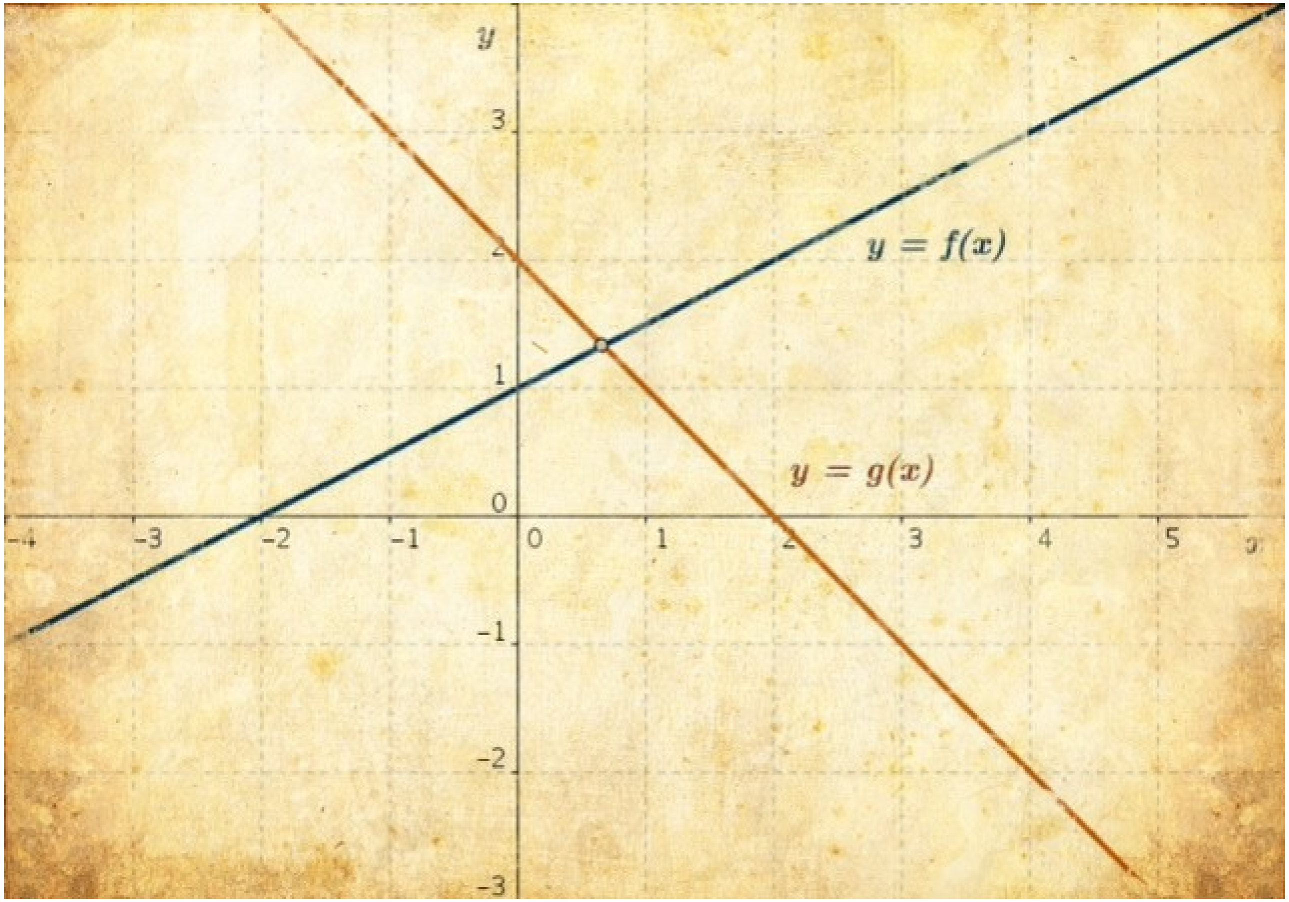

Lösung einer linearen Gleichung

Definition:

Eine Polynomgleichung vom Grad 1, also eine Gleichung, die sich in der Form

$$a\,x + b = 0\,, \qquad a \neq 0$$

schreiben lässt, nennt man eine lineare Gleichung.

Diese Form der Gleichung nennt man Normalform.

Frage 1:

Welche der folgenden Gleichungen sind lineare Gleichungen? Geben Sie ggf. Die Normalform der Gleichung an.

$a)$ $\quad 3\,x + 2 = 12$

$b)$ $\quad 3\,x + 2\,(4 - x) = 3\,(3 - x) - 5$

$c)$ $\quad 3\,x^2 + 2\,x = 4\,x^2 - 3$

$d)$ $\quad (2\,x - 1)(2 - 3\,x) = (4 + x)(2 - x)$

$e)$ $\quad x\,(2\,x - 1) = 2\,x^2 + 6$

a) $3x + 2 = 12$

Das ist eine lineare Gleichung, ihre Normalform lautet

$3x - 10 = 0$

b) $3x + 2(4 - x) = 3(3 - x) - 5$

Das ist eine lineare Gleichung, ihre Normalform lautet

$4x + 4 = 0$

c) $3x^2 + 2x = 4x^2 - 3$

Das ist eine quadratische Gleichung.

d) $(2x - 1)(2 - 3x) = (4 + x)(2 - x)$

Das ist eine quadratische Gleichung.

e) $x(2x - 1) = 2x^2 + 6$

Das ist eine lineare Gleichung, denn der x^2-Term hebt sich nach dem Auflösen weg. Die Normalform lautet

$x + 6 = 0$

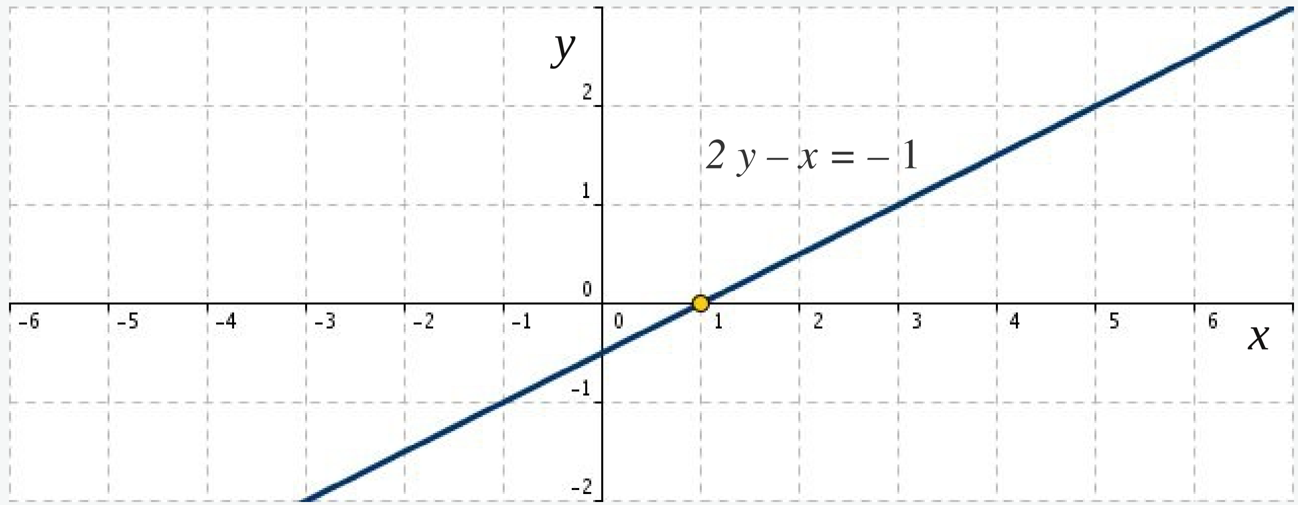

Abb. 1: Lineare Funktion $2\,y - x = -1$

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen $a\,x + b = 0 \quad (a \neq 0)$

besitzt genau eine Lösung $x = -\dfrac{b}{a}$

Die Lösung einer linearen Gleichung mit einer Variablen stimmt mit der Nullstelle der zugehörigen Funktion $y = a\,x + b$ überein.

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen lässt sich stets in folgender Form angeben

$$a\,x + b\,y = 0$$

Ein Zahlpaar (x, y), das diese lineare Gleichung zu einer wahren Aussage macht, heißt die Lösung dieser Gleichung.

Eine Gleichung mit zwei Variablen hat unendlich viele Lösungen, die, graphisch dargestellt, auf der Geraden a $x + b\,y = 0$ liegen.

Um zwei Variablen eindeutig festzulegen, reicht eine einzige Gleichung nicht aus. Erst ein System aus zwei Gleichungen kann ein Wertepaar (x, y) eindeutig festlegen, das sowohl die erste als auch die zweite Gleichung löst.

Beispiel:
$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 5x - 6y = 2 \end{cases}$$

Die Lösungsverfahren für LGS beruhen im wesentlichen auf der Tatsache, dass ein gegebenes LGS in ein äquivalentes LGS (mit derselben Lösungsmenge!) durch die beiden folgenden Äquivalenzumformungen überführt werden kann:

Äquivalenzumformungen für LGS:

- Eine Gleichung darf mit einer (von Null verschiedenen) Zahl k multipliziert werden.
- Eine Gleichung darf verändert werden dadurch, dass man ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung zu ihr addiert.

$$\begin{cases} G_1: & 3x + y = 15 \\ G_2: & 5x - 6y = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6G_1: & 18x + 6y = 90 \\ G_2: & 5x - 6y = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6G_1 + G_2: & 23x = 92 \\ G_2: & 5x - 6y = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{23}(6G_1 + G_2): & x = 4 \\ G_2: & 5x - 6y = 2 \end{cases}$$

$$L = \{\,(4, 3)\,\}$$

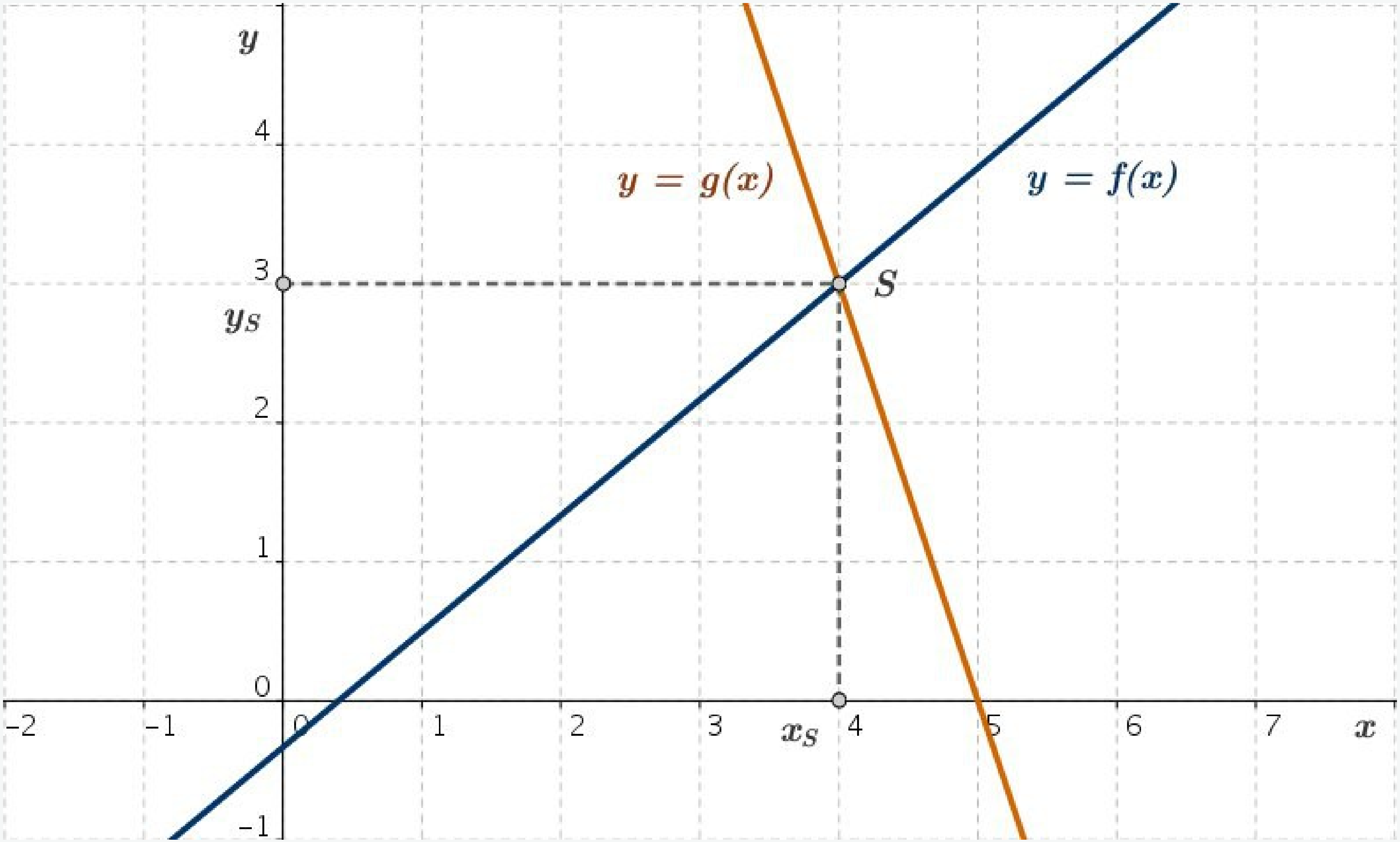

Abb. 2: Graphische Darstellung der Lösung eines LGSs

$$f(x) = \frac{5}{6}\,x - \frac{1}{3}\,, \qquad g(x) = -3\,x + 15$$

Lineares Gleichungssystem, das der Abbildung 2 entspricht:

$$\text{LGS:} \quad \begin{cases} 3x + y = 15 \\ 5x - 6y = 2 \end{cases}$$