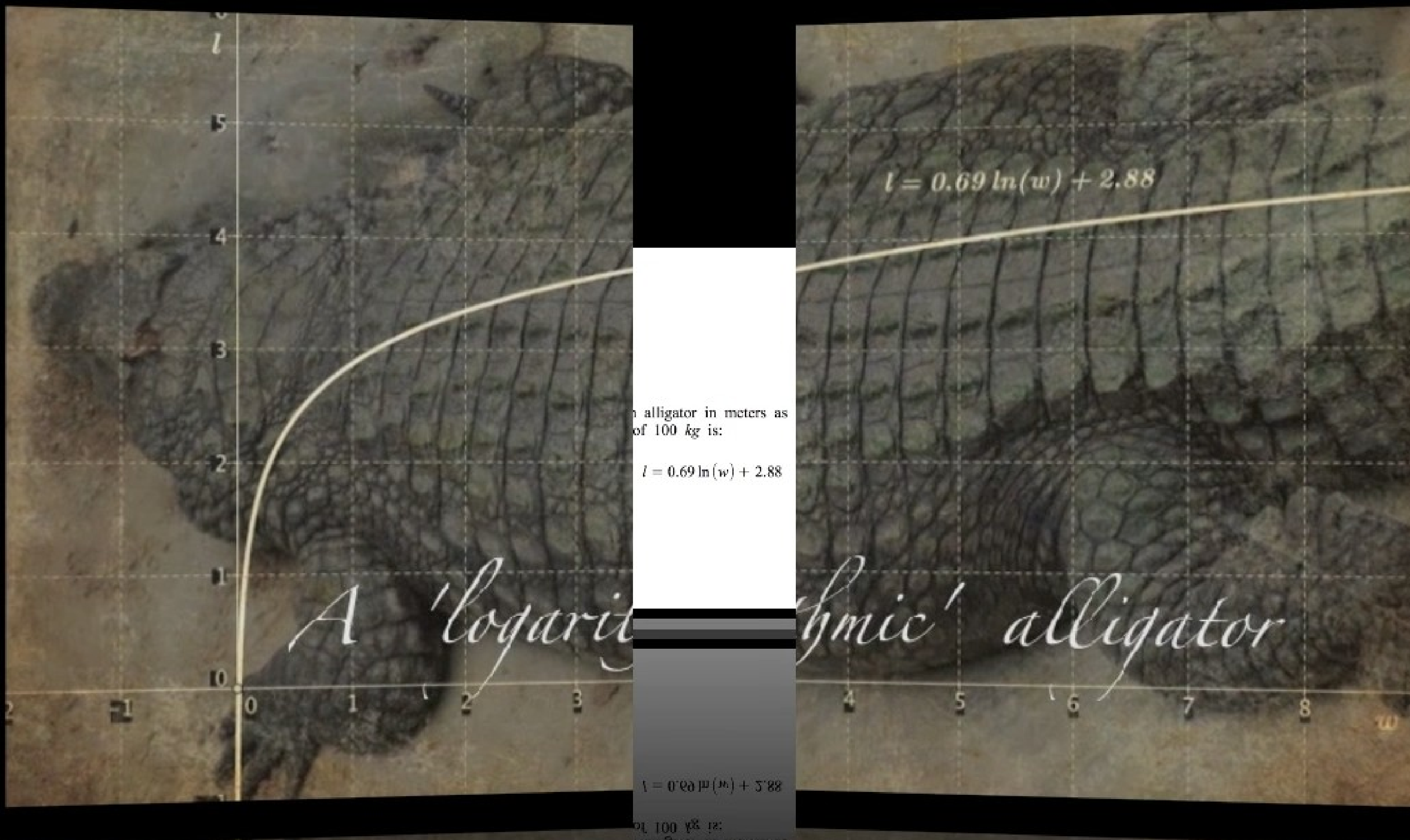

Logarithms, applied problems. Part 1

Ein "logarithmischer" Alligator

Die Länge l eines Alligators in Metern kann näherungsweise als Funktion $l = l\,(w)$ seines Gewichts w in Einheiten von 100 kg beschrieben werden mit

$$(1) \qquad l = 0.69 \ln(w) + 2.88, \qquad \ln x \equiv \log_e x$$

a) Bestimmen Sie mit dieser Formel die Länge von Alligatoren mit Gewichten von 200, 300, 400 und 500 kg.

b) Stellen Sie die Funktion graphisch dar und schätzen Sie damit das Gewicht von Alligatoren von 3, 3.5 und 4 m Länge. Prüfen Sie die Schätzungen rechnerisch.

c) Transformieren Sie obige Längen-Gewichts-Beziehung in die entsprechende Formel $l = a \ln(w) + b$, wobei aber die Länge l des Alligators in cm und sein Gewicht w in kg einzugeben sind.

d) Zeigen Sie, dass die Formel für kleine Gewichte sinnlos wird.

e) Fassen Sie zusammen, was man aus dieser Aufgabe lernen kann.

a) Alligatorlänge: Analytische Lösung

Um die Länge eines Alligators von 200, 300, 400 und 500 *kg* zu erhalten, setzen wir diese Werte in die Formel (1) ein und berücksichtigen dabei, dass in ihr das Gewicht in Einheiten von 100 *kg* gegeben ist. Die Argumente des Logarithmus sind also 2, 3, 4 und 5 für die gegebenen Werte von 200, 300, 400 and 500 *kg*.

$$200\ kg \;\Rightarrow\; w = 2: \qquad l = 0.69 \ln(2) + 2.88 = 3.36\ m$$

$$300\ kg \;\Rightarrow\; w = 3: \qquad l = 0.69 \ln(3) + 2.88 = 3.64\ m$$

$$400\ kg \;\Rightarrow\; w = 4: \qquad l = 0.69 \ln(4) + 2.88 = 3.84\ m$$

$$500\ kg \;\Rightarrow\; w = 5: \qquad l = 0.69 \ln(5) + 2.88 = 3.99\ m$$

Es fällt auf, dass die Längen im Intervall 3.36 bis 3.99 bleiben, obwohl sich die 4 Gewichte jeweils um den Wert 1 unterscheiden. Wir sehen hier wieder einmal eine typisch langsame logarithmische Abhängikkeit.

In den folgenden Abbildungen zeigen wir die Länge eines Alligators von 200 und 400 *kg* mit dem GeoGebra applet.

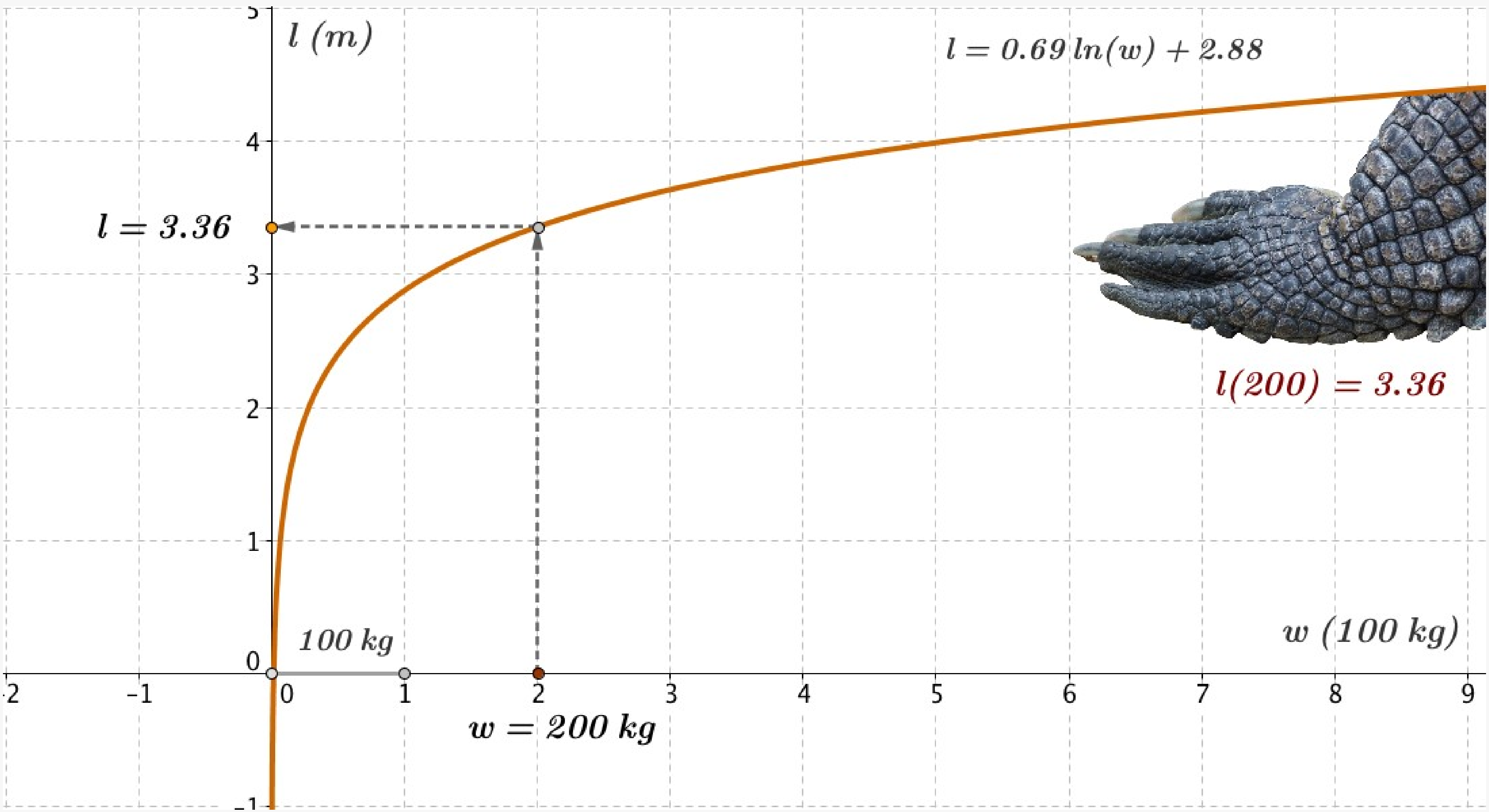

Abb. 1-1: Die logarithmische Kurve beschreibt grob die Länge eines Alligators als Funktion seines Gewichts. Z.B. hat ein Alligator von 200 kg eine Länge von 3.36 m

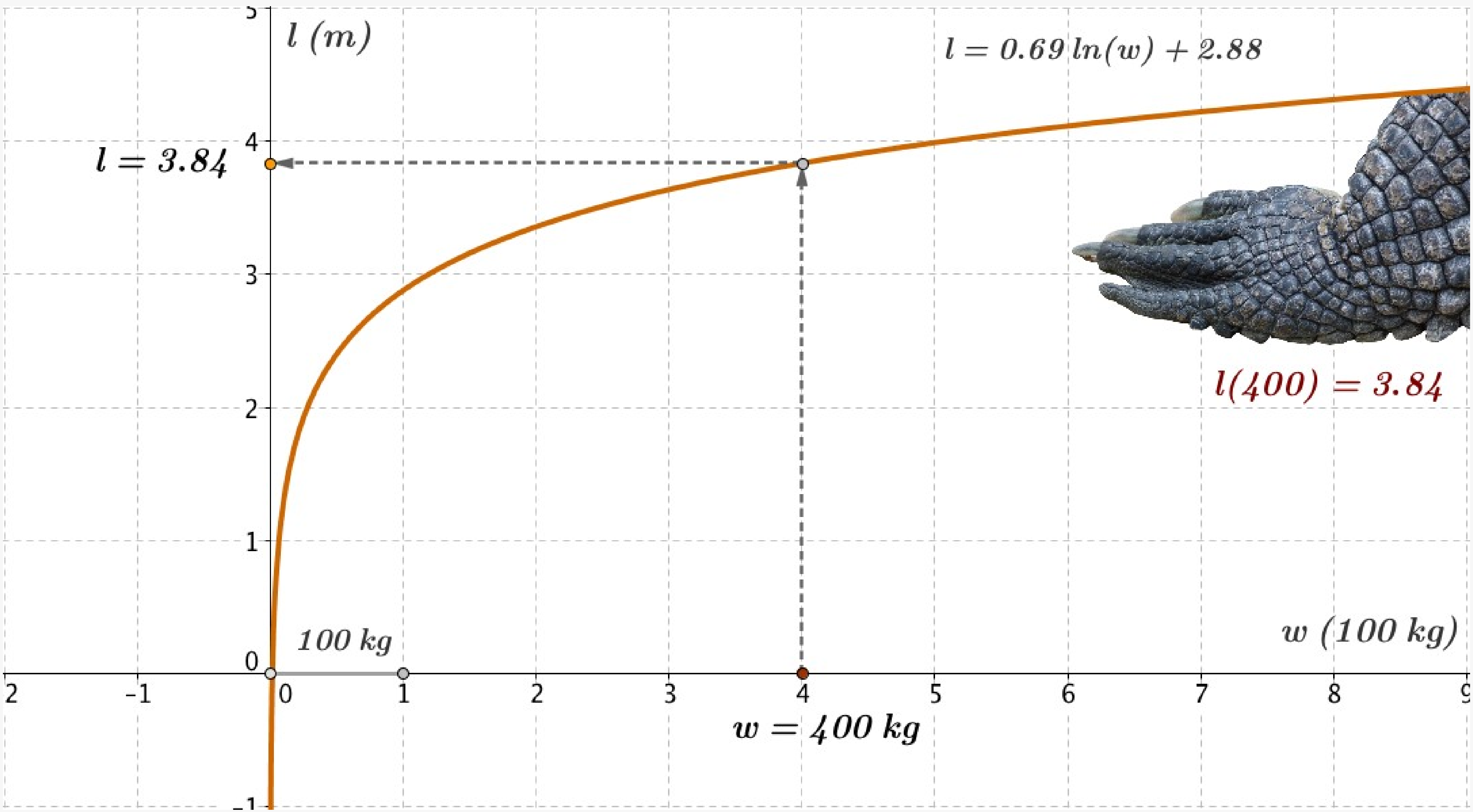

Abb. 1-2: Die logarithmische Kurve beschreibt grob die Länge eines Alligators als Funktion seines Gewichts. Z.B. hat ein Alligator von 400 kg eine Länge von 3.84 m

b) Alligatorgewicht: Graphische Lösung

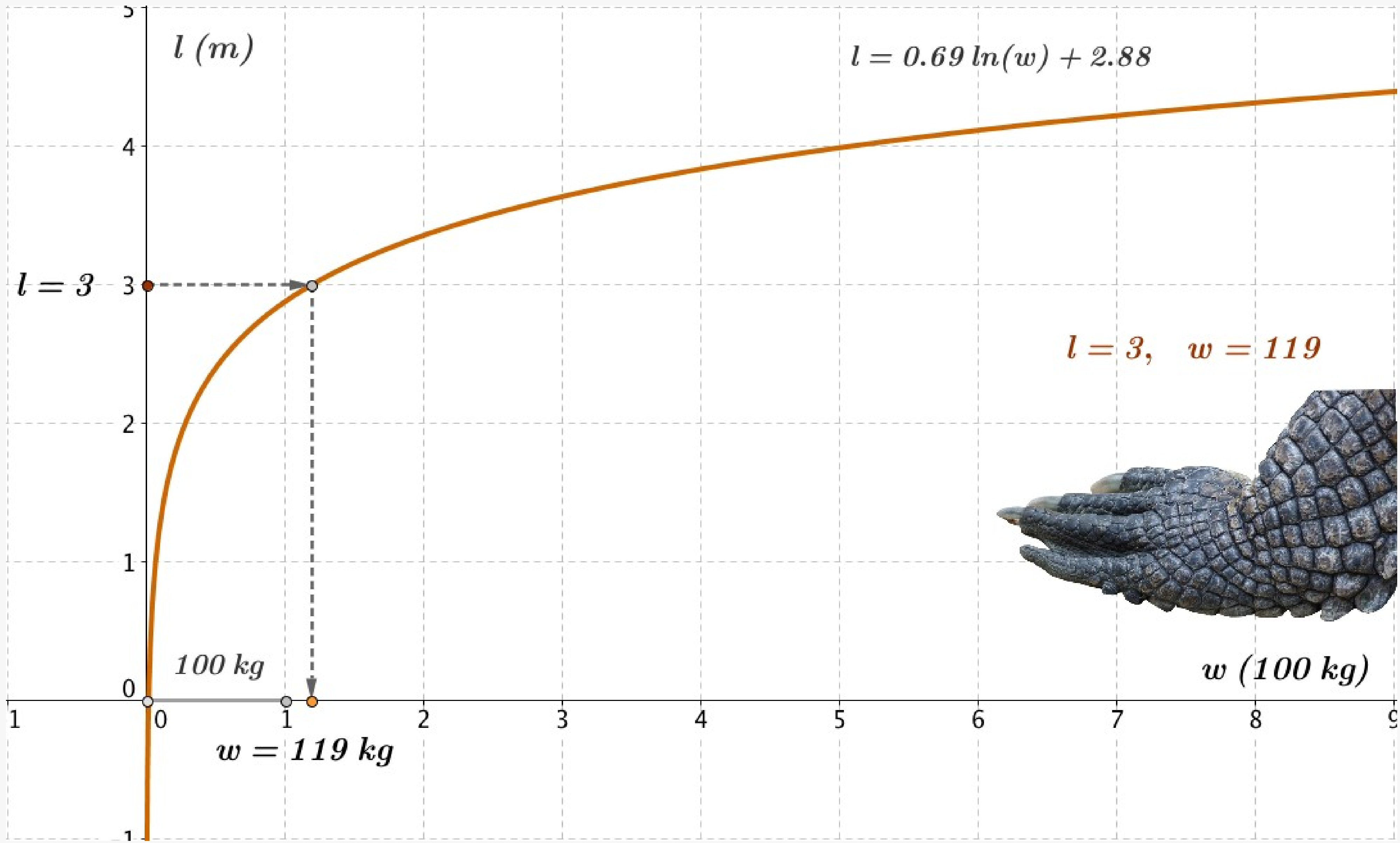

Abb. 1-3: Der logarithmischen Kurve entsprechend hat ein Alligator von 3 m Länge ein Gewicht von 119 kg.

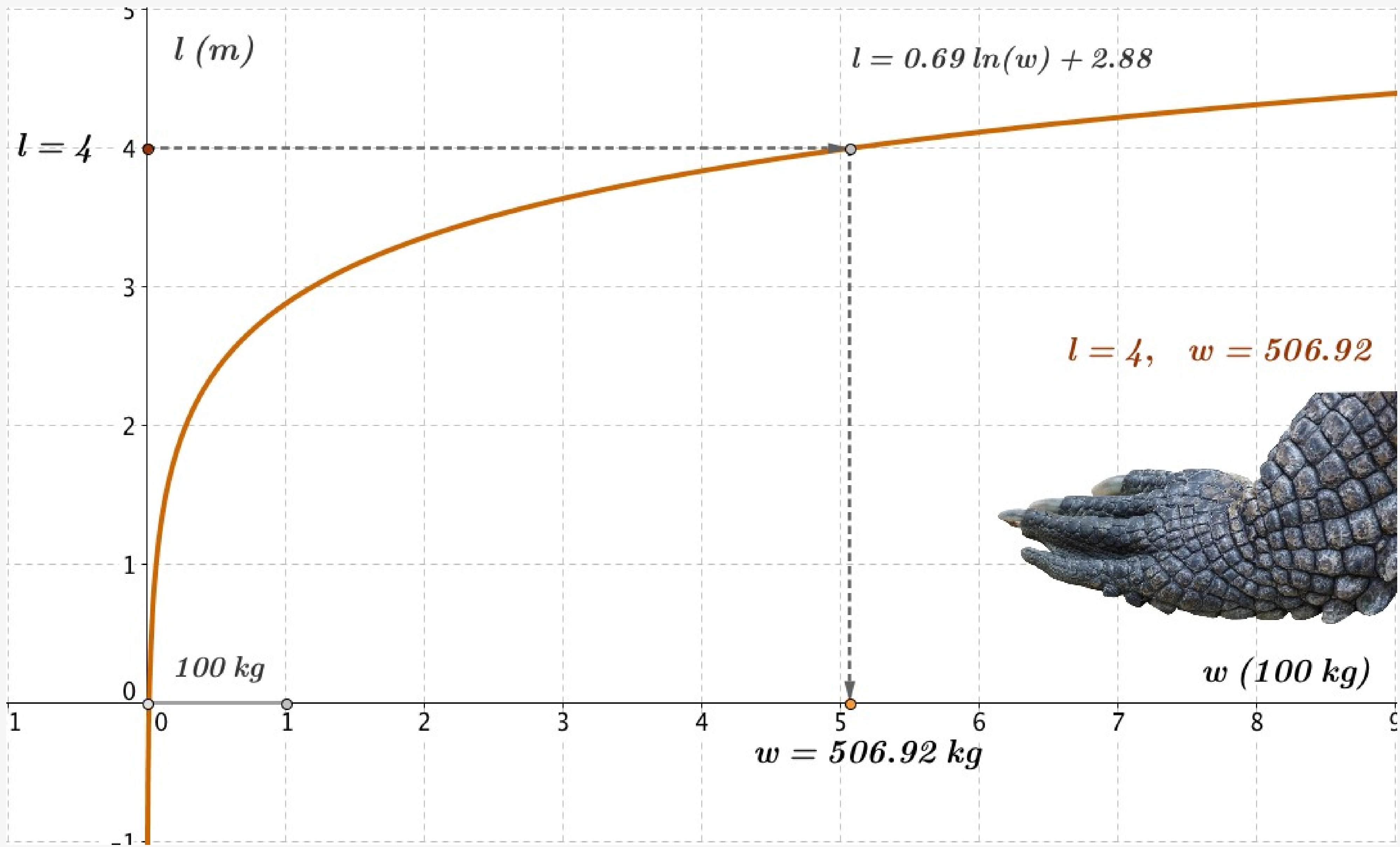

Abb. 1-4: Der logarithmischen Kurve entsprechend hat ein Alligator von 4 m Länge ein Gewicht von 507 kg.

b) Alligatorgewicht: Analytische Lösung

Um unsere graphisch ermittelten Werte rechnerisch zu überprüfen, müssen wir Gleichung (1) umkehren, um das Gewicht als Funktion der Länge zu erhalten.

$$l = 0.69 \ln(w) + 2.88 \quad (1)$$

$$l - 2.88 = 0.69 \ln(w), \qquad \ln(w) = \frac{l - 2.88}{0.69}$$

$$w = e^{\frac{l-2.88}{0.69}} \qquad \text{(in Einheiten von 100 kg)}$$

$$w = 100\, e^{\frac{l-2.88}{0.69}} \qquad \text{(Einheit von 1 kg)}$$

$$l = 3\,m: \quad w = 100\, e^{\frac{3-2.88}{0.69}} = 100\, e^{\frac{0.12}{0.69}} \simeq 119\,kg$$

$$l = 3.5\,m: \quad w = 100\, e^{\frac{3.5-2.88}{0.69}} = 100\, e^{\frac{0.62}{0.69}} \simeq 245.6\,kg$$

$$l = 4\,m: \quad w = 100\, e^{\frac{4-2.88}{0.69}} = 100\, e^{\frac{1.12}{0.69}} \simeq 506.9\,kg$$

$$l = 0.69 \ln(w) + 2.88 \quad (1)$$

In Gleichung (1) sind die Länge l in m und das Gewicht w in Einheiten von 100 kg gegeben. Wir kennzeichnen jetzt die für l und w benutzten Einheiten in Gleichung (1):

$$l_m = 0.69 \ln(w_{100\,kg}) + 2.88$$

Dann ergibt sich die Länge l in cm:

$$l_{cm} = 100\,(0.69 \ln(w_{100\,kg}) + 2.88) = 69 \ln(w_{100\,kg}) + 288$$

Wenn wir w in kg statt in Einheiten von 100 kg ausdrücken, erhalten wir:

$$l_{cm} = 69 \ln\left(\frac{w_{kg}}{100}\right) + 288$$

Beachte: numerisch bleibt das Argument des Logarithmus unverändert.

Um zur gewünschten Form zu kommen, schreiben wir:

$$l_{cm} = 69\,(\ln(w_{kg}) - \ln(100)) + 288 \simeq 69\,(\ln(w_{kg}) - 4.61) + 288$$

i.e.

$$\boxed{l_{cm} \simeq 69 \ln(w_{kg}) - 30}$$

d) Negative Alligatorlängen oder Anwendungsgrenzen

Die Formel für die Länge l in cm und das Gewicht w in kg

$$l_{cm} \simeq 69 \ln\left(w_{kg}\right) - 30$$

zeigt sofort, dass es nur einen begrenzten sinnvollen Anwendungsbereich gibt. Zum Beispiel erhält man für ein Gewicht von 1 kg eine negative Alligatorlänge:

$$l_{cm} \simeq 69 \ln\left(1\right) - 30 = -30$$

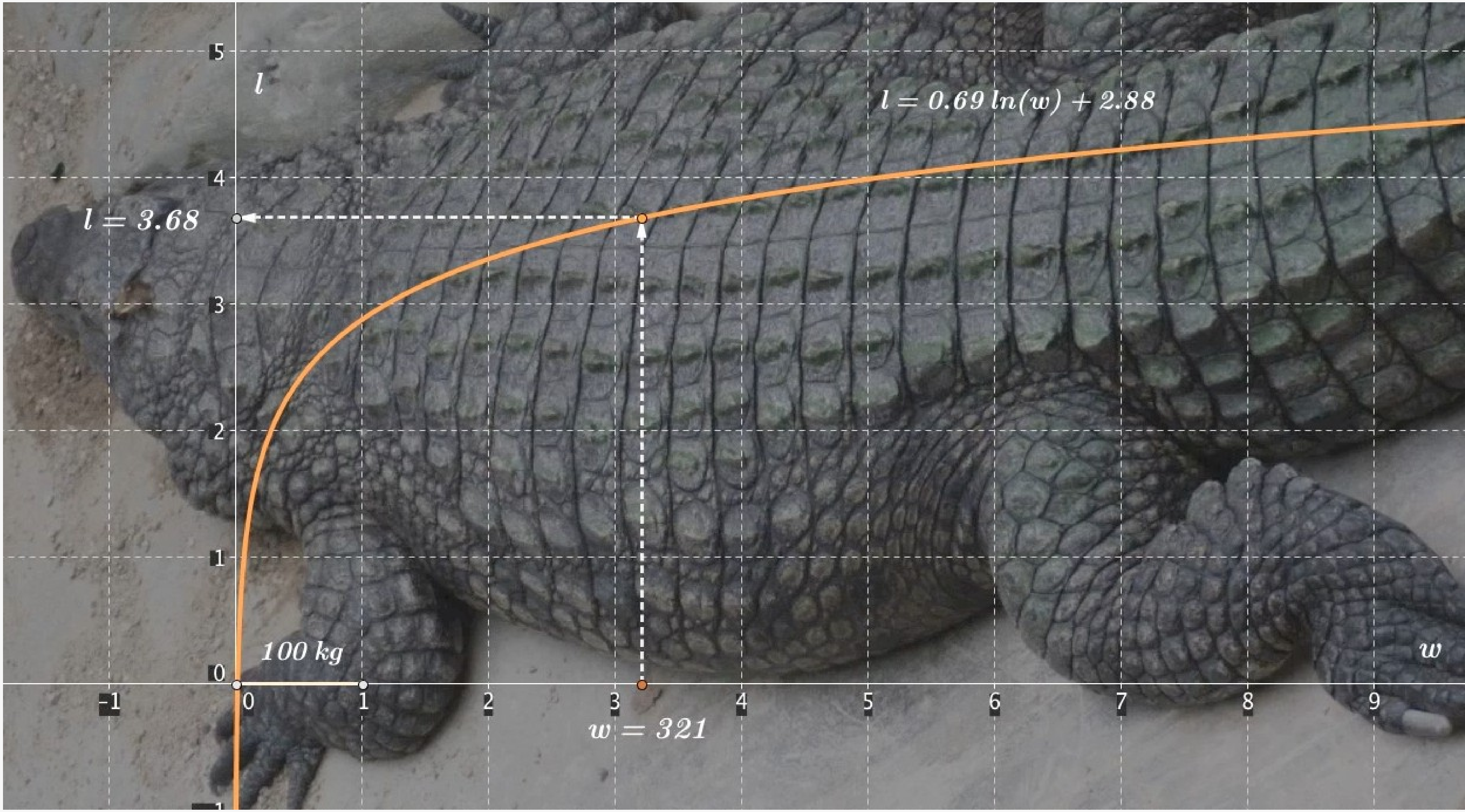

Abb. 1-5: Ein Bild der folgenden Video-Presentation, das die logarithmische Gewichts-Längen-Relation von Alligatoren zeigt

Wenn der Alligator auch nicht 'freundlich' sein mag, so zeigt er doch wie Naturgesetze mit logarithmischen Funktionen für Schätzungen benutzt werden können.

e) Ein 'nützlicher' Alligator oder was wir gelernt haben.

- Wir haben die Formel $l = f(w)$ (1) auf Seite 1-A dazu benutzt, die Länge l von Alligatoren als Funktion ihres Gewichts w algebraisch zu bestimmen, indem wir die w-Werte in Gl. (1) einsetzten .

- Wir haben gezeigt, dass die Länge durch den Graph der Funktion (erzeugt mit GeoGebra) ohne numerische Rechnung geschätzt werden kann.

- Um das Gewicht als Funktion der Länge zu berechnen, mussten wir die Umkehrfunktion von $l = f(w)$ bilden.

- Die numerisch gewonnenen Gewichtswerte bestätigten wir mit Hilfe der graphischen Darstellung von $l = f(w)$.

- Wir haben gezeigt, dass Gl. (1) nur in einem begrenzten w-Intervall sinnvoll ist.