



Gaußscher Algorithmus

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Fall A (regulär):

Das System ist eindeutig lösbar, es besitzt genau eine Lösung.

Fall B (singulär):

Es existiert keine eindeutig bestimmte Lösung

- Das System ist in sich widerspruchsvoll, es besitzt keine Lösung.
- Das System enthält Abhängigkeiten, es besitzt unendlich viele von einem oder mehreren Parametern abhängige Lösungen.

Der Fall von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten besitzt dieselben charakteristischen Eigenschaften der Lösbarkeit wie beliebig viel größere lineare Gleichungssysteme.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie analytisch und graphisch Lösungen folgender Gleichungssysteme:

$$\text{LGS 1: } \begin{cases} -0.5x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{LGS 2: } \begin{cases} -0.5x + y = 1 \\ -0.5x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{LGS 3: } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems: Lösung 1

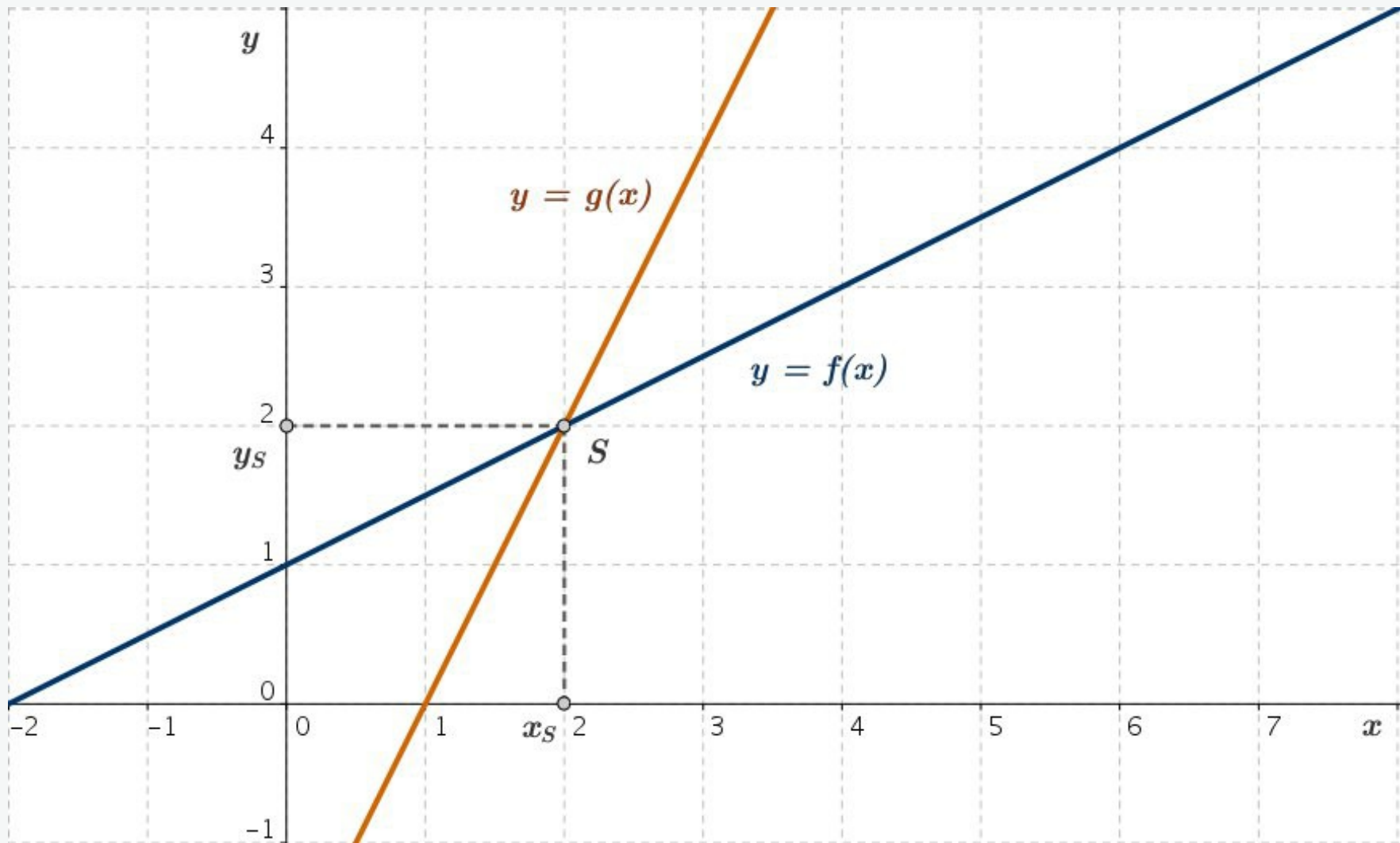


Abb. 3-1: Lineare Funktionen $y = 1 + 0.5x$ und $y = 2x - 2$

eine Lösung $(2, 2)$:
$$\begin{cases} -0.5x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems: Lösung 1

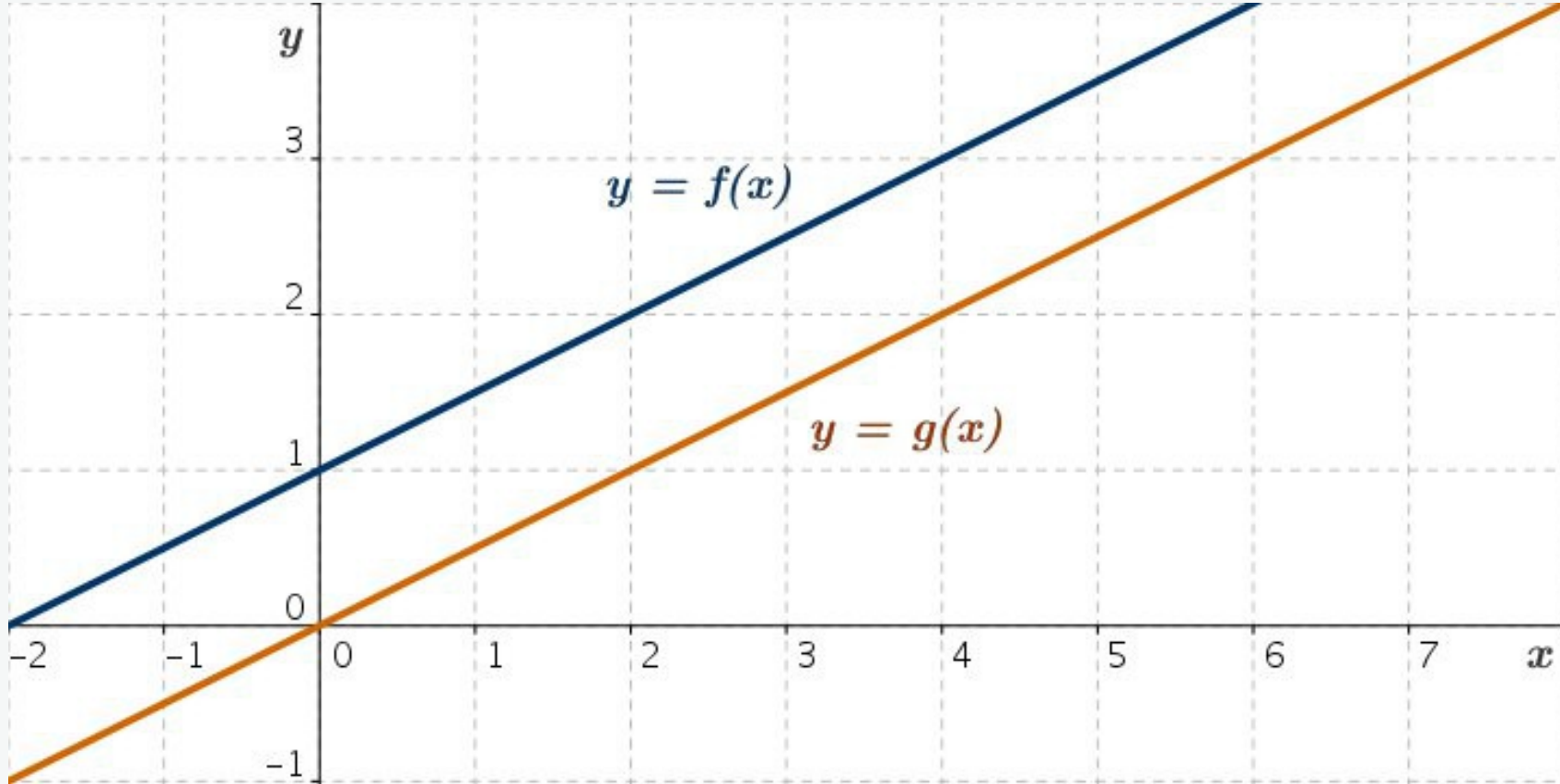


Abb. 3-2: Lineare Funktionen $y = 1 + 0.5 x$ und $y = 0.5 x$

$$\text{LGS 2: } \begin{cases} -0.5 x + y = 1 \\ -0.5 x + y = 0 \end{cases}$$

Zwei Geraden, $y = 1 + 0.5 x$ und $y = 0.5 x$, sind parallel zueinander und haben deswegen keinen gemeinsamen Punkt. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems: Lösung 1

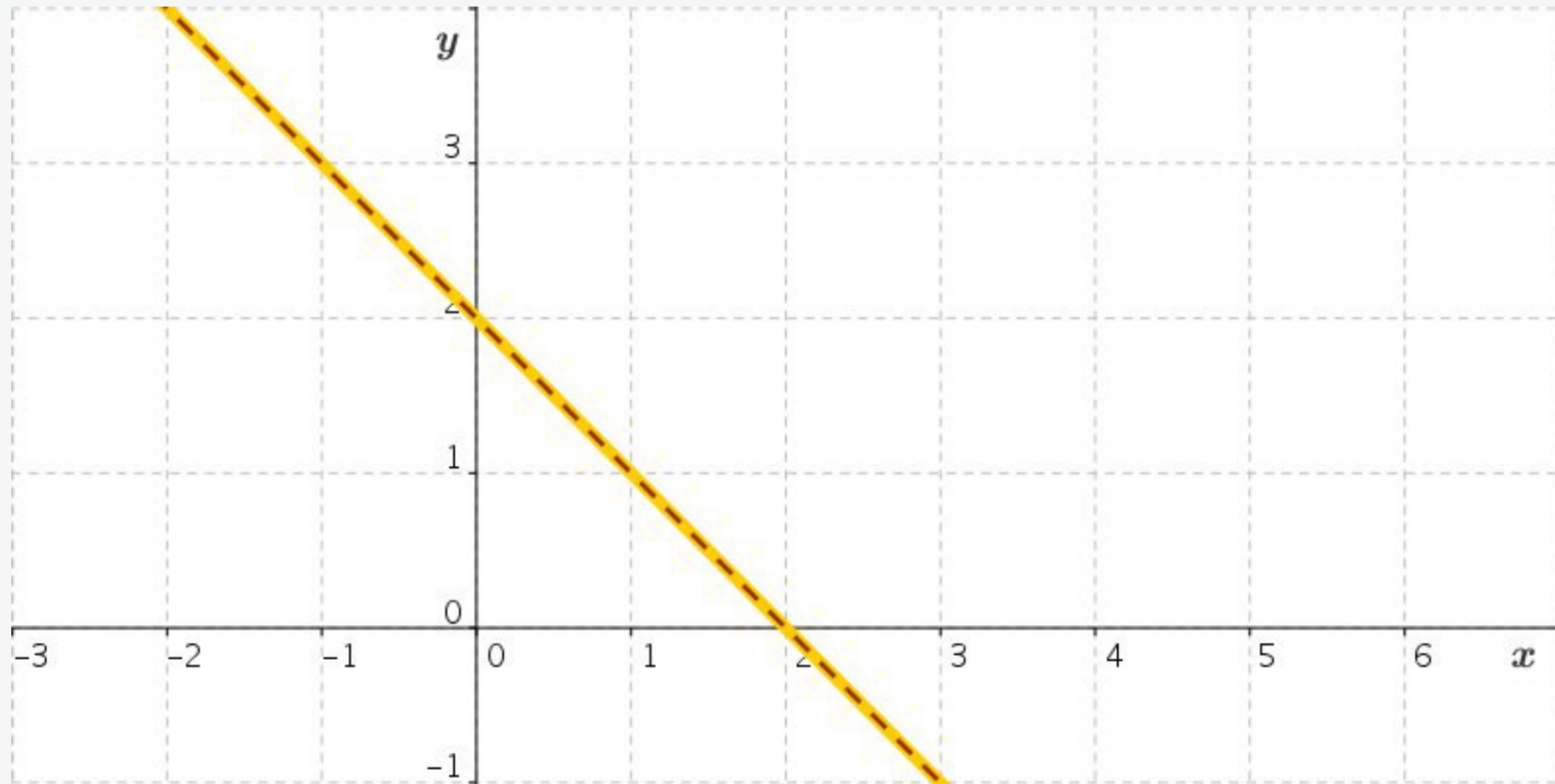


Abb. 3-3: Lineare Funktionen $y = 2 - x$ und $2y = 4 - 2x$

$$\text{LGS 3: } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

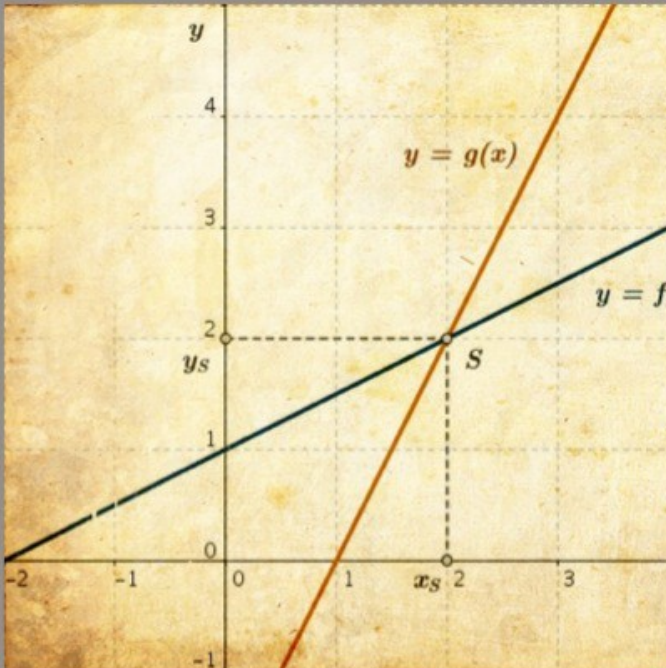
Die Gleichungen beschreiben gleiche Funktionen. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.



Carl Friedrich Gauß (1777-1855), genialer deutscher Mathematiker

Gaußscher Algorithmus

Im Folgenden wird das Gaußsche Eliminationsverfahren am Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen demonstriert.



Gaußscher Algorithmus: Beispiel

1. Schritt:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 : -x + y + z = 0 \\ G_2 : x - 3y - 2z = 5 \\ G_3 : 5x + y + 4z = 3 \end{array} \right.$$

Die erste Gleichung ist die Eliminationszeile und bleibt in den weiteren Umformungen unverändert. Diese Gleichung wird mit einem Faktor multipliziert.

Schritt 2: Elimination von x

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 + G_2 = \tilde{G}_1 : -2y - z = 5 \\ 5G_1 + G_3 = \tilde{G}_2 : 6y + 9z = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2y - z = 5 \\ 2y + 3z = 1 \end{array} \right.$$

Schritt 3: Elimination von y

$$\tilde{G}_1 + \frac{1}{3} \tilde{G}_2 = G^* : z = 3$$



Die beiden Gleichungen, die x und y , bzw. x , nicht enthalten bilden zusammen mit der Eliminationszeile ein gestaffeltes Gleichungssystem, aus dem der Reihe nach von unten nach oben die drei Unbekannten berechnet werden können.

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$-x + y + z = 0$$

$$-2y - z = 5$$

$$z = 3$$

Einzigste Lösung: $x = -1$, $y = -4$, $z = 3$

oder als Zahlentripel: $(-1, -4, 3)$

oder als Spaltenvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$



Finden Sie die Lösung folgender Gleichungssysteme:

Aufgabe 2:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y + 2z = 6 \\ 4x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3:

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 2x - y - 3z = -9 \\ -3x + y + 5z = 4 \end{cases}$$

Aufgabe 4:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

Aufgabe 5:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$



Finden Sie die Lösung folgender Gleichungssysteme:

Aufgabe 6:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{array} \right.$$

Aufgabe 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{array} \right.$$

Gaußscher Algorithmus: Lösungen 2-7

Lösung 2: $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 3$

Lösung 3: $x = -1, \quad y = 16, \quad z = -3$

Lösung 4: $x = 3, \quad y = 1, \quad z = 1$

Lösung 5: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = -2$

Lösung 6: $x_1 = x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1$

Lösung 7: $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -2$