Der Definitionsbereich einer Gleichung G wird wie folgt bestimmt:

- $G: \quad T_1(x) = T_2(x)$
- $D_1 = D(T_1(x)), \qquad D_2 = D(T_2(x))$
- $D(G) = D(T_1(x) = T_2(x)) = D_1 \cap D_2$
- $L \subseteq D$ – Lösungsmenge der Gleichung

$$G: \quad \frac{4}{x-2} = \sqrt{x-3} + \frac{x^2-1}{\sqrt{x-4}}$$

$$D_1 = D\left(\frac{4}{x-2}\right) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$D_2 = D\left(\sqrt{x-3}\right) = [3, \infty)$$

$$D_3 = D\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x-4}}\right) = (4, \infty)$$

$$D(G) = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = (4, \infty)$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Gleichungen:

$$G_1: \quad x^2 + 4x + 4 = 10$$

$$G_2: \quad 2x^2 + \sqrt{x - 7} = 3$$

$$G_3: \quad \frac{1}{x} + 3x(x - 4) = 0$$

$$G_4: \quad \frac{1}{x - 2} = \frac{x - 3}{x + 6}$$

$$G_5: \quad \frac{1}{x^2 - 4} = x^2 - 9$$

$$G_6: \quad \frac{1}{x^2 - 4} = x^2 - \frac{9}{x}$$

$$G_7: \quad \ln x = 3 - a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$G_1 : \quad x^2 + 4x + 4 = 10, \qquad D(G_1) = \mathbb{R}$$

$$G_2 : \quad 2x^2 + \sqrt{x - 7} = 3, \qquad D(G_2) = [\,7, \infty\,)$$

$$G_3 : \quad \frac{1}{x} + 3x(x - 4) = 0, \qquad D(G_3) = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$$

$$G_4 : \quad \frac{1}{x - 2} = \frac{x - 3}{x + 6}, \qquad D(G_4) = \mathbb{R} \setminus \{\,-6, 2\,\}$$

$$G_5 : \quad \frac{1}{x^2 - 4} = x^2 - 9, \qquad D(G_5) = \mathbb{R} \setminus \{\,-2, 2\,\}$$

$$G_6 : \quad \frac{1}{x^2 - 4} = x^2 - \frac{9}{x}, \qquad D(G_6) = \mathbb{R} \setminus \{\,-2, 0, 2\,\}$$

$$G_7 : \quad \ln x = 3 - a \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad D(G_7) = (0, \infty)$$

Äquivalente Gleichungen

Eine Gleichung lösen heißt, alle Elemente des Grundbereiches zu finden, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage erzeugen. Jedes solche Element des Grundbereichs heißt Lösung der Gleichung. Man sagt auch: Eine Lösung erfüllt die Gleichung. Alle Lösungen zusammen bilden die Lösungsmenge L einer Gleichung. Die Lösungsmenge ist abhängig vom Variablengrundbereich.

Beispiel:

a) $\quad x^2 = 16, \qquad x \in \mathbb{N}, \qquad L = \{4\}$

b) $\quad x^2 = 16, \qquad x \in \mathbb{Z}, \qquad L = \{-4,\ 4\}$

Gleichungen heißen lösungsgleich oder äquivalent, wenn sie, in demselben Grundbereich betrachtet, die gleichen Lösungen haben.

Bestimmen Sie, ob folgende Gleichungen in dem gegebenen Variablengrundbereich äquivalent sind

Aufgabe 4:

1) $G_1 : \; 2x + 1 = 3, \qquad G_2 : \; 2x = 2, \qquad x \in \mathbb{R}$

2) $G_1 : \; 7x + 5 = 19, \qquad G_2 : \; x(x - 1) = 2$

$a) \; x \in \mathbb{N}, \qquad b) \; x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5:

1) $G_1 : \; 2x - 6 = 0, \qquad G_2 : \; x^2 - 5x + 6 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$

2) $G_1 : \; x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$

$G_2 : \; (x - 1)(x - 2) = 0$

$x \in \mathbb{R}$

3) $G_1 : \; 3x + 1 = 7$

$G_2 : \; (3x + 1)(x - 1) = 7(x - 1)$

1) $G_1 : \; 2x + 1 = 3, \qquad L(G_1) = \{ 1 \}$

$G_2 : \; 2x = 2, \qquad L(G_2) = \{ 1 \}$

Auf der Menge der reellen Zahlen sind diese Gleichungen äquivalent, weil sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

2) $G_1 : \; 7x + 5 = 19, \qquad L(G_1) = \{ 2 \}$

$G_2 : \; x(x - 1) = 2, \qquad L(G_2) = \{ -1, 2 \}$

Auf der Menge der natürlichen Zahlen sind diese Gleichungen äquivalent

$$L(G_1) = L(G_2) = \{ 2 \}$$

Auf der Menge der reellen Zahlen sind diese Gleichungen nicht äquivalent

$$L(G_1) = \{ 2 \} \neq L(G_2) = \{ -1, 2 \}$$

1) $G_1 : \; 2x - 6 = 0, \qquad L(G_1) = \{ 3 \}$

$G_2 : \; x^2 - 5x + 6 = 0, \qquad L(G_2) = \{ 2, 3 \}$

$L(G_1) \neq L(G_2)$

Die Gleichungen sind nicht äquivalent.

2) $G_1 : \; x(x - 1) - 2(x - 1) = 0, \qquad L(G_1) = \{ 1, 2 \}$

$G_2 : \; (x - 1)(x - 2) = 0, \qquad L(G_2) = \{ 1, 2 \}$

$L(G_1) = L(G_2)$

Die Gleichungen sind äquivalent.

3) $G_1 : \; 3x + 1 = 7, \qquad L(G_1) = \{ 2 \}$

$G_2 : \; (3x + 1)(x - 1) = 7(x - 1), \qquad L(G_2) = \{ 1, 2 \}$

$L(G_1) \neq L(G_2)$

Die Gleichungen sind nicht äquivalent.

Gleichung mit einer Unbekannten:

$$G : \quad T_1(x) = T_2(x) \quad \rightarrow \quad x = a \quad \rightarrow \quad T_1(a) = T_2(a)$$

$x = a$ – Lösung der Gleichung G

Umformung

$$\boxed{G : \quad T_1(x) = T_2(x) \qquad \rightarrow \qquad \tilde{G} : \quad \tilde{T}_1(a) = \tilde{T}_2(a)}$$

$L(G)$ – Lösungsmenge der Gleichung G

$L(\tilde{G})$ – Lösungsmenge der Gleichung $\tilde{G}$

$L(G) = L(\tilde{G})$ – äquivalente Umformung

$L(G) \subset L(\tilde{G})$ – nichtäquivalente Umformung

$L(\tilde{G}) \subset L(G)$ – nichtäquivalente Umformung

Beispiel 1: $G_1 : \quad \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{2x + 3} = 3$

$$D(\sqrt{x-2}) = [2, \infty), \qquad D(\sqrt{2x+3}) = [-1.5, \infty)$$

$$D(G_1) = D(\sqrt{x-2}) \cap D(\sqrt{2x+3}) = [2, \infty)$$

Umformungsformel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$$G_1 \overset{\overbrace{\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{a\,b}}}{\longrightarrow} G_2, \qquad G_2 = \sqrt{2x^2 - x - 6} = 3$$

$$D(G_2) = D(\sqrt{2x^2 - x - 6}) = (-\infty, -1.5] \cup [2, \infty)$$

$y = 2x^2 - x - 6$ – eine nach oben geöffnete Parabel, deren Schnittpunkte mit der x-Achse durch folgende Gleichung bestimmt werden

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$2x^2 - x - 6 = 2(x-2)(x+1.5) = 0$$

$$(-\infty, -1.5] \cup [2, \infty): \quad 2x^2 - x - 6 \geqslant 0$$

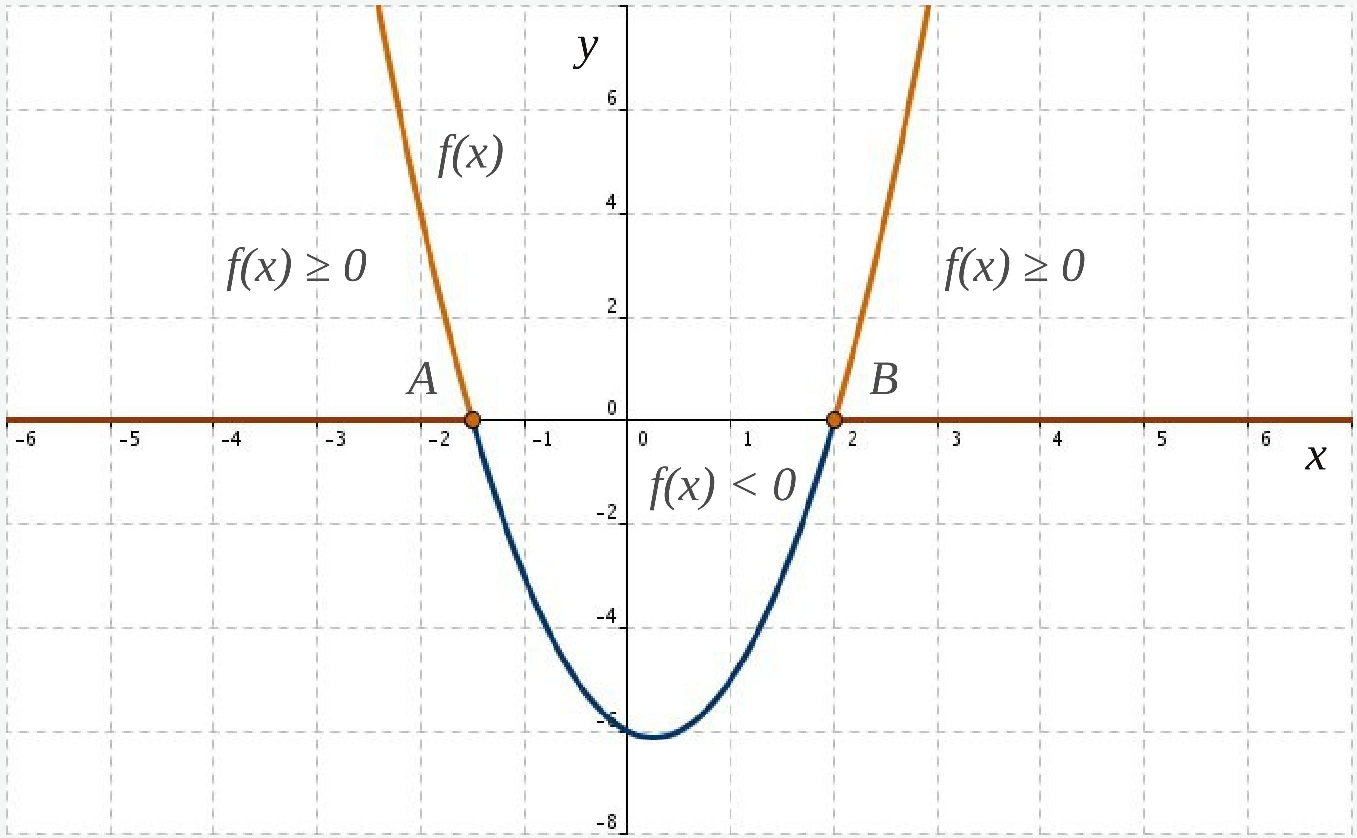

Abb. 1: Funktion $f(x) = 2x^2 - x - 6$

$$f(x) = 2x^2 - x - 6 = 2(x - 2)(x + 1.5)$$

Die x-Koordinaten der Schnittpunkten A und B teilen den Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ in zwei Bereiche:

$$x \in (-\infty, \; -1.5] \cup [2, \; \infty): \quad f(x) \geqslant 0$$

$$x \in (-1.5, \; 2): \quad f(x) < 0$$

$$D(G_1) = [2, \ \infty)$$

$$D(G_2) = (-\infty, \ -1.5] \cup [2, \ \infty)$$

$$D(G_1) \subset D(G_2)$$

Die Umformung erweiterte den Definitionsbereich der Ausgangsgleichung. Die Gleichungen

$$G_1 : \quad \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{2x+3} = 3, \qquad G_2 : \quad \sqrt{2x^2 - x - 6} = 3$$

sind nicht äquivalent!

$$L(G_1) = \{3\}, \qquad L(G_2) = \{-2.5, \ 3\}, \qquad -2.5 \notin D(G_1)$$

$$G_1 : \quad lg\,(x-5)^2 = 2, \qquad D\,(G_1) = (-\infty\,,\ 5)\ \cup\ (5,\ \infty)$$

$$D\,(lg\ x) = (0,\ \infty)\,, \qquad x > 0$$

$$lg\ x^n = n\,lg\ x \qquad \Rightarrow \qquad lg\,(x-5)^2 = 2\,lg\,(x-5)$$

$$G_1 \quad \xrightarrow{\overbrace{}^{lg\ x^n\ =\ n\ lg\ x}} \quad G_2\,, \qquad G_2 : \quad 2\,lg\,(x-5) = 2\,, \qquad D\,(G_2) = (5,\ \infty)$$

$$D\,(G_2) \subset D\,(G_1)$$

Die Umformung verringerte den Definitionsbereich der Ausgangsgleichung. Die Gleichungen

$$G_1 : \quad lg\,(x-5)^2 = 2, \qquad G_2 : \quad 2\,lg\,(x-5) = 2$$

sind nicht äquivalent!

$$L\,(G_1) = \{\,-5,\ 15\,\}\,, \qquad L\,(G_2) = \{\,15\,\}\,, \qquad -5 \notin D\,(G_2)$$

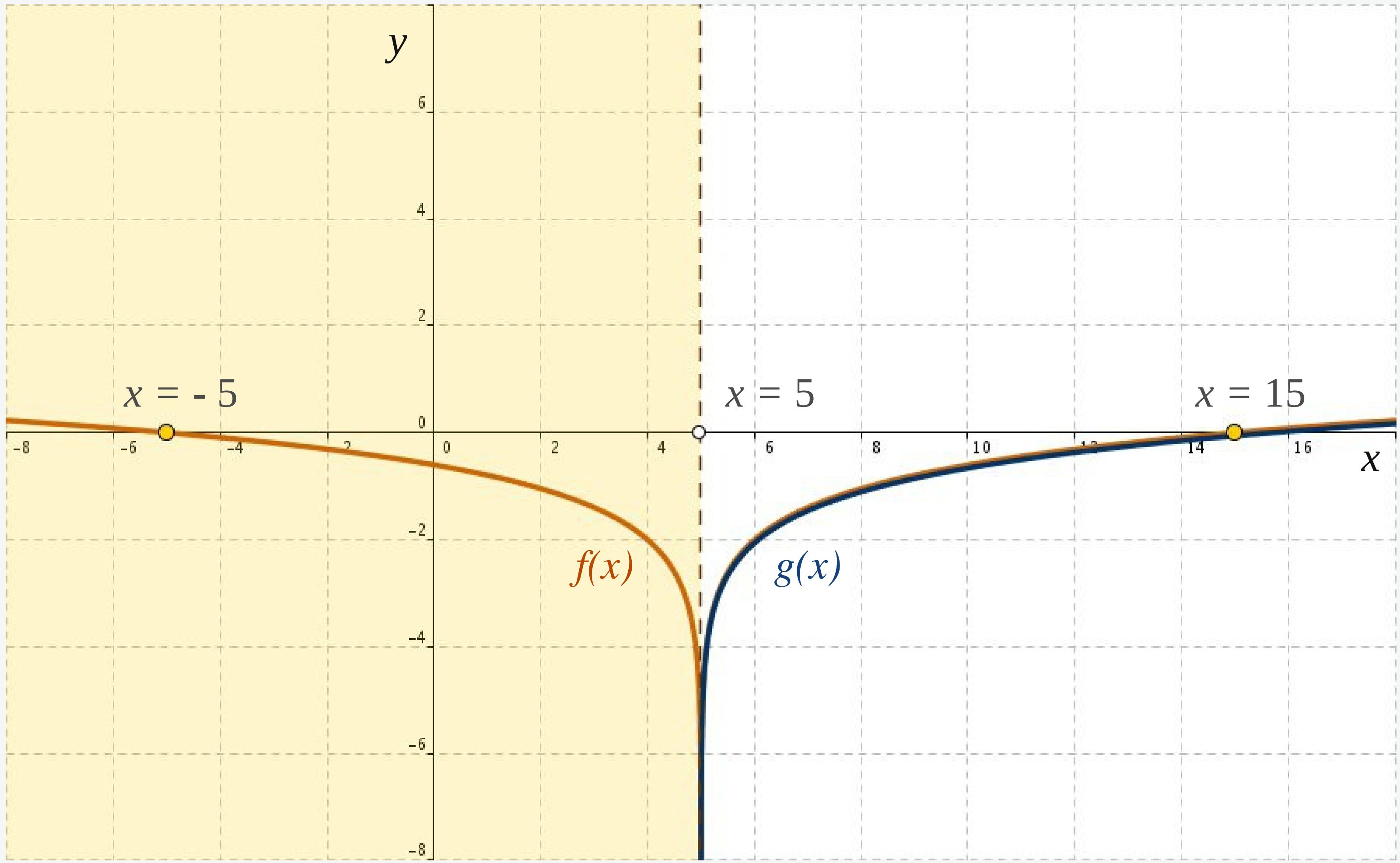

Abb. 2: Funktionen f (x) und g (x)

$$f(x) = lg\,(x - 5)^2 - 2, \qquad D(f(x)) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

$$g(x) = 2\,lg\,(x - 5) - 2, \qquad D(g(x)) = (5, \infty)$$