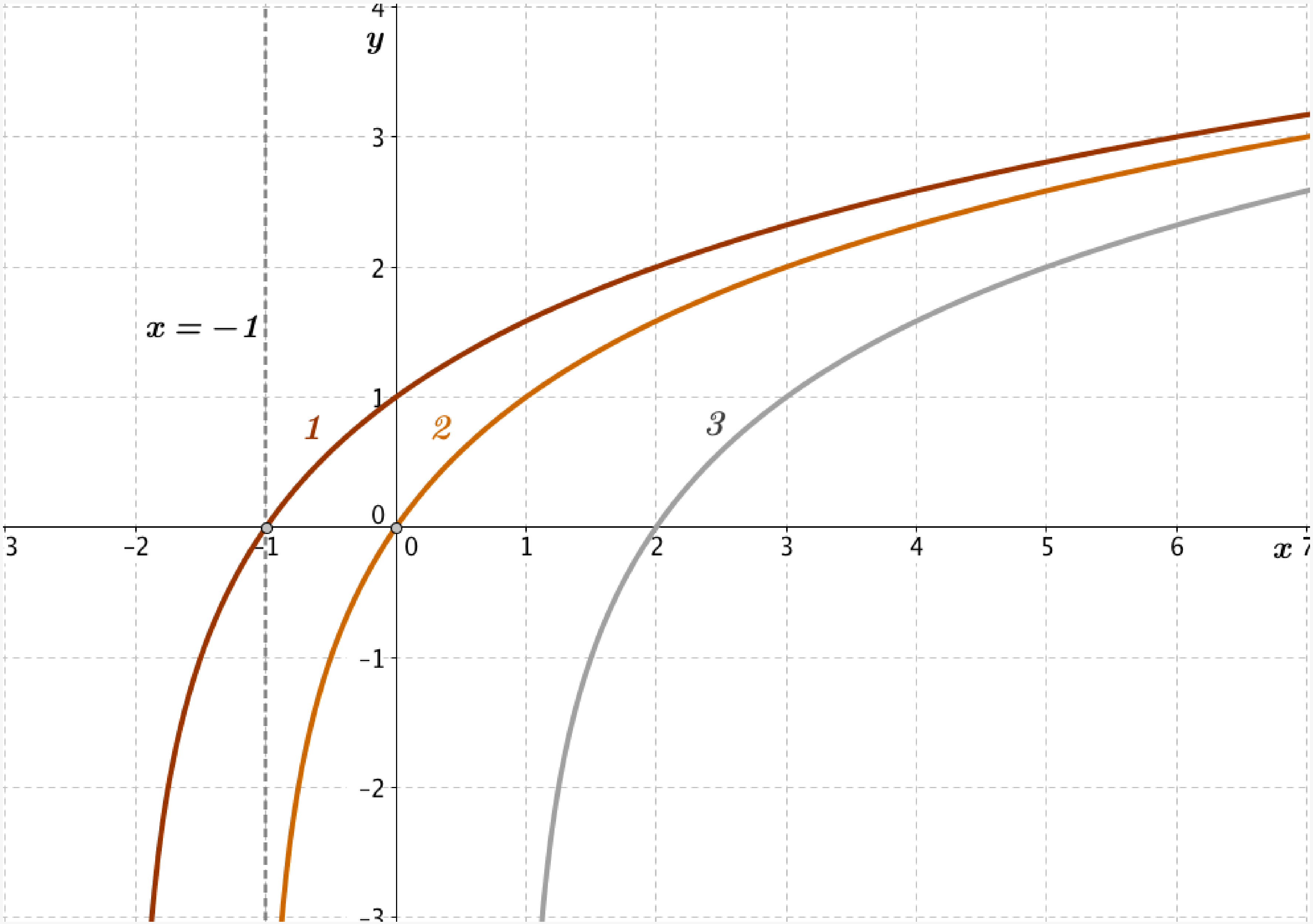


Abb. 9a-2: Graphische Lösung der Aufgabe 9a

$$2: \quad f(x) = \log_2(x+1)$$

$b)\quad f(x) = \log_2(x-2) + 1$

Diese Logarithmusfunktion ist für alle $x > 2$ definiert. Die Gerade $x = 2$ ist die vertikale Asymptote. Bei $x = 3$ hat die Funktion den Wert 1, der Punkt (3, 1) gehört der Funktionskurve. Das ist die dritte Funktion der Abbildungen 9b-1 und 9b-2.

1. Die Funktion *y = log_2 x* wird um die 2 Einheiten nach rechts verschoben. Algebraisch beschreibt man diese Transformation als

   $\log_2 x \quad \rightarrow \quad \log_2(x-2)$

2. Dann wird die Funktion *y = log_2 (x - 2)* um eine Einheit nach oben verschoben. Algebraisch schreiben wir

   $\log_2(x-2) \quad \rightarrow \quad \log_2(x-2) + 1$

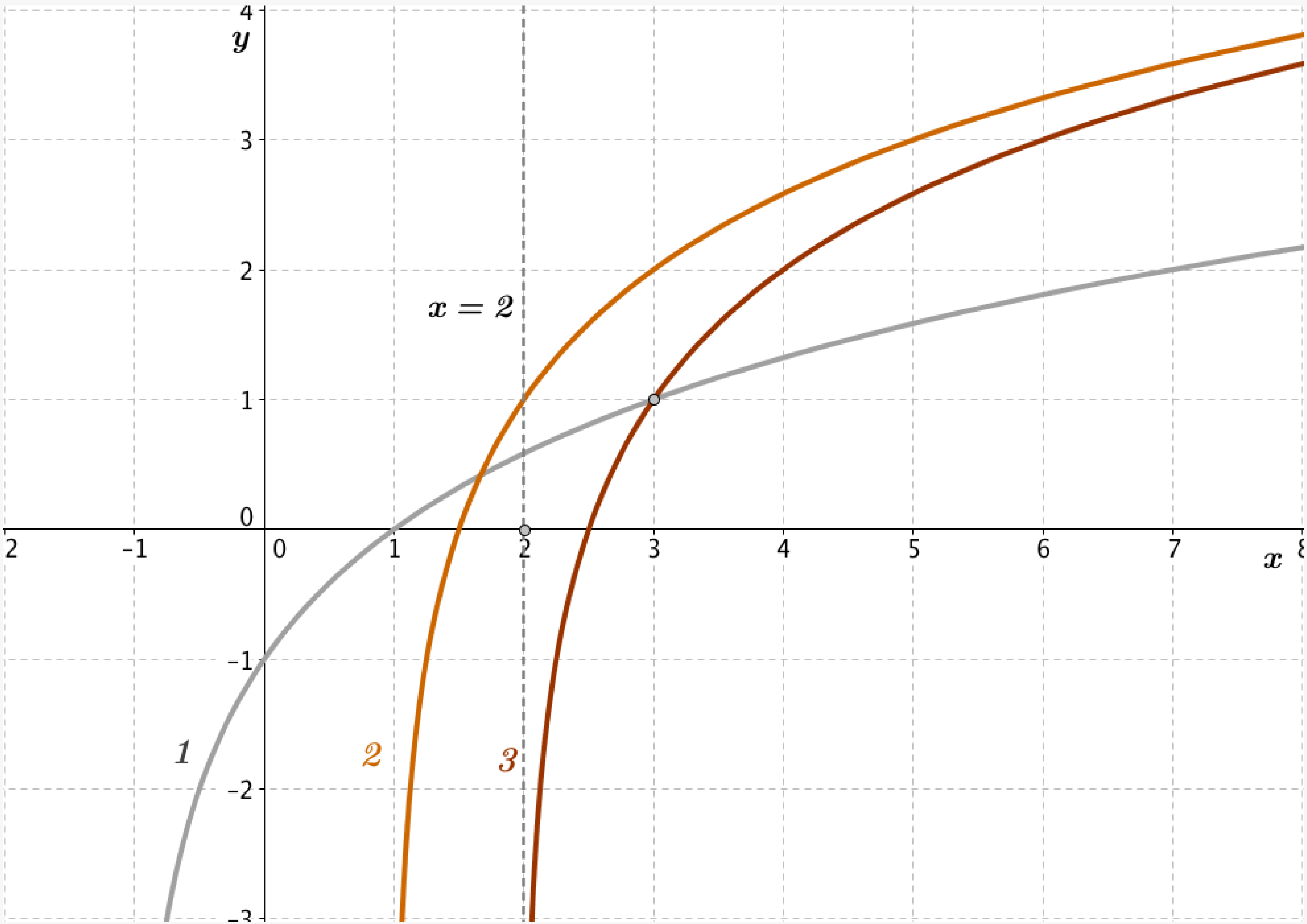


Abb. 9b-2: Graphische Lösung der Aufgabe 9b

$$3: \quad f(x) = \log_2(x-2) + 1$$

Zeichnen Sie die Funktion $g(x) = log(-x)$, bestimmen ihre Eigenschaften und vergleichen sie mit der Funktion $f(x) = log\, x$.

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Symmetrieeigenschaften
- Monotonie
- Schnittpunkte mit den Achsen
- Asymptote

$$f(x) = \log_2 x\,, \qquad g(x) = \log_2(-x)$$

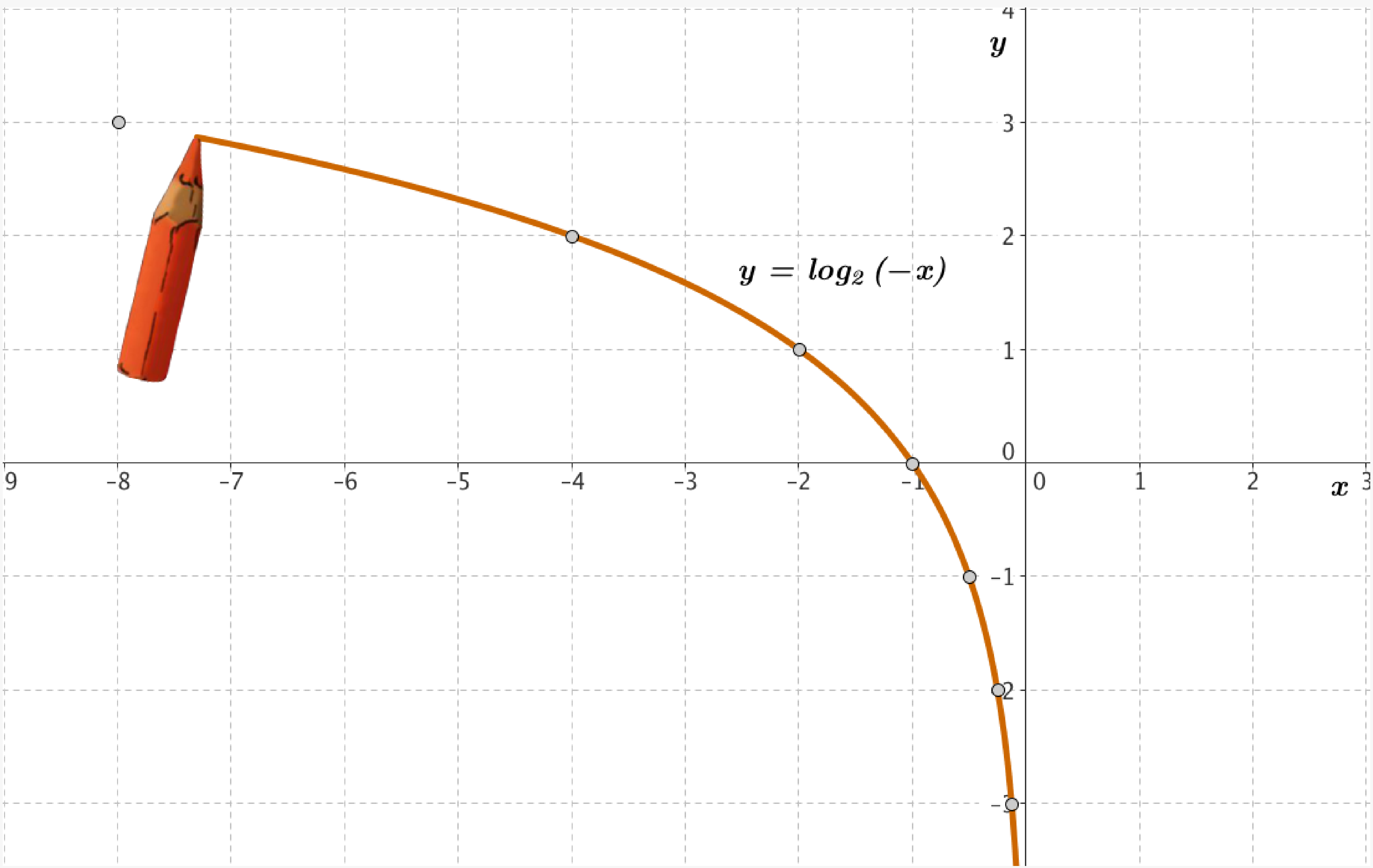


Abb. 10: Graphische Darstellung der Funktion der Aufgabe

$$g(x) = \log_2(-x)$$

Während die Funktion $f(x)$ nur für positive x definiert ist, ist die Funktion $g(x)$ nur für negative x definiert. Die beiden Funktionen haben alle reellen Zahlen als Wertebereich, besitzen keine Symmetrie und haben y-Achse als vertikale Asymptote. Die Funktion $f(x)$ ist monoton wachsend, die Funktion $g(x)$ monoton fallend. Der Schnittpunkt der Funktion $g(x)$, mit der x-Achse, Punkt (-1, 0), liegt symmetrisch bezüglich y-Achse zum Schnittpunkt der Funktion $f(x)$

- Definitionsbereich: $D_g = (-\infty, \ 0)$
- Wertebereich: $W_g = \mathbb{R}$
- Symmetrieeigenschaften: keine
- Monotonie: monoton fallend
- Schnittpunkte mit den Achsen: (-1, 0)
- Asymptote: y-Achse

Zeichnen Sie die Funktion $y = f(x)$ und bestimmen Sie ihre Eigenschaften

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Symmetrieeigenschaften
- Monotonie
- Schnittpunkte mit den Achsen
- Asymptote

$$a) \quad f(x) = \log_2 |x|, \qquad b) \quad f(x) = \log_2 (x^2 + 1)$$

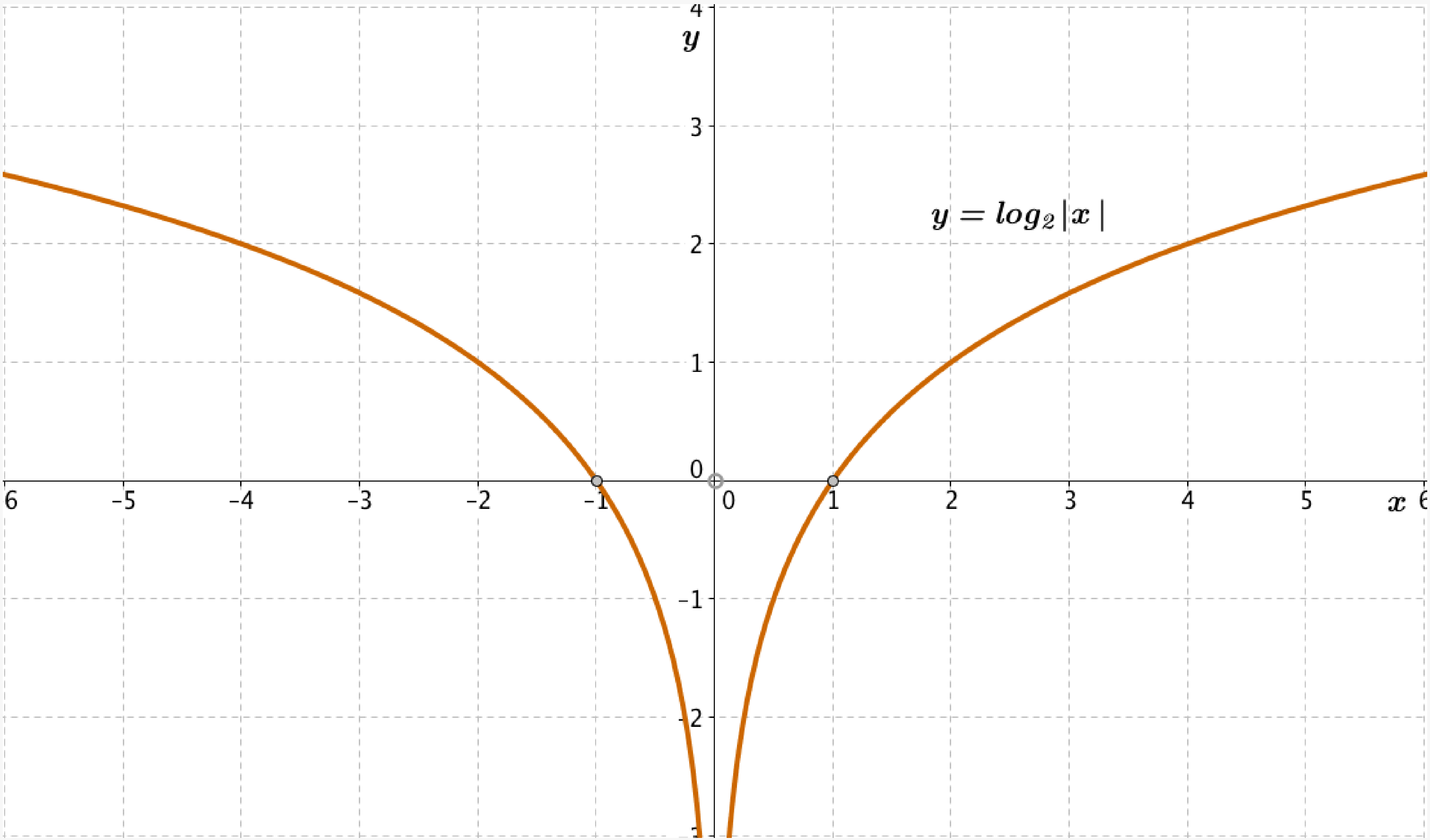


Abb. 11a: Graphische Darstellung der Funktion der Aufgabe

Die Funktion $f(x) = \log_2 |x|$ ist für alle reellen x definiert außer 0:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Der Wertebereich sind alle reellen Zahlen: $W_f = \mathbb{R}$

Die Funktion ist streng monoton fallend im Berech der negativen x und streng monoton wachsend im Berech der positiven x. Wie für die Funktion $y = \log_2 x$ ist die y-Achse vertikale Asymptote. Die Funktion hat zwei bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrische Schnittpunkte mit der x-Achse, (-1, 0) und (1, 0) und keine Schnittpunkte mit der y-Achse. Die y-Achse ist die Symmetrieachse.

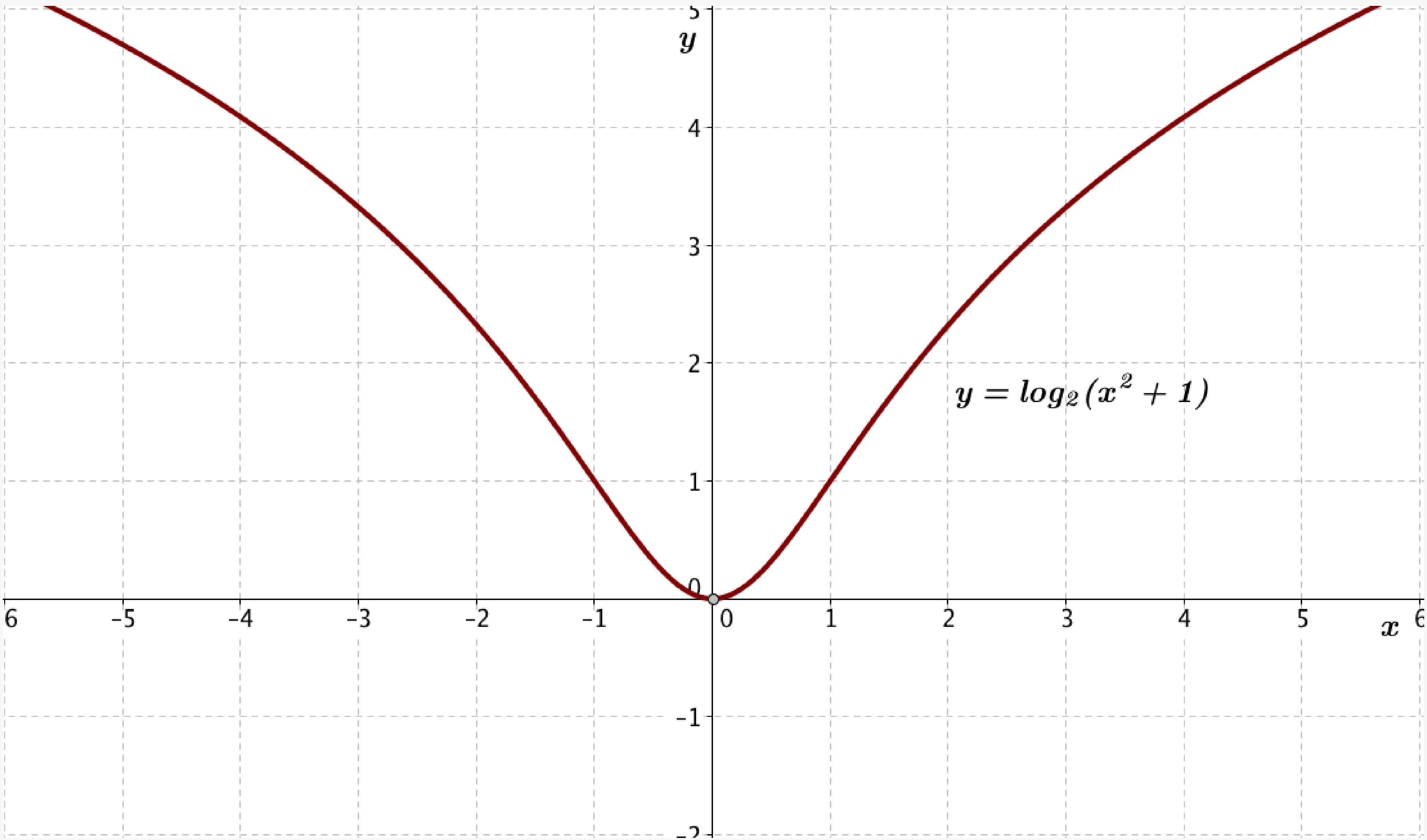


Abb. 11b: Graphische Darstellung der Funktion der Aufgabe

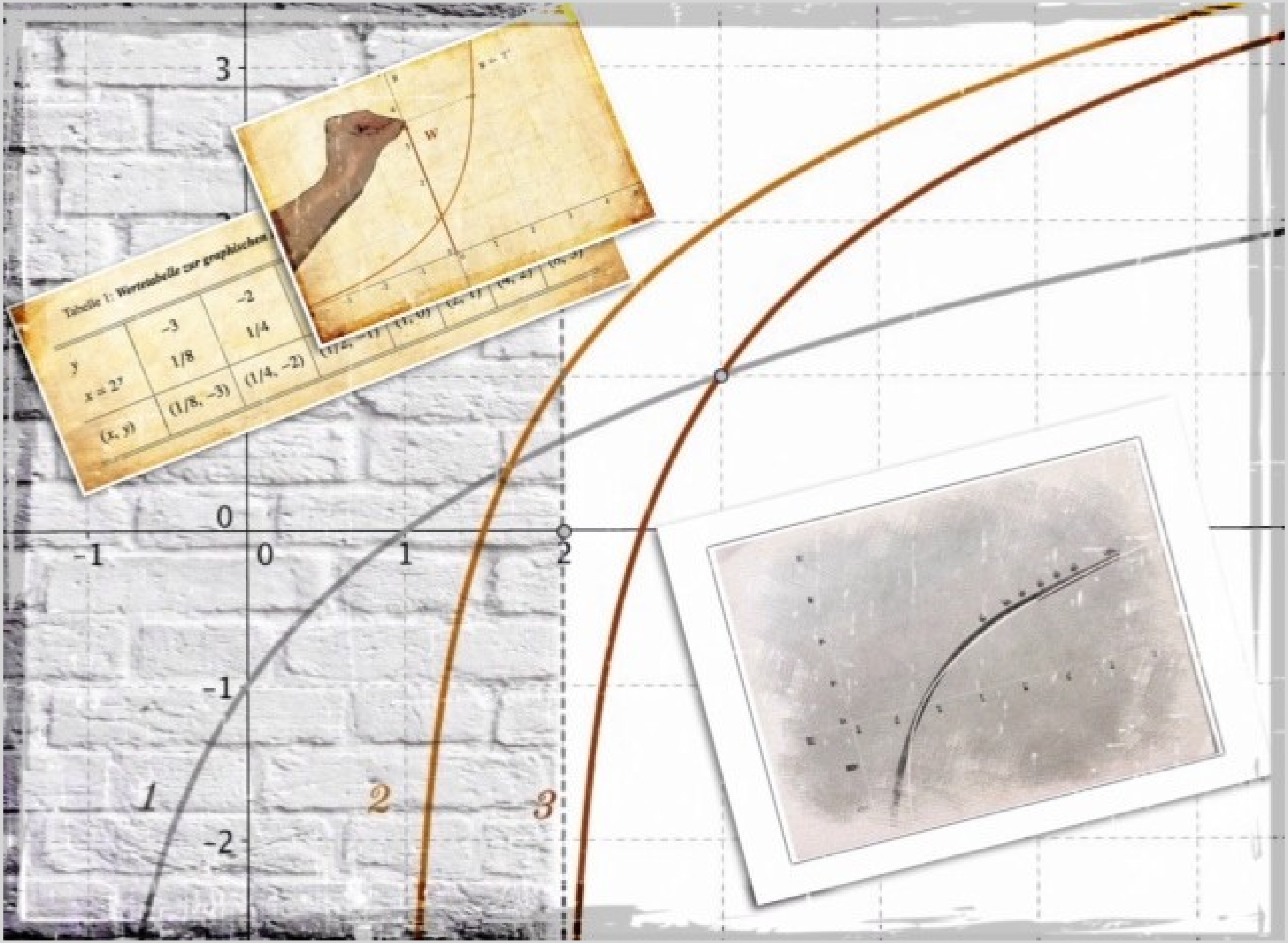
$$f(x) = \log_2(x^2 + 1)$$

Die Funktion $y = f(x)$ ist für alle reellen x definiert: $D = \mathbb{R}$

Der Wertebereich sind alle nicht negativen reellen Zahlen:

$$W = [0, \infty)$$

Die Funktion ist streng monoton fallend im Berech der negativen x und streng monoton wachsend im Berech der positiven x. Die y-Achse ist die Symmetrieachse. Die Funktion hat einen Schnittpunkt $(0, 0)$ mit der x-Achse.


3
0
-1
-2
-1
0
1
2
1
2
3
W
Tabelle 1: Wertetabelle zur graphischen
y
-3
-2
$x = 2^y$
1/8
1/4
(x, y)
(1/8, -3)
(1/4, -2)


y
x
S_1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6