Würzburg

Gleichungen

Diophantos von Alexandria (um 250 n. Chr.), griechischer Mathematiker.

Diophantos behandelte lineare und quadratische Gleichungen. Bei ihm finden sich erste Ansätze algebraischer Bezeichnungsweisen und Verfahren. Nach ihm benannt sind die sogenannten diophantischen Gleichungen.

Die griechischen Mathematiker widmeten sich der Geometrie. Selbst arithmetische Probleme nahmen sie oft mit geometrischen Mitteln in Angriff. Am Ausgang der Antike begegnet uns mit Diophantos zum ersten Mal ein mit der Algebra verbundener Mathematiker, und man darf ihn als einen der Begründer dieser Disziplin ansehen.

Diophants Ziel war es, darzulegen, wie man zu Problemen Gleichungen aufstellt und mit deren Hilfe diese Probleme löst. Dabei gibt er einige Verfahrensregeln an, die wir heute als Verfahren äquivalenter Umformungen benutzen (etwa Subtraktion der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung) und schafft somit Ansätze eines Lösungskalküls.

(Duden, Mathematik)

Grundbereich (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

Variable (z.B. $x, y, z, t, u, v, \ldots$)

Die Variablen können jeden Wert des Grundbereiches annehmen.

Konstante (z.B. $a, b, c, \ldots$)

behält einen festen Wert

Term $\left(\text{z.B.} \quad a^2 + 2b - 5, \quad \frac{x}{x^2+1}\right)$

mathematisch sinnvolle Zeichenfolge (Buchstaben, Zahlen, Rechenzeichen)

$$T(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$T(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2$$

Man unterscheidet:

Identische Gleichungen: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

gültig für jede Belegung von a und b

Funktionsgleichungen: $y = 4x^2 - 6x + 1$

Bestimmungsgleichungen: $x^3 - 5x = 6 - 2x^2$

Definition:

Eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck, bestehend aus zwei Termen, die durch das Gleichheitszeichen verbunden sind. Die beiden Terme heißen linke bzw. rechte Seite der Gleichung.

Gleichheitszeichen

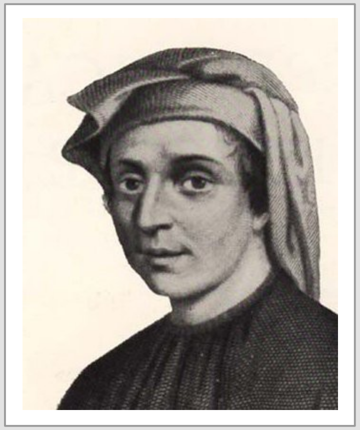
$$\downarrow$$

linke Seite $\rightarrow$ $\boxed{T_1 = T_2}$ $\leftarrow$ *rechte Seite*

Beispiele:

$$3\,(a + b) = a - b$$

$$2\,x^2 + 3\,x = 16$$



Leonardo Fibonacci
(etwa 1180 bis etwa 1250)

Der Begriff Gleichung geht auf den italienischen Mathematiker Leonardo Fibonacci von Pisa zurück.

Leonardo Fibonacci von Pisa war Rechenmeister in Pisa und gilt als der bedeutendste Mathematiker des Mittelalters. Bekannt sind heute vor allem die nach ihm benannten Fibonacci-Zahlen.

Gleichungen, in denen keine Variablen auftreten, sind (wahre oder falsche) Aussagen

$2 \cdot 16 = 32$ – ist eine wahre Aussage

$2 + 16 = 32$ – ist eine falsche Aussage

Zahlen, Variablen und mit Hilfe der Rechenzeichen sowie anderer mathematischer Symbole sinnvoll aus ihnen zusammengesetzte Ausdrücke heißen Terme. Treten in solchen Termen Variablen auf, so muss angegeben werden, für welchen Bereich ein Term definiert ist.

Beispiele:

$$2\,, \quad \frac{2}{3}\,, \quad \sqrt{16}$$

$$4\,(a+b)\,, \quad 3\,x\,, \quad -x^2\,y\,, \qquad a\,,\,b\,,\,x\,,\,y\,, \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{a}\,, \quad a \in [\,0,\ \infty\,)$$

$$\sqrt{2-x}\,, \quad x \in (\,-\infty\,,\,2\,]$$

Grundbegriffe: Definitionsbereich eines Terms

Nicht immer sind die Terme, welche Variablen enthalten, für den gesamten Grundbereich der Gleichung erklärt, d.h die Variablen in diesen Termen stehen nicht stellvertretend für alle Elemente des Grundbereiches. Die Menge der Elemente aus dem Grundbereich, für welche die Variablen eines Terms stehen können, nennt man den Definitionsbereich des Terms und sagt, der Term ist für diese Menge definiert.

Beispiel 1:

$$G: \quad \frac{2}{x} = \sqrt{x}$$

$$D\left(\frac{2}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad D\left(\sqrt{x}\right) = [\,0,\ \infty\,)\,, \qquad D\left(\frac{2}{x}\right) \neq D\left(\sqrt{x}\right)$$

Die Definitionsbereiche der Terme, die unterschiedlich sein können, bestimmen den Definitionsbereich der Gleichung.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Terme

a) $\dfrac{1}{x}, \qquad \dfrac{1}{x - 5}$

b) $\dfrac{1}{x^2}, \qquad \dfrac{1}{x^2 - 4}$

c) $\sqrt{x}, \qquad \sqrt{x - 3}, \qquad \sqrt{7 - x}$

d) $\log_a x, \qquad e^x$

e) $\dfrac{x}{x - 2}, \qquad \dfrac{x}{x^2 + 4}$

a) $D\left(\dfrac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}, \qquad D\left(\dfrac{1}{x-5}\right) = \mathbb{R} \setminus \{\,5\,\}$

b) $D\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}, \qquad D\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right) = \mathbb{R} \setminus \{\,-2,\ 2\,\}$

c) $D\left(\sqrt{x}\right) = [\,0,\ \infty\,), \qquad D\left(\sqrt{x-3}\right) = [\,3,\ \infty\,)$

$D\left(\sqrt{7-x}\right) = (-\infty\,,\ 7\,]$

d) $D\,(\log_a x) = (0,\ \infty), \qquad D\,(e^x) = \mathbb{R}$

e) $D\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = \mathbb{R} \setminus \{\,2\,\}, \qquad D\left(\dfrac{x}{x^2+4}\right) = \mathbb{R}$

Definition:

Der Definitionsbereich einer Gleichung ist die Menge der Elemente des Grundbereiches der Gleichung, für die jeder ihrer Terme definiert ist.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Gleichungen

$$a)\quad G:\quad \frac{1}{x-3} = \sqrt{x-2}$$

$$b)\quad G:\quad \frac{1}{x^2-4} = \sqrt{x-1}$$

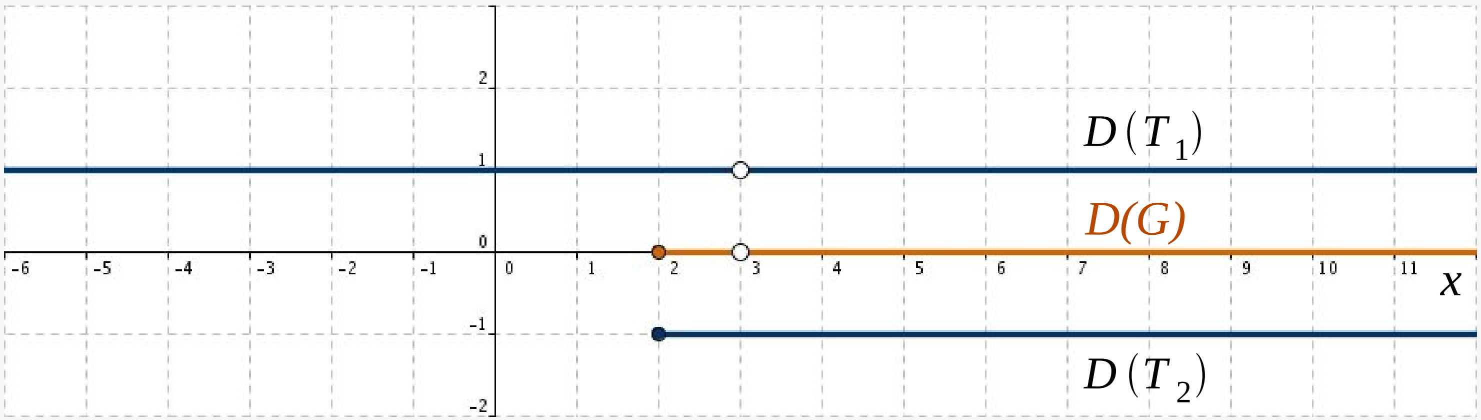


Abb. 1-1: Graphische Darstellung des Bereiches D(G) (a)

$$G : \quad \frac{1}{x - 3} = \sqrt{x - 2}$$

$$T_1 = \frac{1}{x - 3}, \qquad T_2 = \sqrt{x - 2}$$

$$D(T_1) = \mathbb{R} \setminus \{ 3 \}, \qquad D(T_2) = [2, \infty)$$

$$D(G) = D(T_1) \cap D(T_2) = [2, 3) \cup (3, \infty)$$

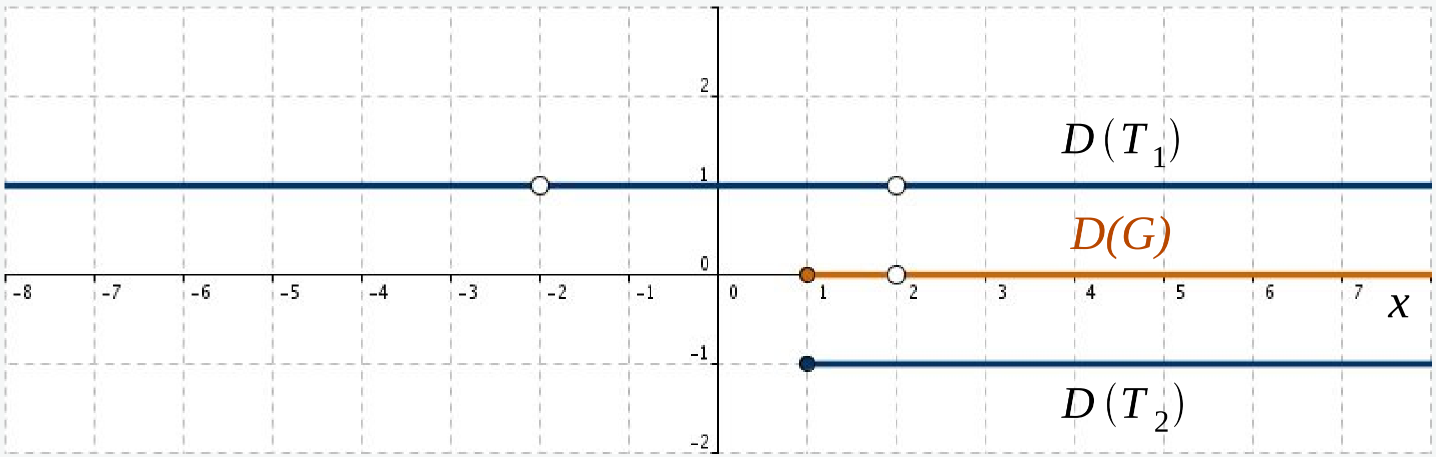


Abb. 1-2: Graphische Darstellung des Bereiches D(G) (b)

$$G: \quad \frac{1}{x^2 - 4} = \sqrt{x - 1}$$

$$T_1 = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x - 2)\,(x + 2)}\,, \qquad T_2 = \sqrt{x - 1}$$

$$D(T_1) = \mathbb{R} \setminus \{-2, \; 2\}\,, \qquad D(T_2) = [\,1, \; \infty\,)$$

$$D(G) = D(\,T_1\,) \cap D(T_2) = [\,1, \; 2\,) \cup (2, \; \infty)$$