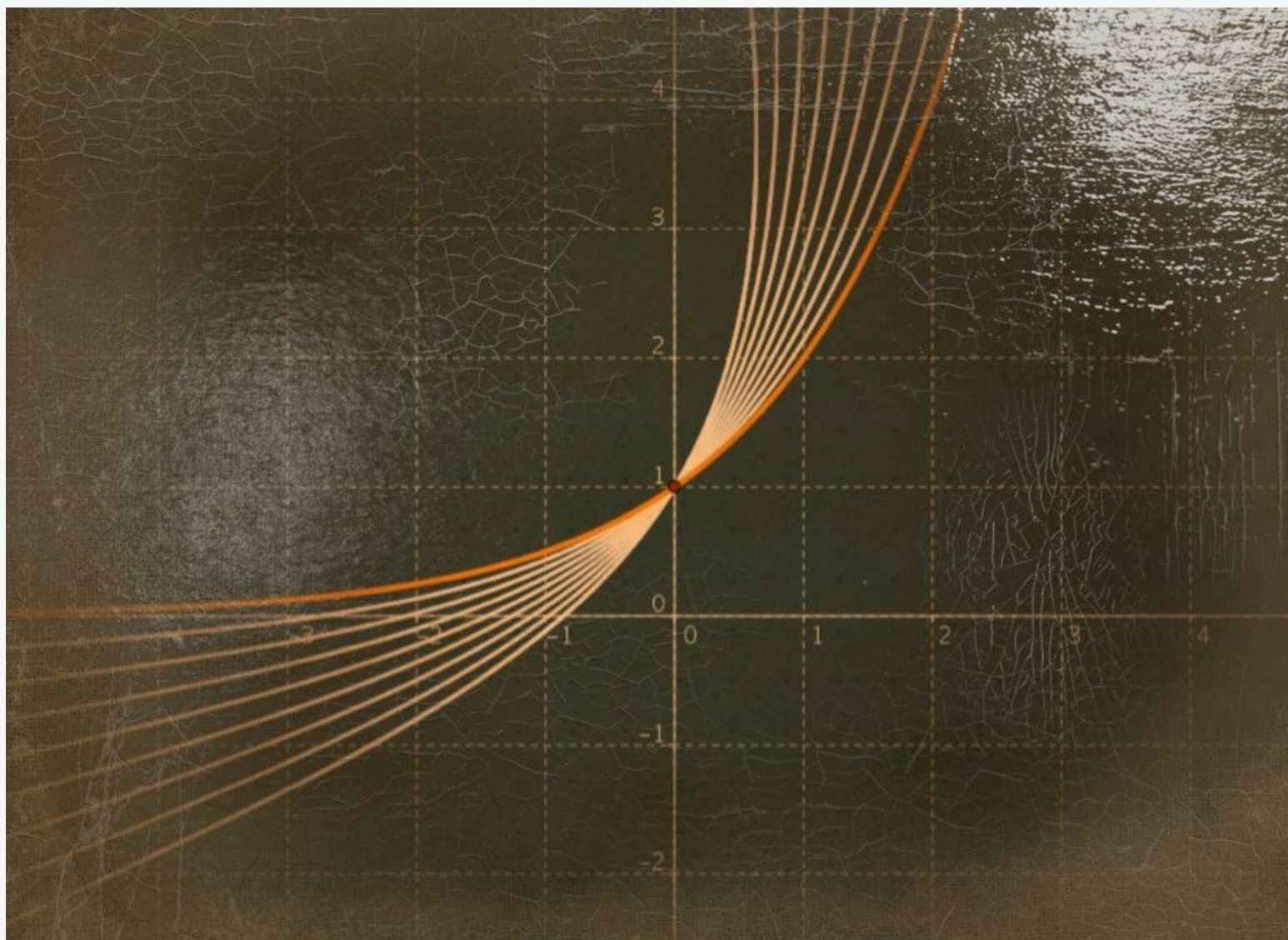




Monotonie

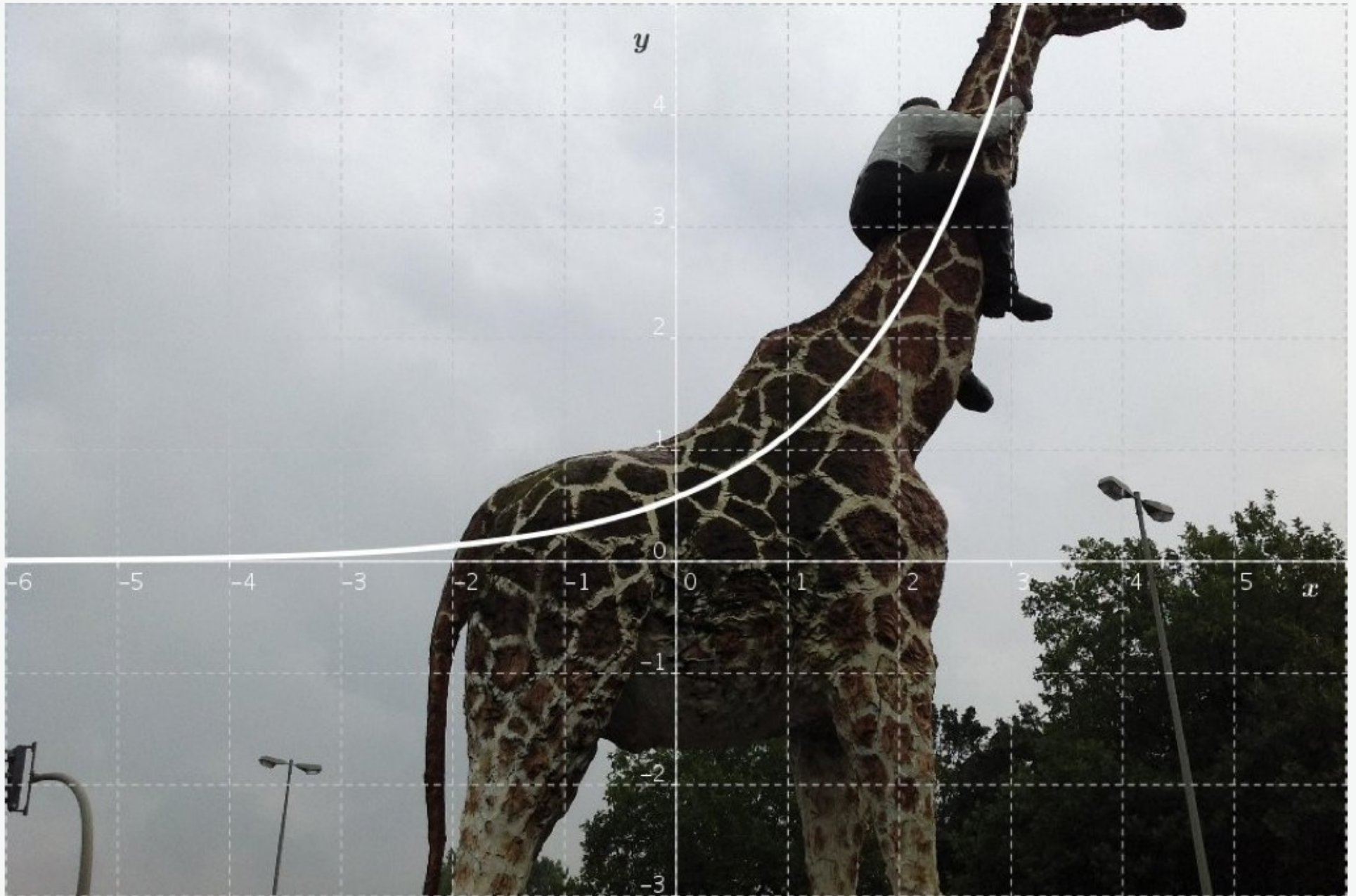


Abb. : Monoton wachsend

Definition:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall I des Definitionsbereiches monoton wachsend, wenn für alle

$$x_1, x_2 \in I \subset D, \quad x_1 < x_2$$

gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$,

sie heißt streng monoton wachsend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$.

Im Folgenden werden Beispiele von drei Funktionen gezeigt.

Monoton wachsende Funktion: Beispiel 1

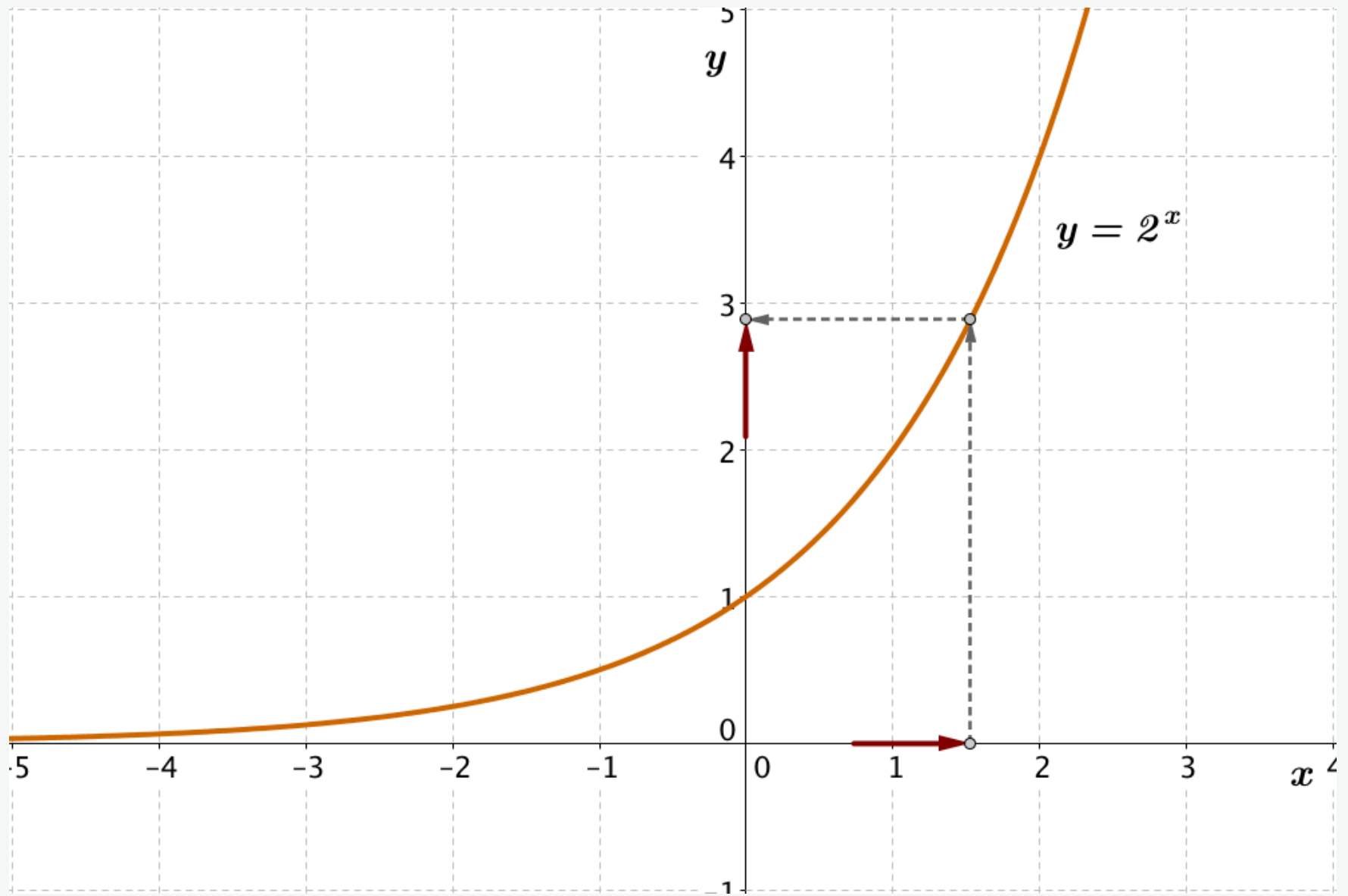


Abb. 1-1: Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist eine streng monoton wachsende Funktion

Monoton wachsende Funktion: Beispiel 2

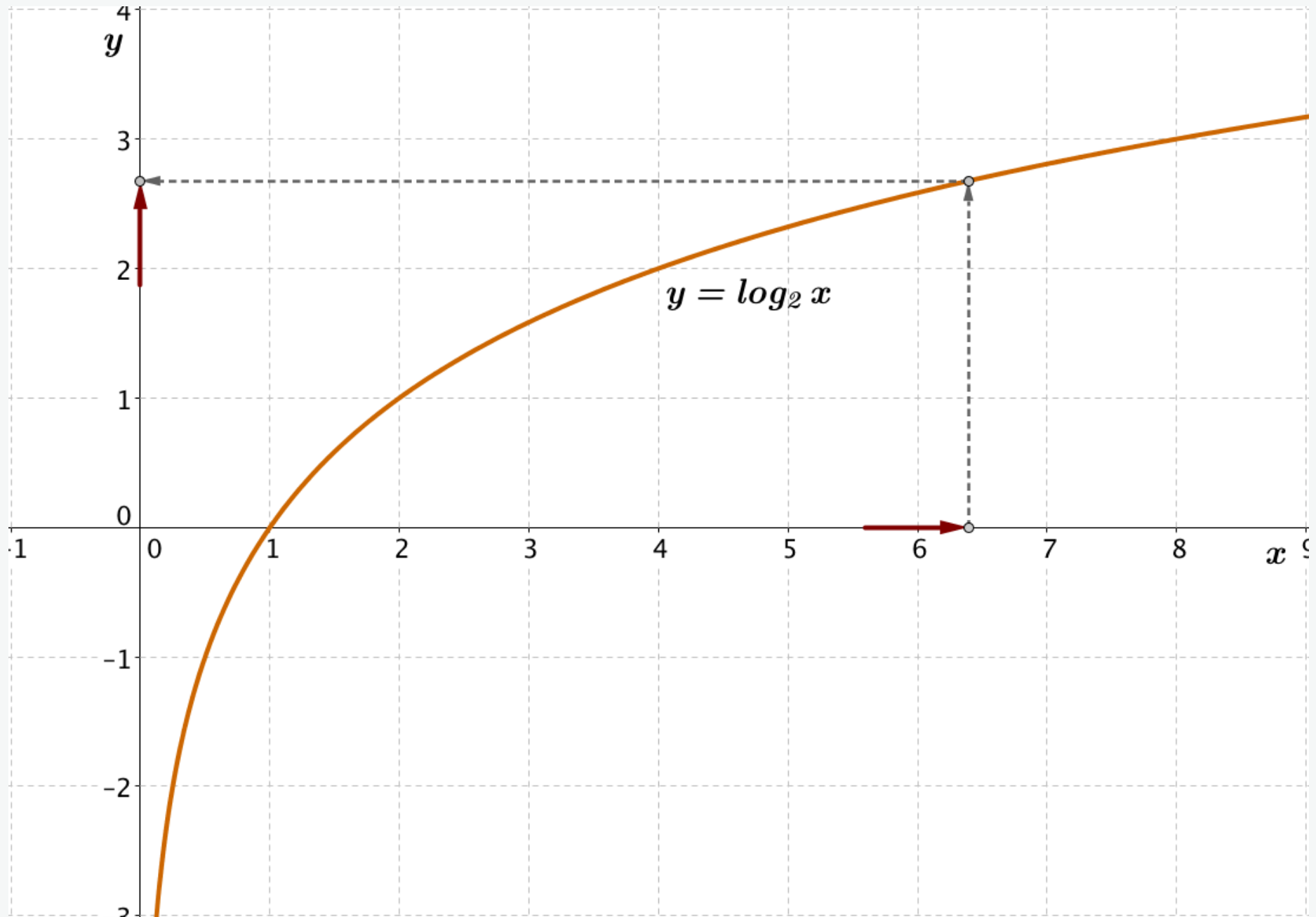


Abb. 1-2: Die Logarithmusfunktion zur Basis 2 ist eine streng monoton wachsende Funktion

Monoton wachsende Funktion: Beispiel 3

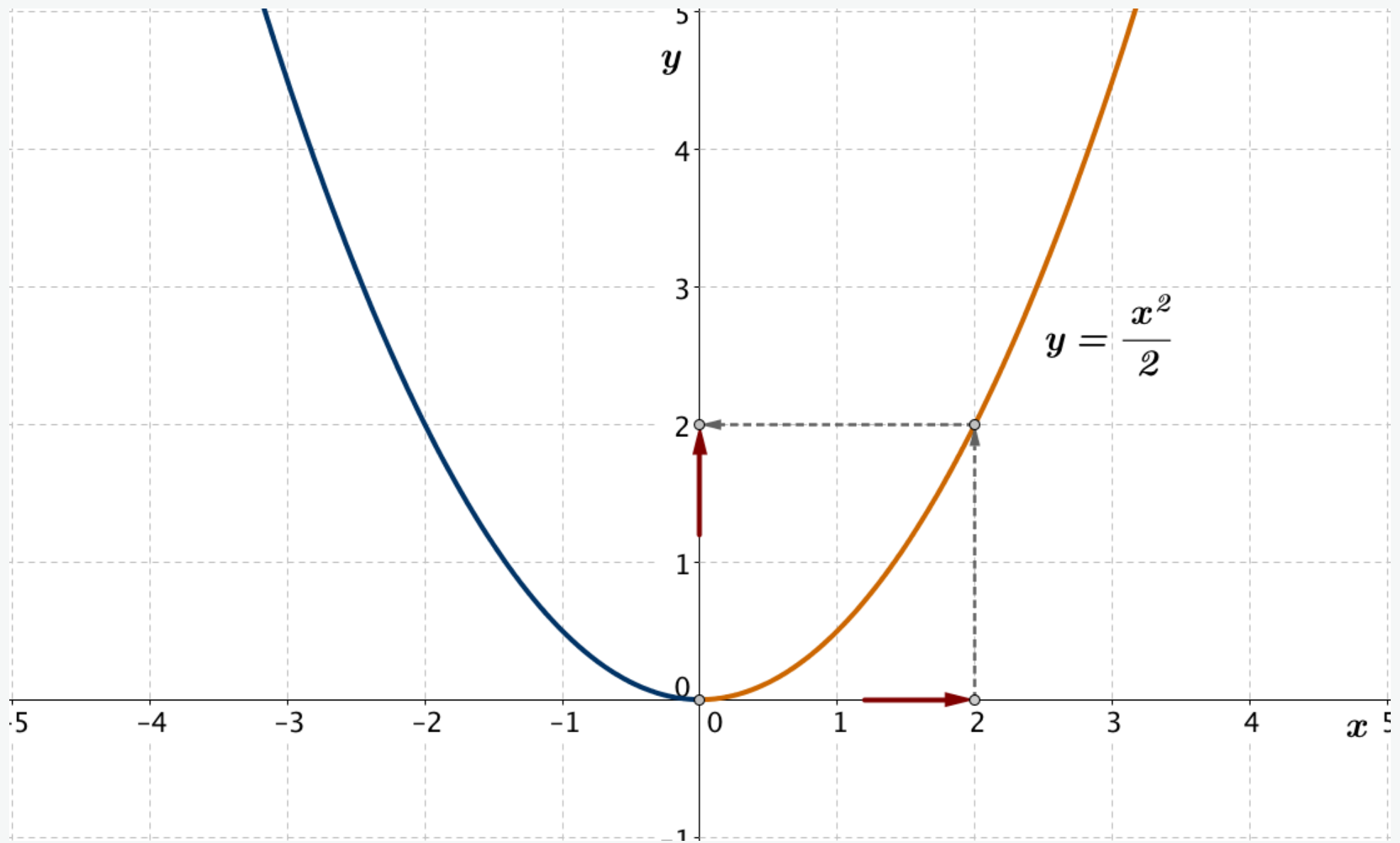


Abb. 1-3: Die quadratische Funktion $y = x^2/2$ ist im Bereich positiver x eine streng monoton wachsende Funktion.

Beispiel 1: Abb. 1-1. $y = 2^x$

Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist im ganzen Bereich eine streng monoton wachsende Funktion.

Beispiel 2: Abb. 1-2. $y = \log_2 x$

Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist im ganzen Bereich eine streng monoton wachsende Funktion.

Beispiel 3: Abb. 1-3. $y = \frac{x^2}{2}, \quad I = [0, +\infty)$

Die quadratische Funktion ist im Bereich I eine streng monoton wachsende Funktion.

Definition:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall I des Definitionsbereiches monoton fallend, wenn für alle

$$x_1, x_2 \in I \subset D, \quad x_1 < x_2$$

gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$,

sie heißt streng monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$.

Im Folgenden werden Beispiele von drei Funktionen gezeigt.

Monoton fallende Funktion: Beispiel 1

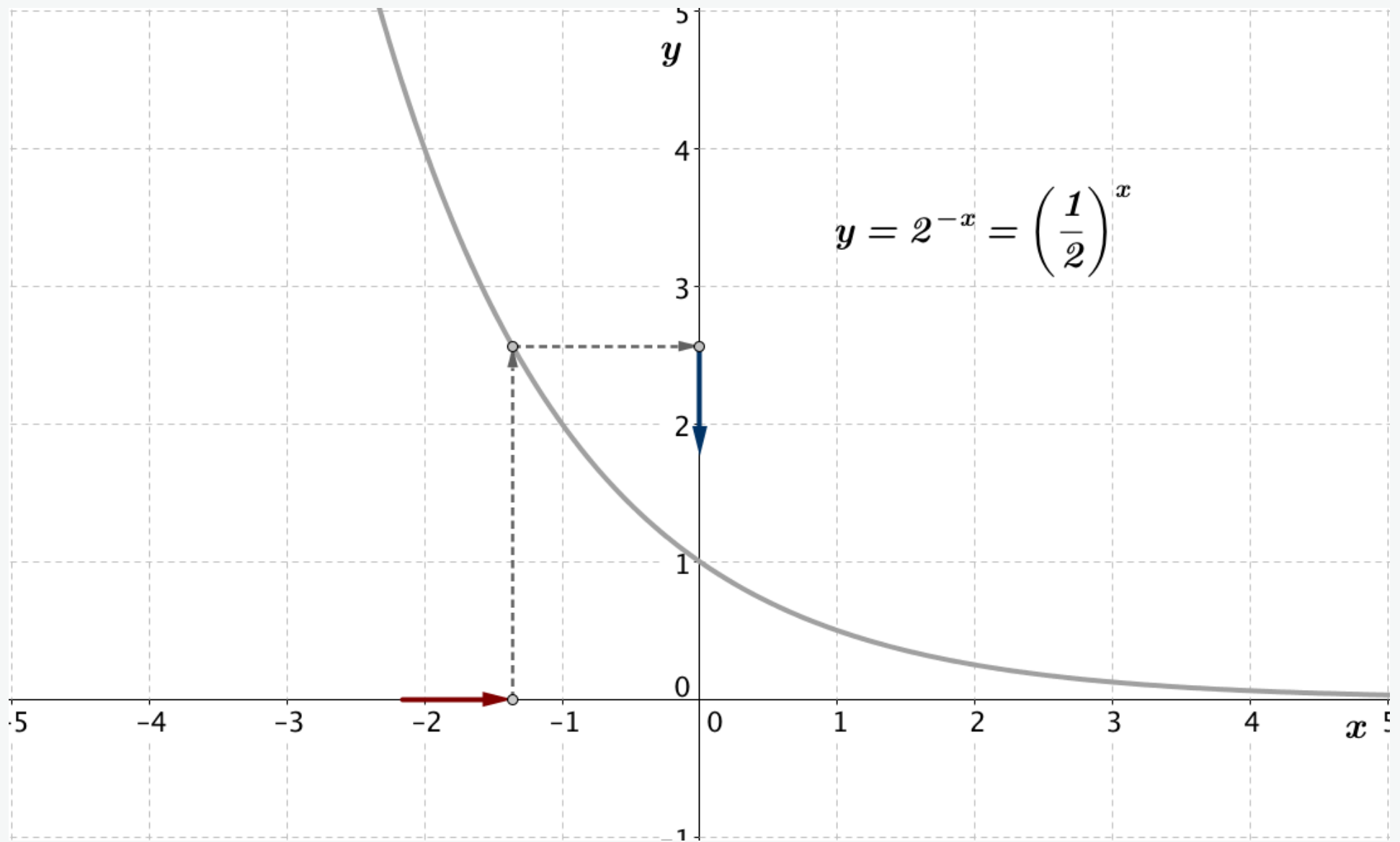


Abb. 2-1: Die Exponentialfunktion zur Basis $1/2$ ist eine streng monoton fallende Funktion

Monoton fallende Funktion: Beispiel 2

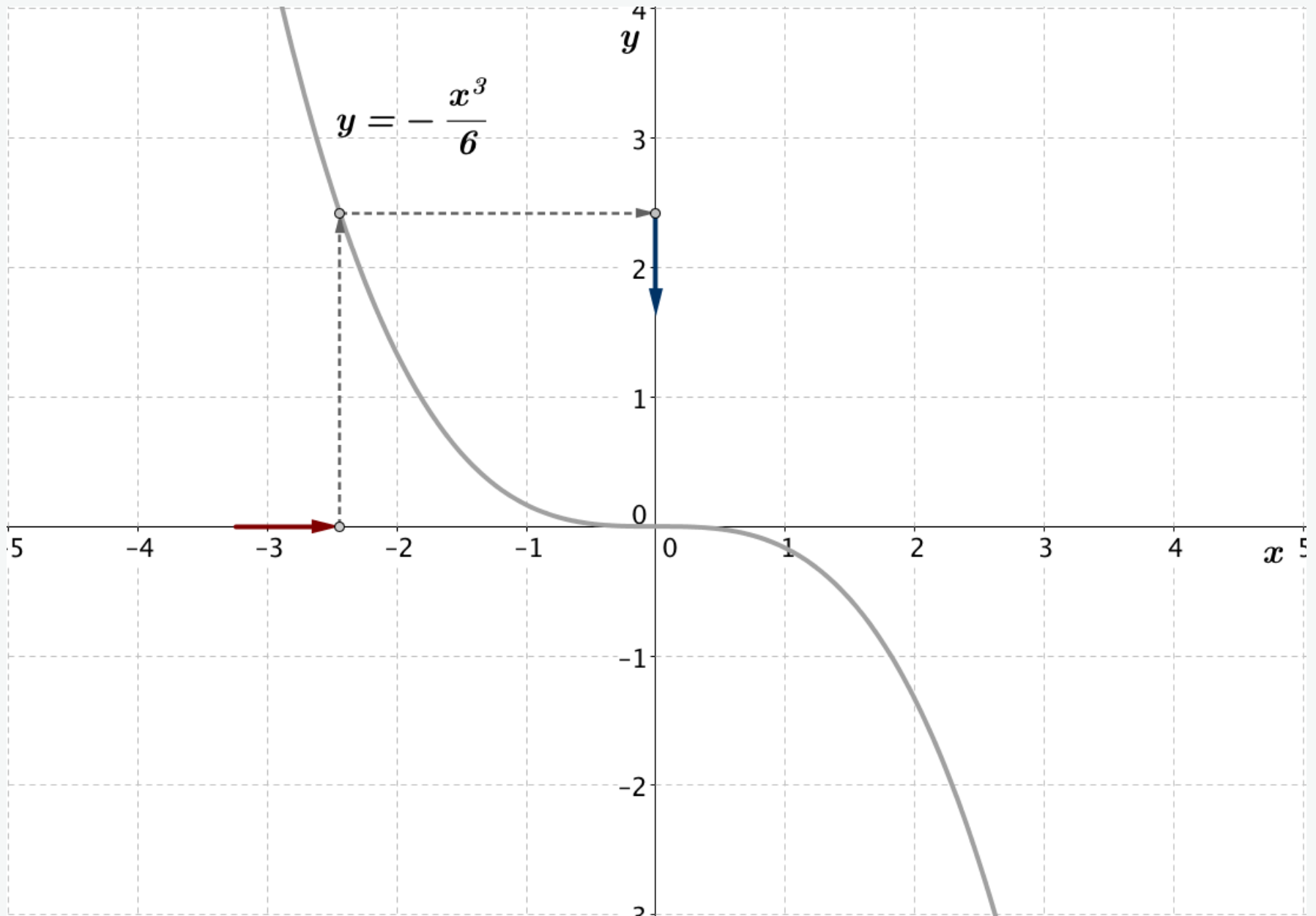


Abb. 2-2: Die kubische Funktion $y = -x^3/3$ ist eine streng monoton fallende Funktion

Monoton fallende Funktion: Beispiel 3

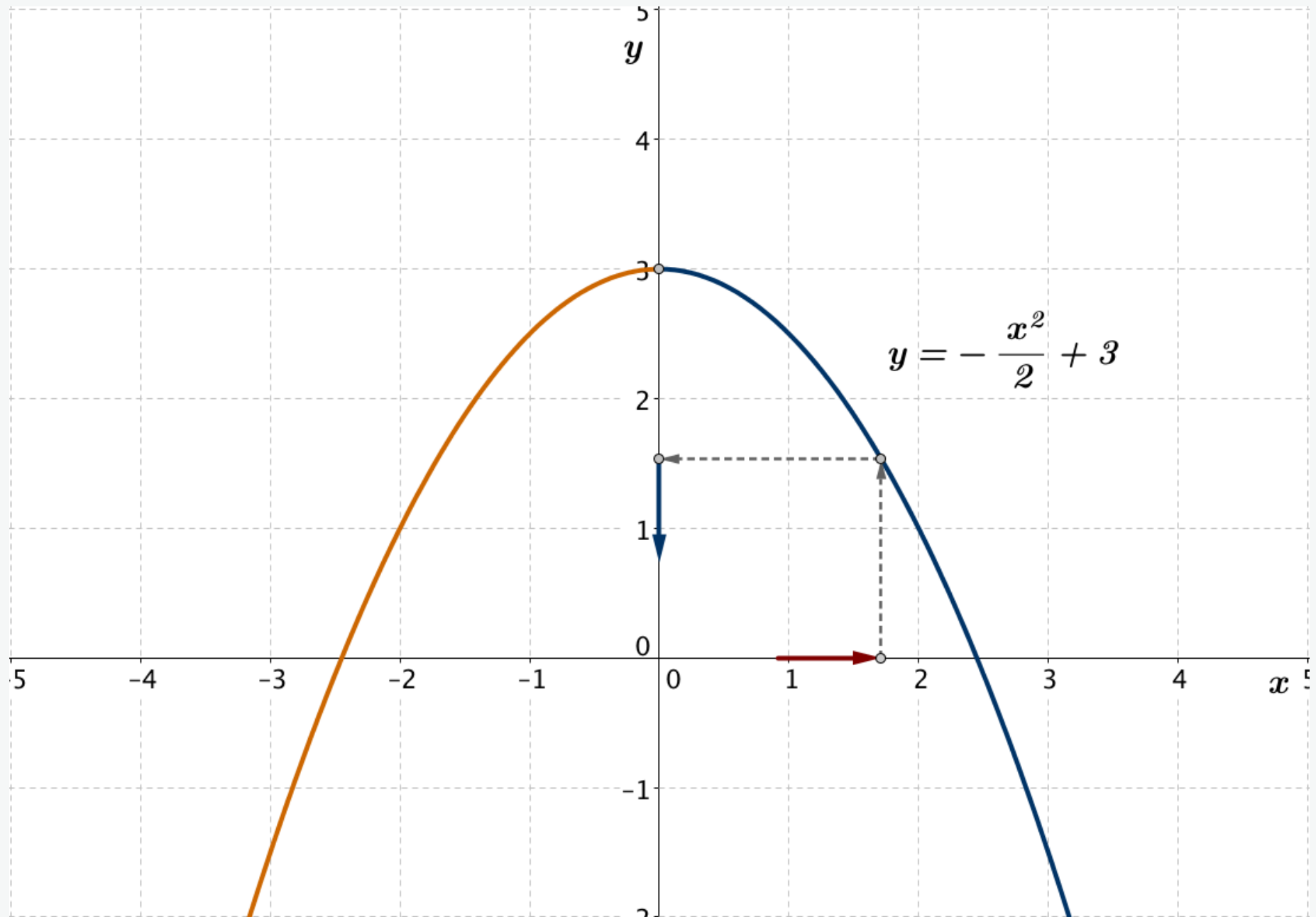


Abb. 2-1: Die quadratische Funktion $y = -x^2/2 + 3$ ist im Bereich positiver x eine monoton fallende Funktion

Beispiel 1: Abb. 2-1. $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

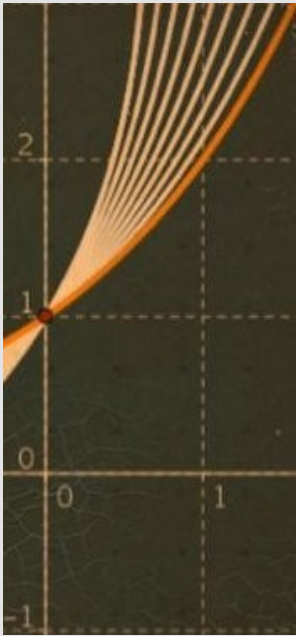
Die Exponentialfunktion zur Basis $1/2$ ist im ganzen Bereich eine streng monoton fallende Funktion.

Beispiel 2: Abb. 2-2. $y = -\frac{x^3}{6}$

Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist im ganzen Bereich eine streng monoton fallende Funktion.

Beispiel 3: Abb. 2-3. $y = \frac{x^2}{2}, \quad I = [0, +\infty)$

Die quadratische Funktion ist im Bereich I eine streng monoton fallende Funktion.



Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen im entsprechenden Intervall I :

$$a) \quad f(x) = x^2 - 2x, \quad I = [-1, +\infty)$$

$$g(x) = 2x - \frac{x^2}{2}, \quad I = [0, +\infty)$$

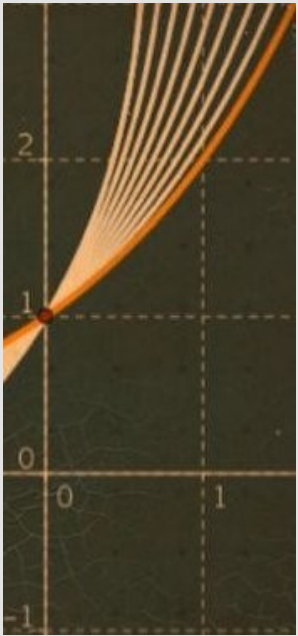
$$h(x) = x^4, \quad I = [1, +\infty)$$

$$b) \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = -\frac{x^3}{3}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$h(x) = x^3 - 2x^2, \quad I = [2, +\infty)$$

$$c) \quad f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = 7^x, \quad I = \mathbb{R}$$

$$d) \quad f(x) = (1.4)^{-x}, \quad g(x) = 3^{-x}, \quad h(x) = 9^{-x}, \quad I = \mathbb{R}$$



$$e) \quad f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_4 x, \quad h(x) = \log_{12} x$$

$$I = (0, +\infty)$$

$$f) \quad f(x) = \log_{1/2} x, \quad g(x) = \log_{1/5} x, \quad h(x) = \log_{1/20} x$$

$$I = (0, +\infty)$$

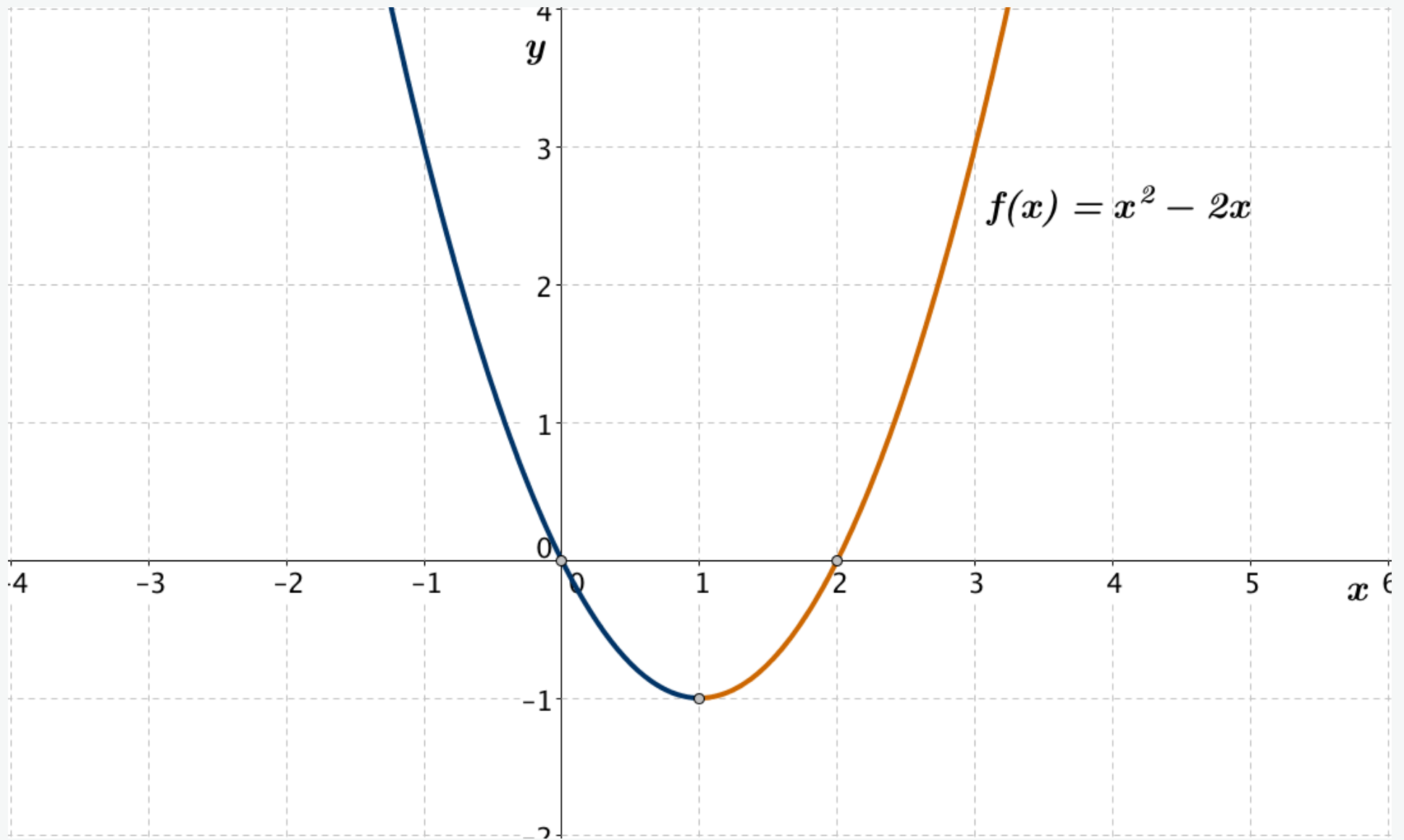


Abb. 3a-1: Darstellung der Funktion $y = f(x)$

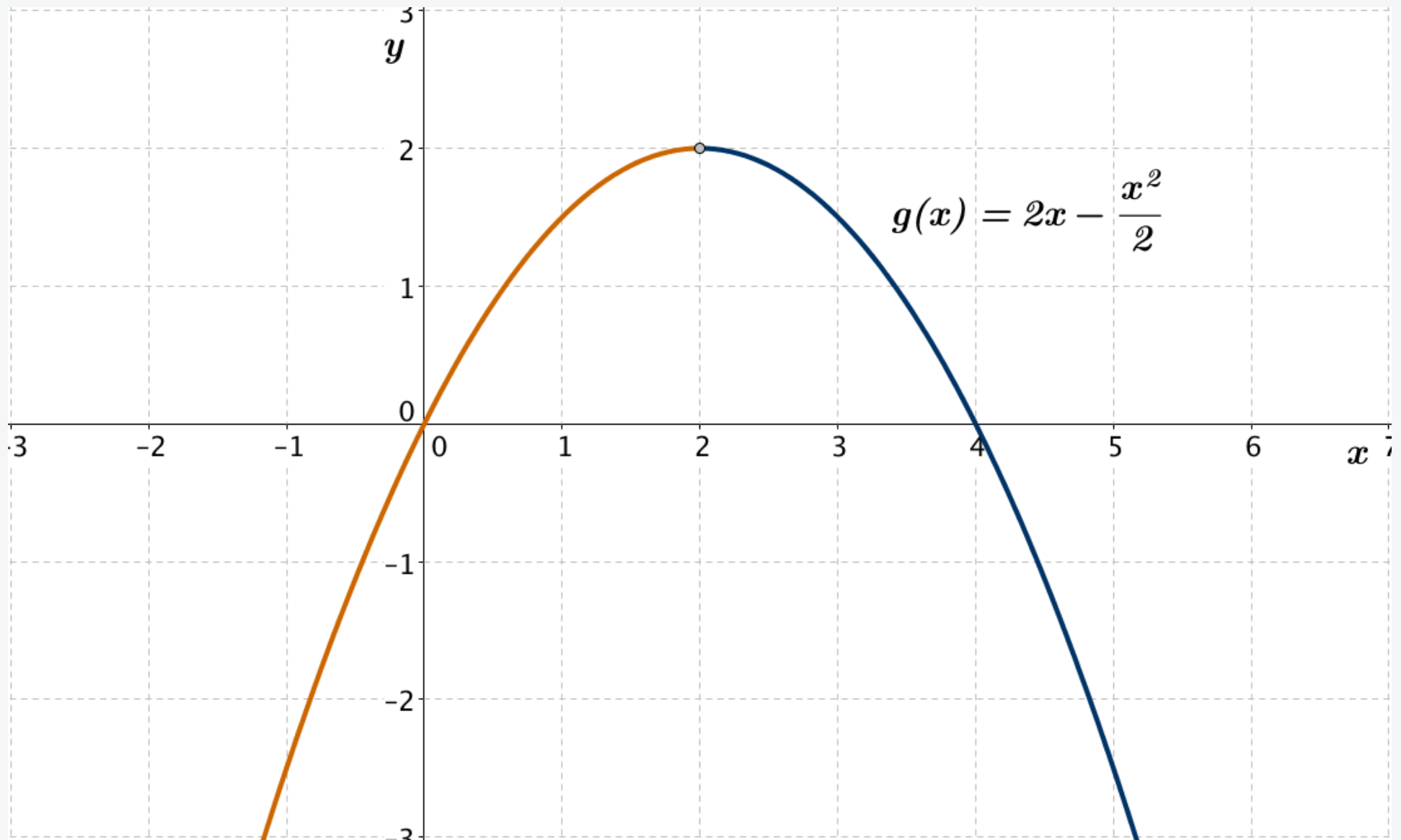


Abb. 3a-2: Darstellung der Funktion $y = g(x)$

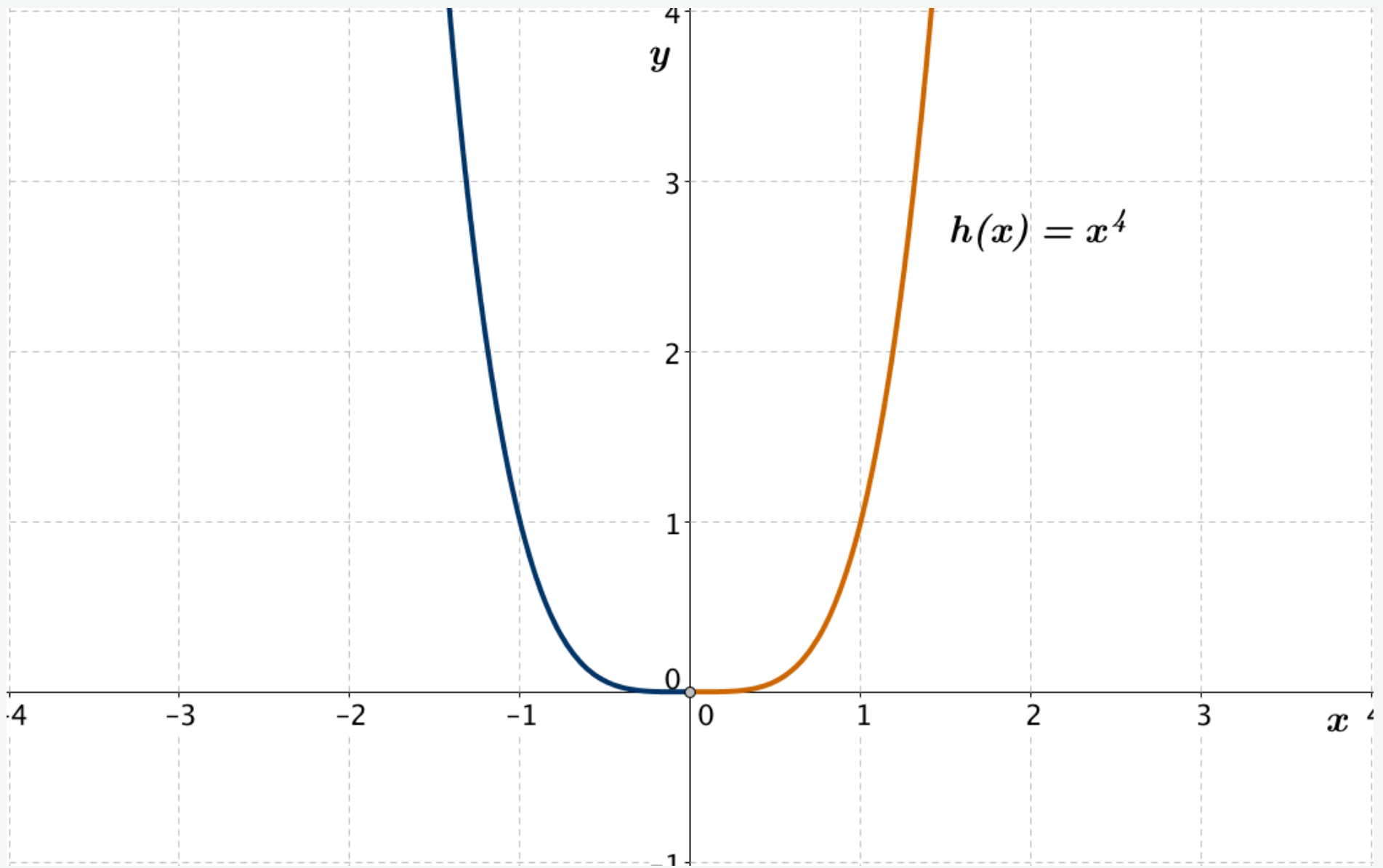


Abb. 3a-3: Darstellung der Funktion $y = h(x)$

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad I = [-1, +\infty) = [-1, 1] \cup [1, +\infty)$$

Die Funktion $y = f(x)$ (Abb. 3a-1) ist streng monoton fallend im Bereich $[-1, 1]$ und streng monoton wachsend im Bereich $x \geq 1$.

$$g(x) = 2x - \frac{x^2}{2}, \quad I = [0, +\infty)$$

Die Funktion $y = g(x)$ (Abb. 3a-2) ist streng monoton wachsend im Bereich $[0, 2]$ und streng monoton fallend im Bereich $x \geq 2$.

$$h(x) = x^4, \quad I = [1, +\infty)$$

Die Funktion $y = h(x)$ (Abb. 3a-3) ist im gegebenen Bereich streng monoton wachsend.

Monotonieverhalten einer Funktion: Lösung 1b

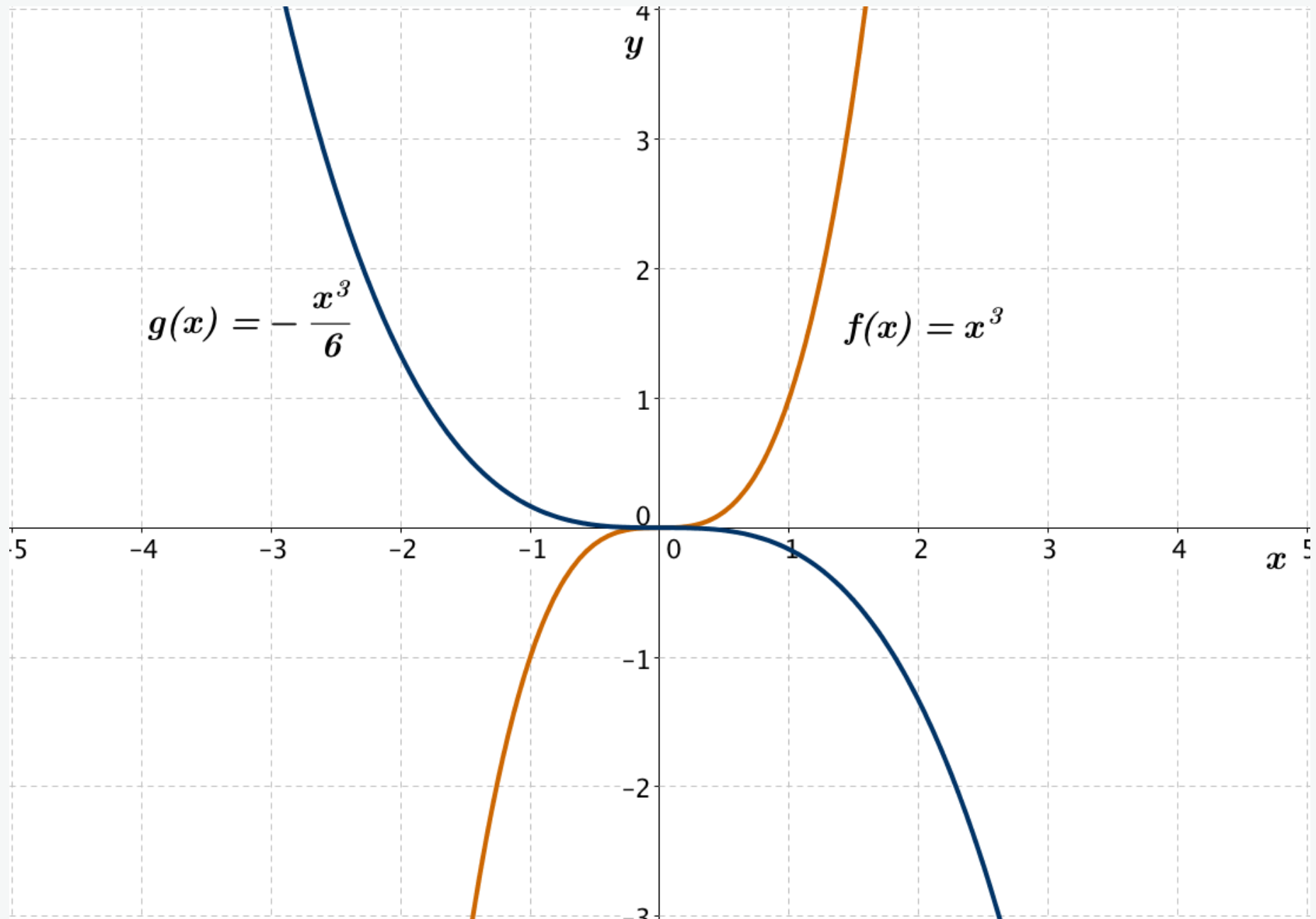


Abb. 3b-1: Darstellung der Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

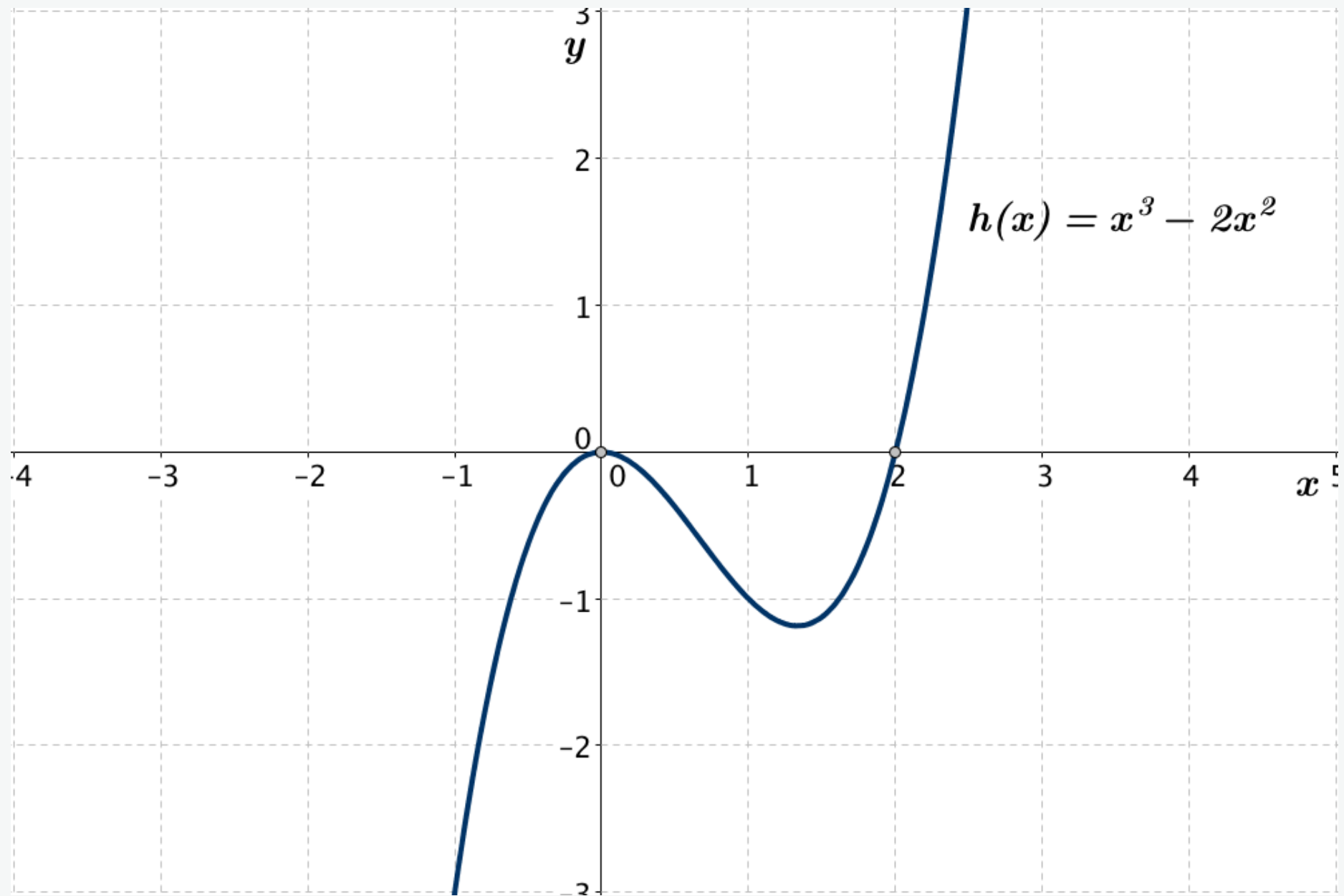


Abb. 3b-2: Darstellung der Funktionen $y = h(x)$

$$f(x) = x^3, \quad I = \mathbb{R}$$

Die Funktion $y = f(x)$ (Abb. 3b-1) ist im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend.

$$g(x) = -\frac{x^3}{3}, \quad I = \mathbb{R}$$

Die Funktion $y = g(x)$ (Abb. 3b-1) ist im ganzen Definitionsbereich streng monoton fallend.

$$h(x) = x^3 - 2x^2, \quad I = [2, +\infty)$$

Die Funktion $y = h(x)$ (Abb. 3b-2) ist streng monoton wachsend im Bereich $x \geq 2$.

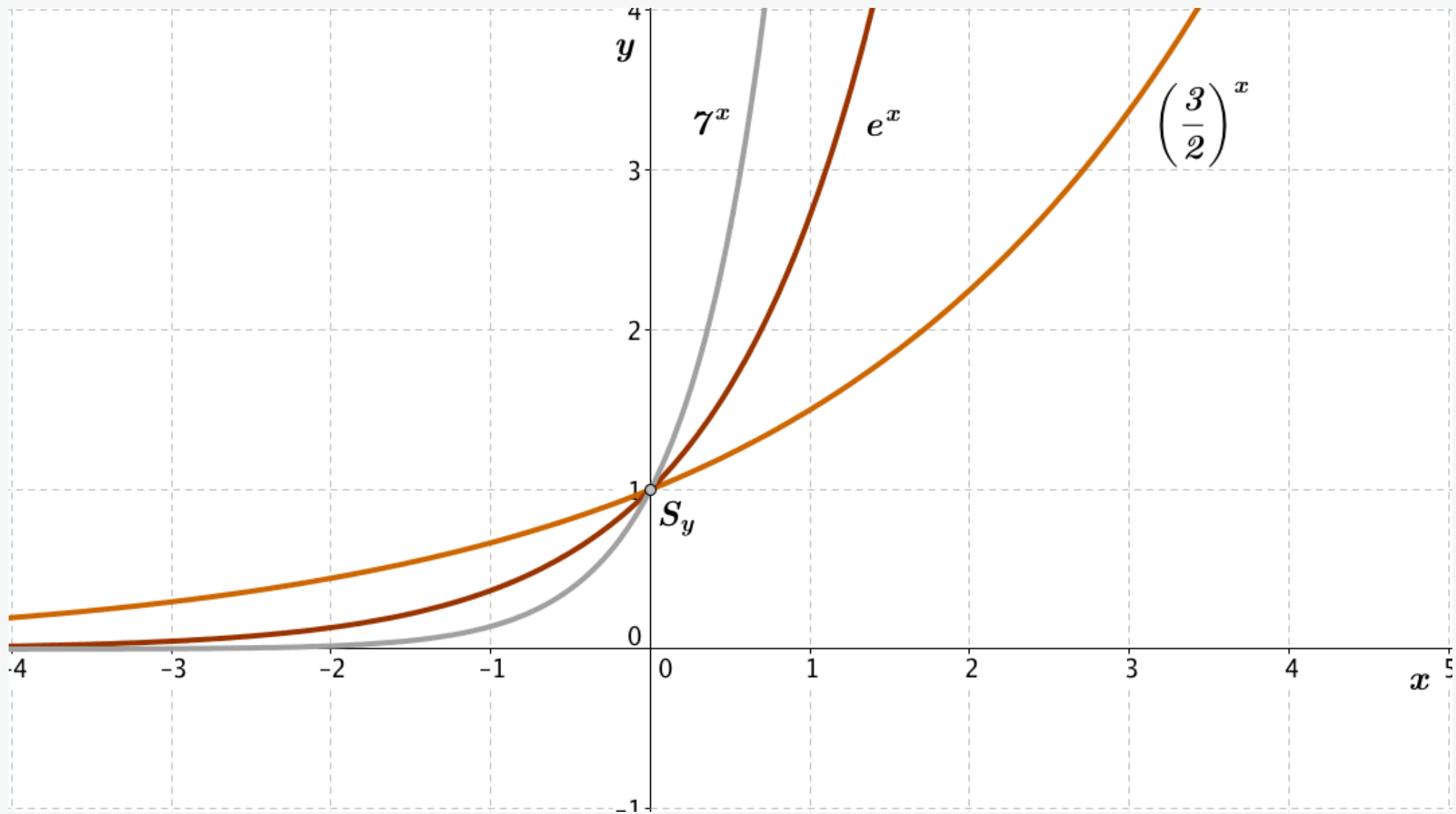


Abb. 3c: Darstellung der Exponentialfunktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und $y = h(x)$

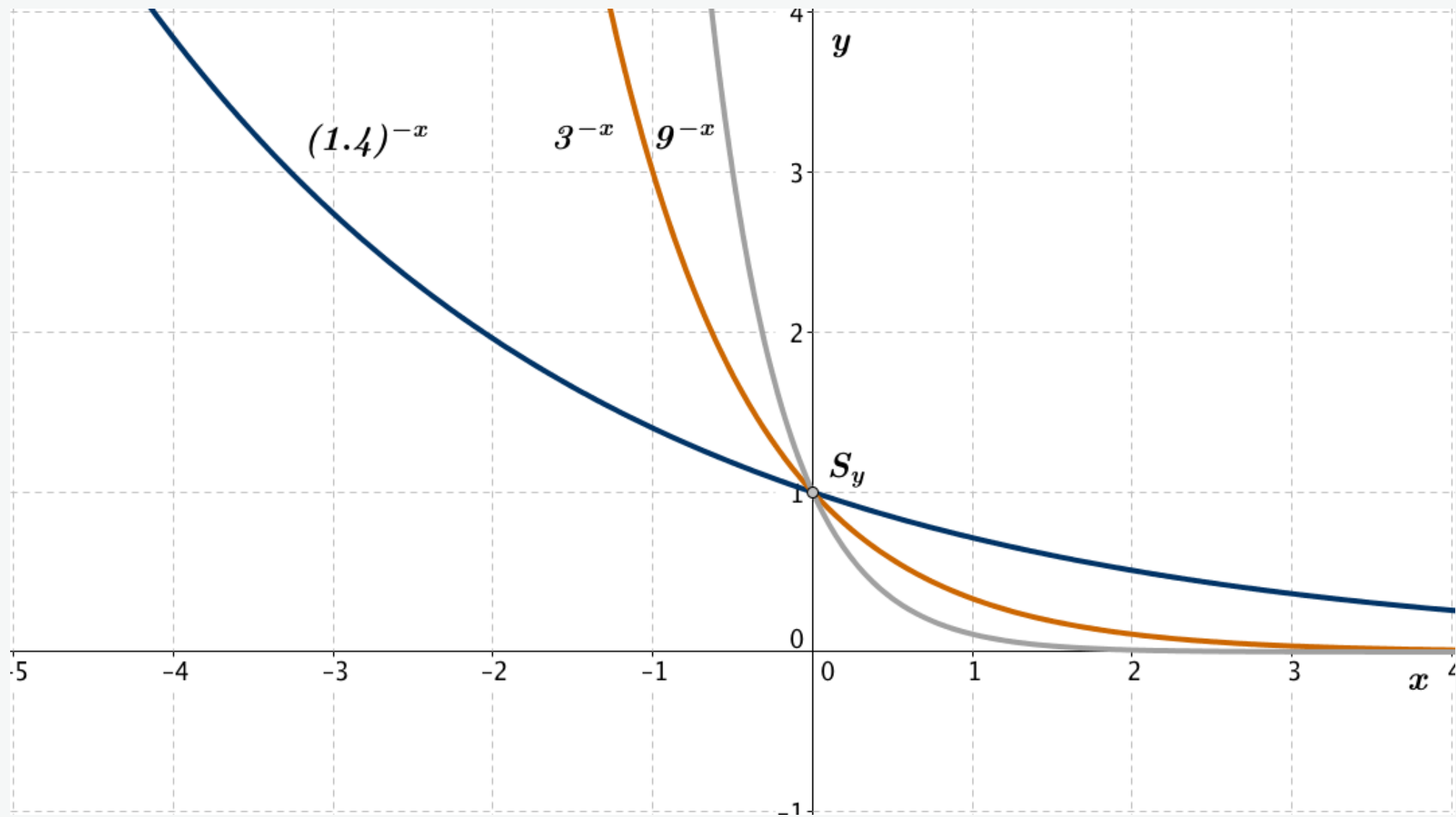


Abb. 3c: Darstellung der Exponentialfunktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und $y = h(x)$

$$c) \quad f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = 7^x$$

Die Exponentialfunktionen sind im ganzen Definitionsbereich $D = I$ streng monoton wachsend.

$$d) \quad f(x) = (1.4)^{-x} = \left(\frac{14}{10}\right)^{-x} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{7}\right)^x$$
$$g(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad h(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

Die Exponentialfunktionen sind im ganzen Definitionsbereich $D = I$ streng monoton fallend.

$$y = b^x, \quad b > 0$$

Jede Exponentialfunktion $y = b^x$ mit der Basis $b > 1$ ist eine im ganzen Definitionsbereich monoton wachsende Funktion. Ist hingegen die Basis $0 < b < 1$, so ist die Funktion im ganzen Definitionsbereich monoton fallend.

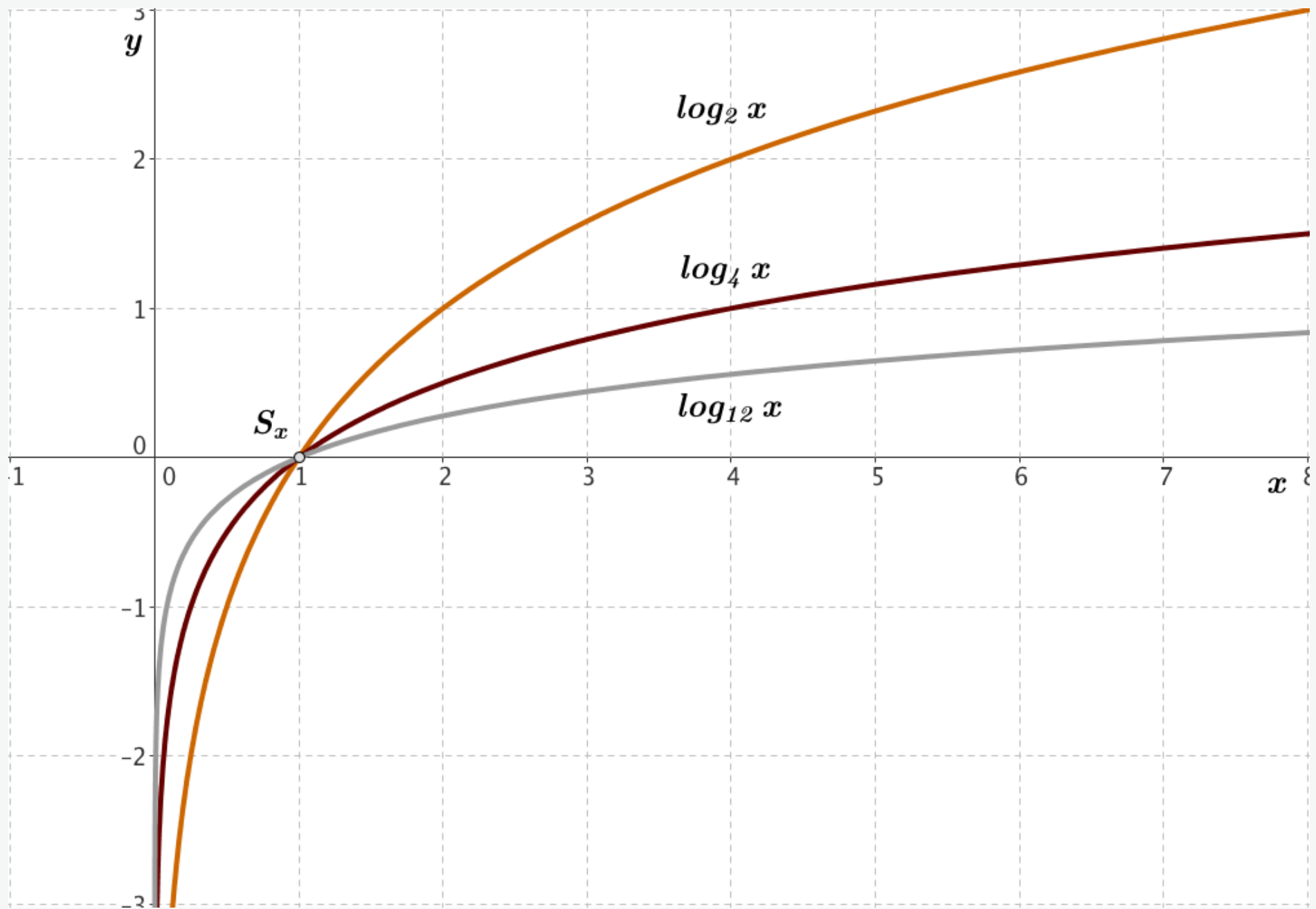


Abb. 3e: Darstellung der Logarithmusfunktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und $y = h(x)$

Monotonieverhalten einer Funktion: Lösung 1f

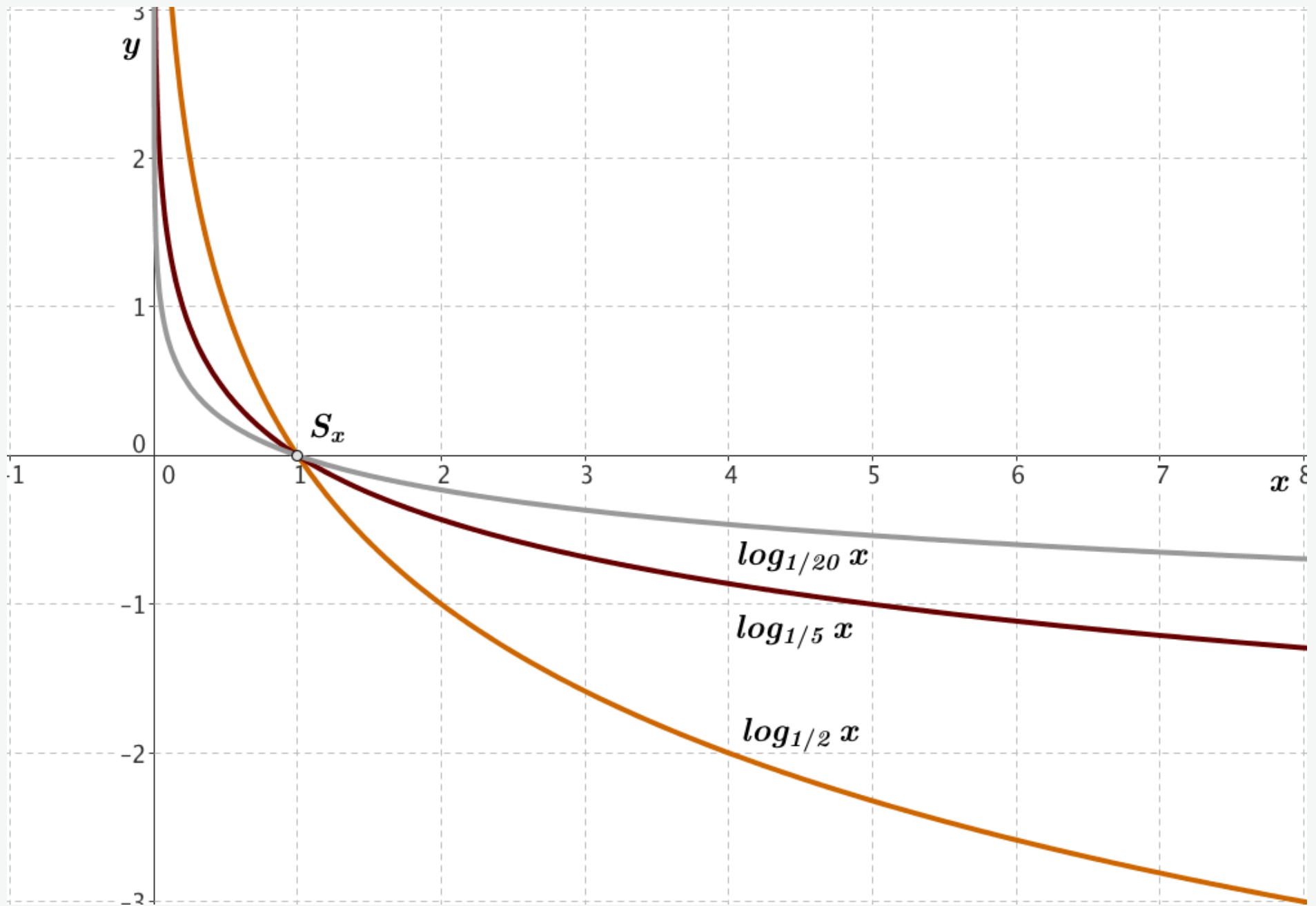


Abb. 3f: Darstellung der Logarithmusfunktionen $y = f(x)$, $y = g(x)$ und $y = h(x)$

$$e) \quad f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_4 x, \quad h(x) = \log_{12} x$$

Die Logarithmusfunktionen sind streng monoton wachsend im ganzen Definitionsbereich D :

$$D = I = (0, +\infty)$$

$$f) \quad f(x) = \log_{1/2} x, \quad g(x) = \log_{1/5} x, \quad h(x) = \log_{1/20} x$$

Die Logarithmusfunktionen sind streng monoton fallend im ganzen Definitionsbereich D :

$$D = I = (0, +\infty)$$

$$y = \log_b x, \quad b > 0$$

Jede Logarithmusfunktion mit der Basis $b > 1$ ist eine im ganzen Definitionsbereich monoton wachsende Funktion. Ist hingegen die Basis $b < 1$, dann ist die Funktion im ganzen Definitionsbereich monoton fallend.

Über eine andere Monotonie



<http://fsinfo.cs.uni-sb.de/~lynx/images/pfox.jpg>

“Mein Leben ist monoton”, sagte der Fuchs. “Ich jage Hühner, die Menschen jagen mich. Alle Hühner gleichen einander, und alle Menschen gleichen einander. Ich langweile mich also ein wenig”.

“Der Kleine Prinz” von Antoine de Saint-Exupéry



Abb. A-2: Das Wetter in Hamburg



Abb. A-3: In Hagenbeck Tierpark, Hamburg