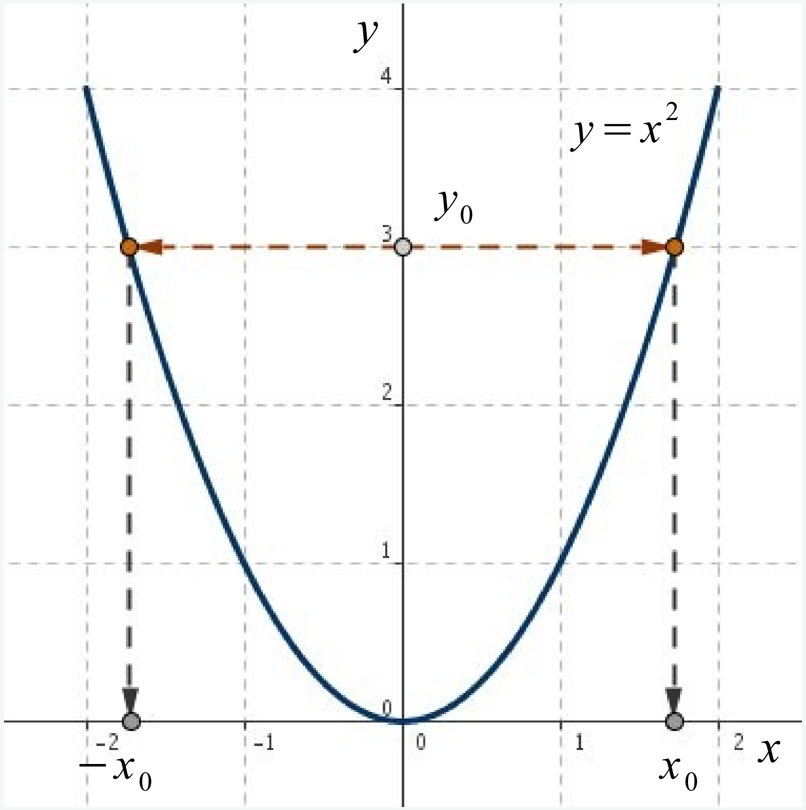
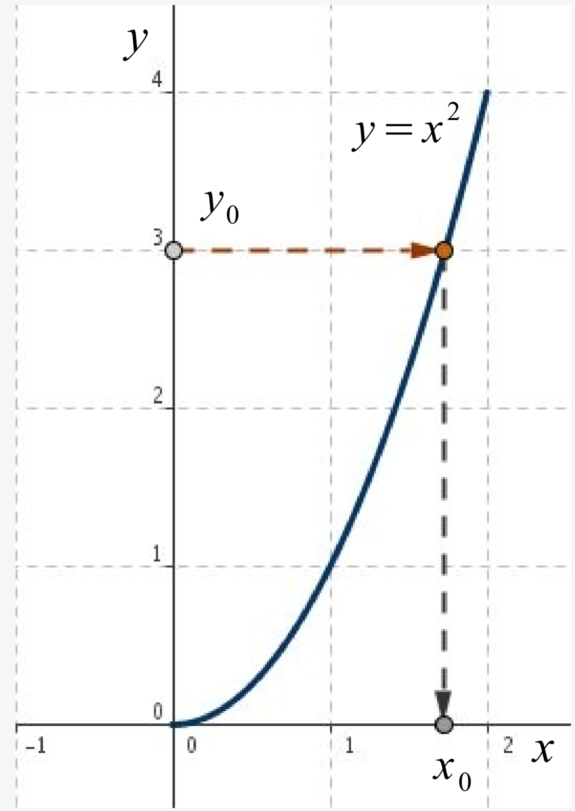
http://www.pbase.com/wingspar/image/72027988

Umkehrfunktionen





umkehrbare Funktion

Definition: Eine Funktion $y = f(x)$ heißt *umkehrbar*, wenn aus

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Umkehrfunktion

Definition:

Die Funktion $f\colon\ x \to y$ ordnet jedem x eindeutig ein y zu. Kann umgekehrt auch jedem y eindeutig ein x zugeordnet werden, so entsteht die Umkehrfunktion oder inverse Funktion von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet, d.h. $f^{-1}\colon\ y \to x$

Bei gegebener Funktionsgleichung $y = f(x)$ von f erhält man die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion in zwei Schritten:

1. Schritt: Umstellen der Funktionsgleichung nach $x: \ x = f^{-1}(y)$

2. Schritt: Vertauschen der Bezeichnung der Variablen (damit die abhängige und unabhängige Variable die übliche Bezeichnung erhalten) : $y = f^{-1}(x)$.
Dieser Schritt hat formalen Charakter.

Wir bestimmen die Umkehrfunktion der Funktion f:

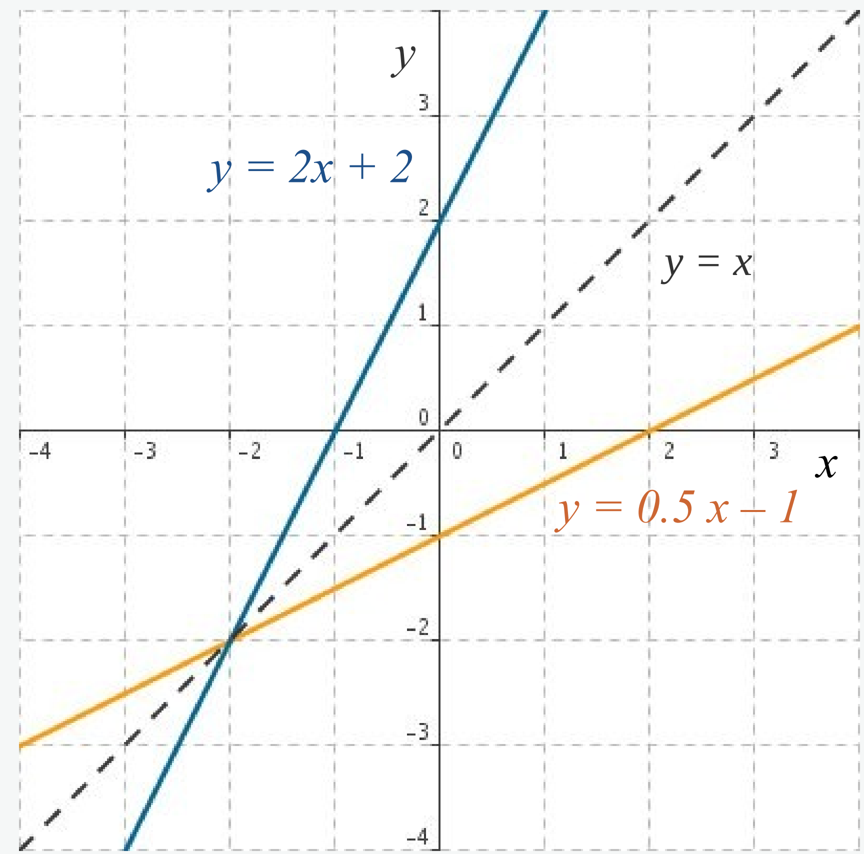
$$f: \quad y = \frac{x}{2} - 1, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad X = Y = \mathbb{R}$$

1. Schritt: Funktionsgleichung nach der Variablen x auflösen:

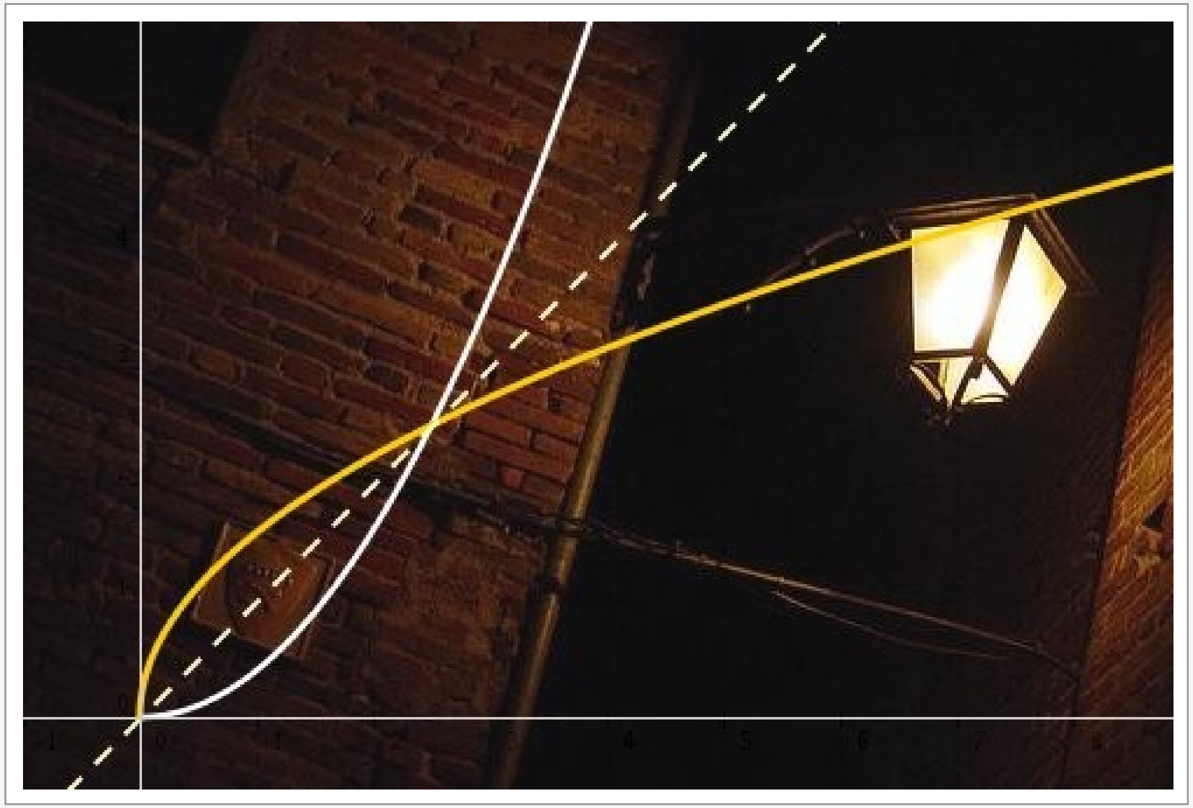
$$f^{-1}: \; x = 2y + 2 = f^{-1}(y)$$

2. Schritt: Variablen x und y miteinander vertauschen:

$$f^{-1}: \; y = 2x + 2 = f^{-1}(x)$$

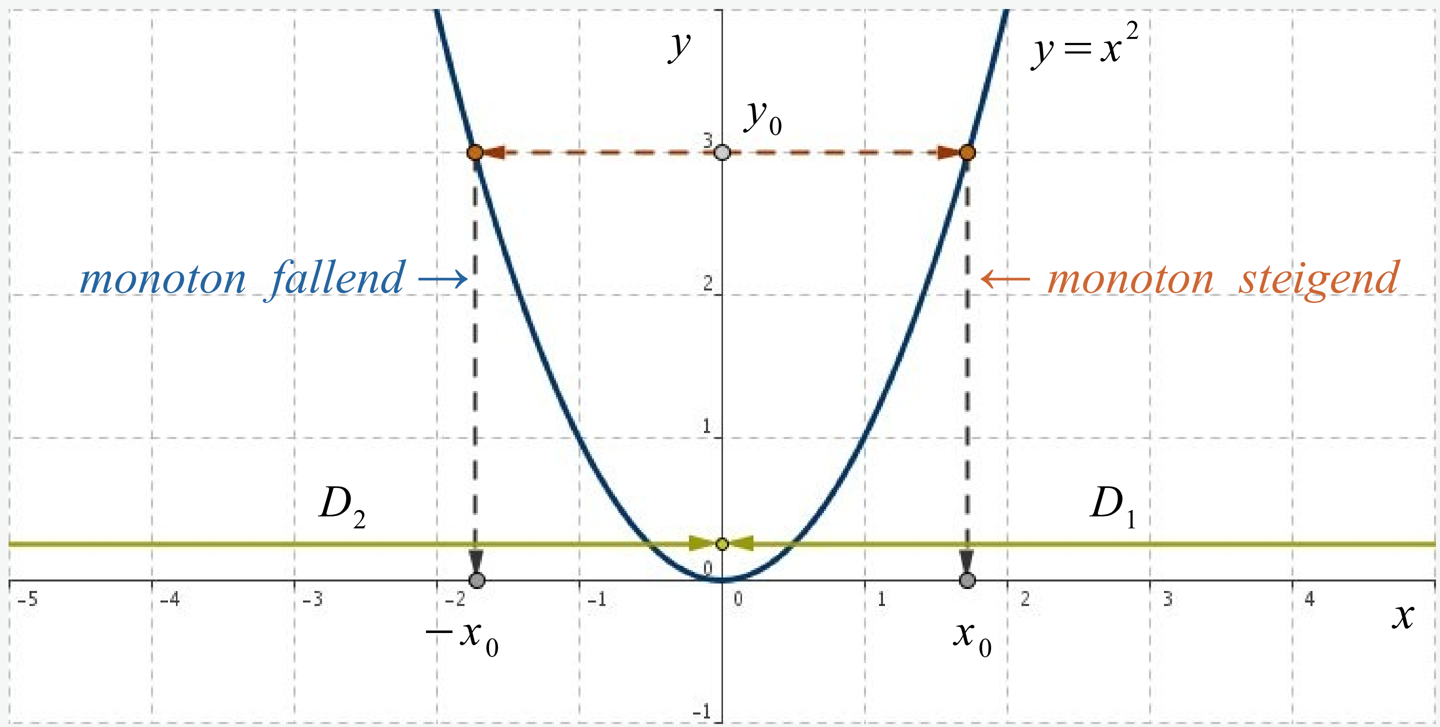


Umkehrfunktion



http://www.flickr.com/photos/pgoyette/85803446/

Die Graphen der Funktion und der Umkehrfunktion liegen symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$.



Die Normalparabel $y = x^2$ ist eine nicht umkehrbare Funktion. Zu jedem Funktionswert gehören genau zwei verschiedene Werte der Variablen x. Das liegt an der fehlenden Monotonie der Normalparabel.

$$f: \quad y = x^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = [0, +\infty)$$

$f_1: \quad y = x^2 \quad D_1 = [0, +\infty)$ – streng monoton steigende Funktion

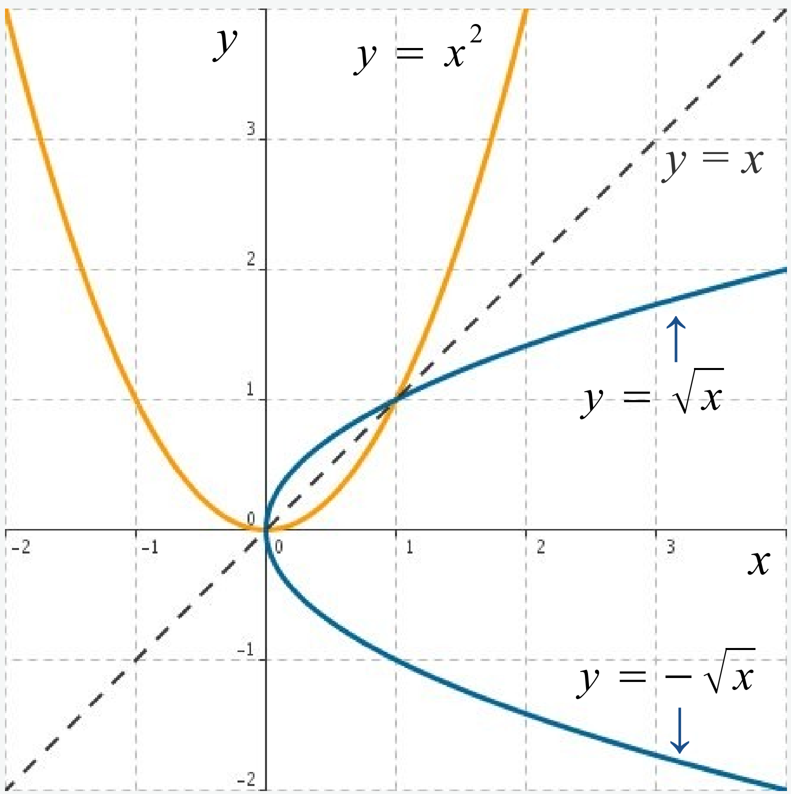
$f_2: \quad y = x^2 \quad D_2 = (-\infty, 0)$ – streng monoton fallende Funktion

f_1, f_2 sind in diesen Teilbereichen eineindeutig. Deswegen können für diese Teilbereiche zugehörige Umkehrfunktionen gebildet werden.

1. Schritt: $f_1^{-1}:\ x = \sqrt{y}, \quad f_2^{-1}:\ x = -\sqrt{y}$

2. Schritt: $f_1^{-1}:\ y = \sqrt{x}, \quad D_1 = [0, +\infty), \quad W_1 = [0, +\infty)$

$f_2^{-1}:\ y = -\sqrt{x}, \quad D_2 = (0, +\infty), \quad W_2 = (-\infty, 0)$



Satz:

> Ist eine Funktion in einem Intervall streng monoton, dann existiert für dieses Intervall die Umkehrfunktion.

$y = x^2$ ist keine umkehrbare Funktion.

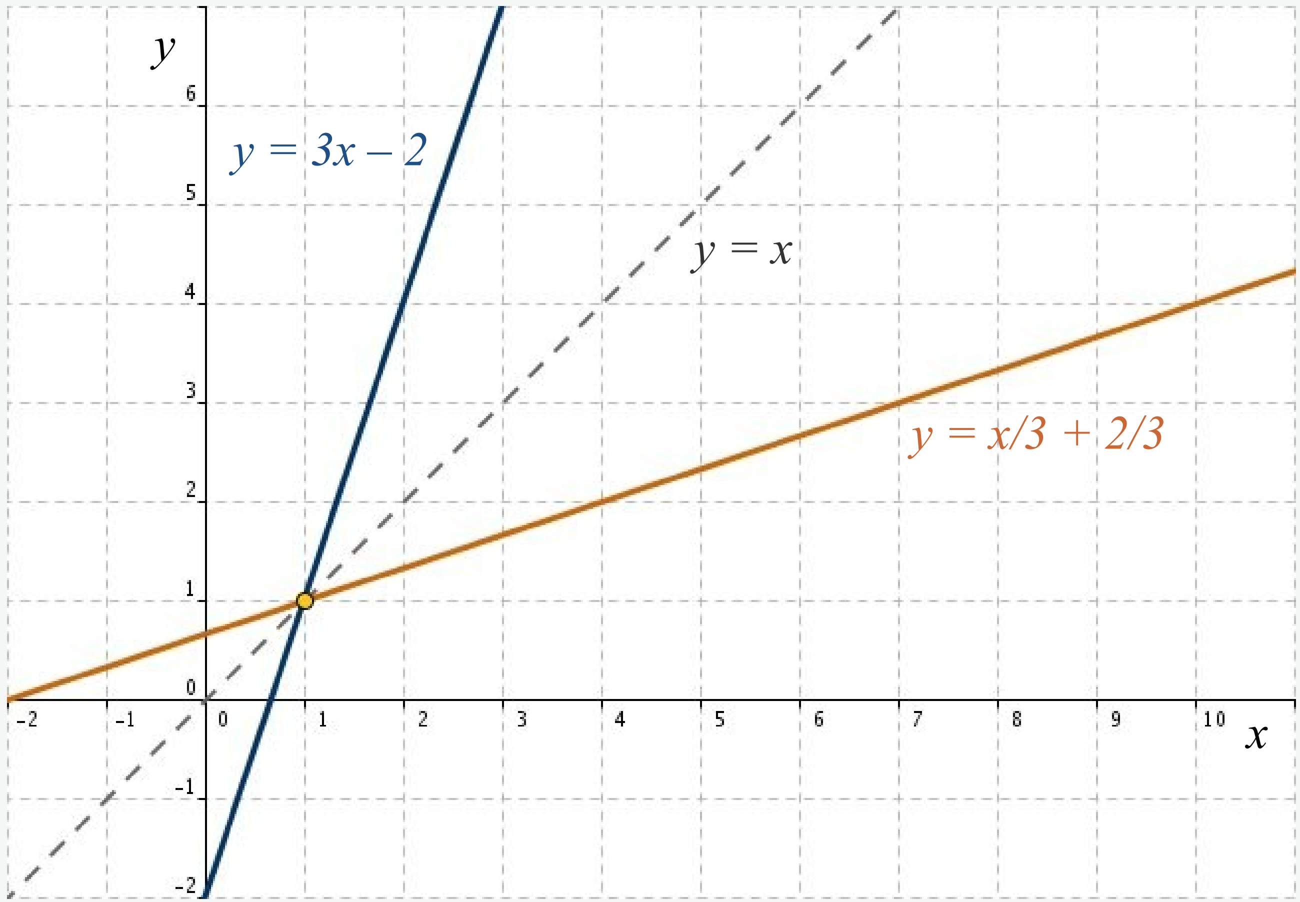
Dennoch ist eine Umkehrung möglich. Die entstandene Zuordnung ist eine Relation.

Aufgabe 1:

Ermitteln Sie rechnerisch und graphisch die Umkehrfunktionen zu:

$$a)\ y = 3x - 2, \qquad b)\ y = -x + 2$$

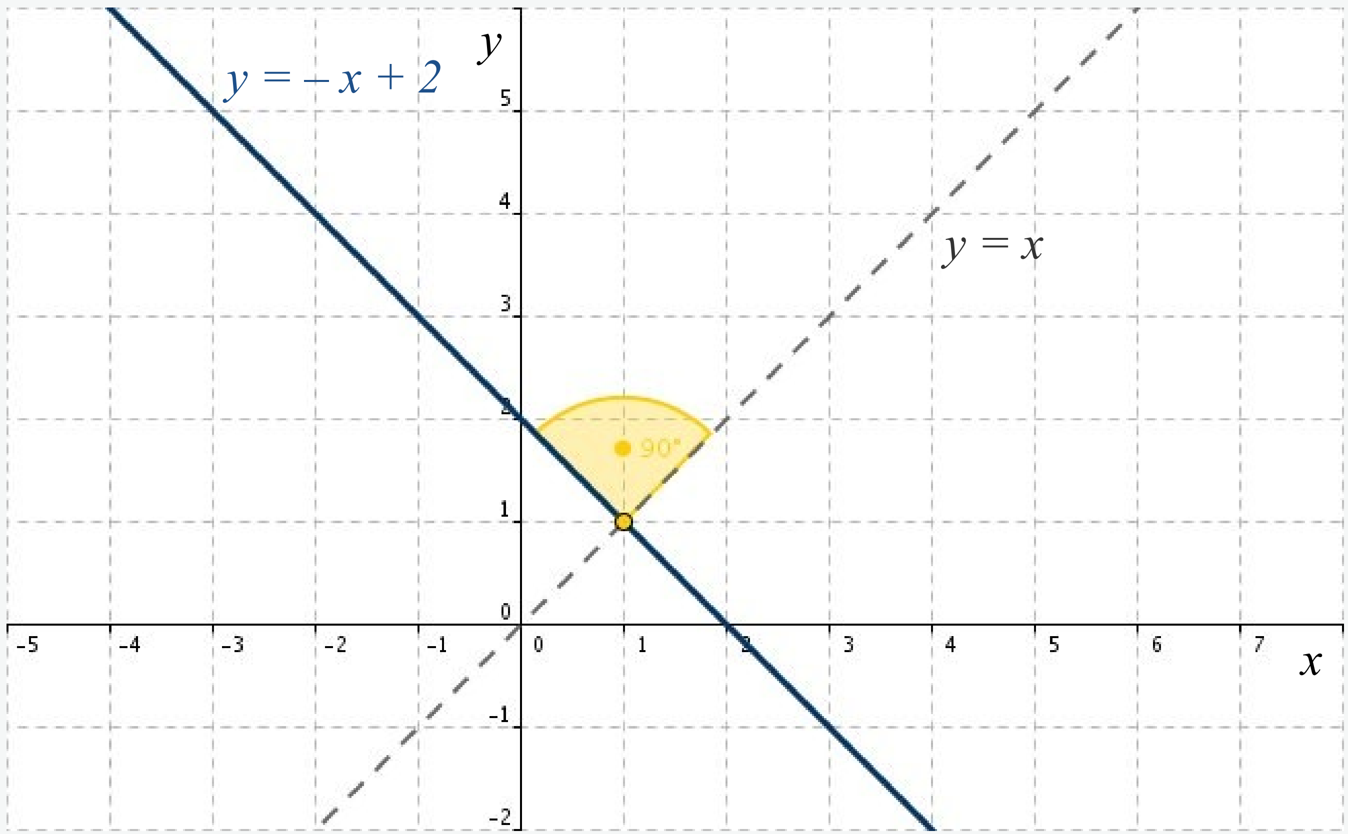
$$c)\ y = -\frac{x}{3} - 1, \qquad d)\ y = \frac{1}{2x}$$



$$y = 3\,x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}:\; x = \frac{y+2}{3} = f^{-1}(y)$$

Variablen x und y miteinander vertauschen:

$$f^{-1}:\; y = \frac{x+2}{3} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = f^{-1}(x)$$

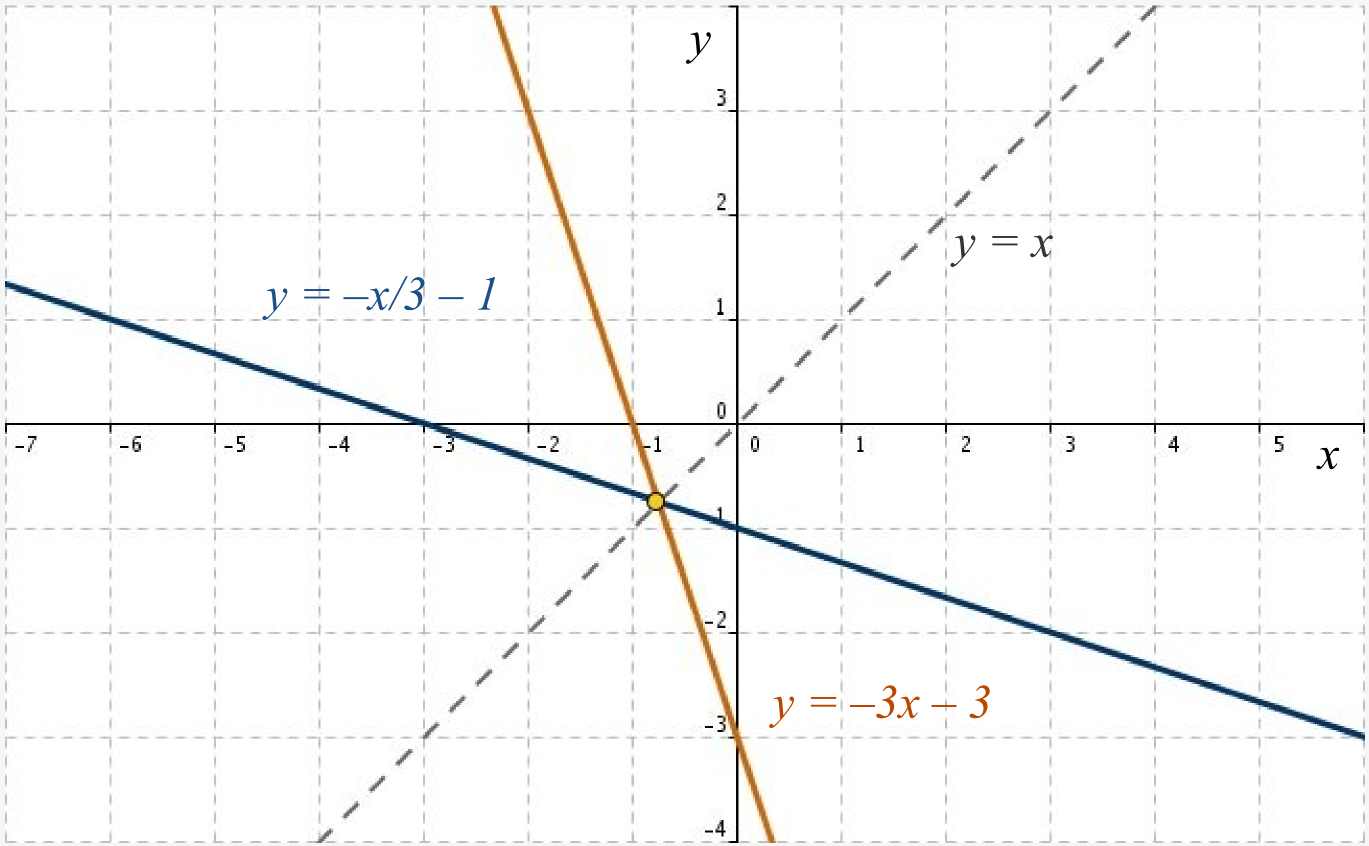


$$y = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}: \ x = 2 - y = f^{-1}(y)$$

Variablen x und y miteinander vertauschen:

$$f^{-1}: \ y = 2 - x = f^{-1}(x)$$

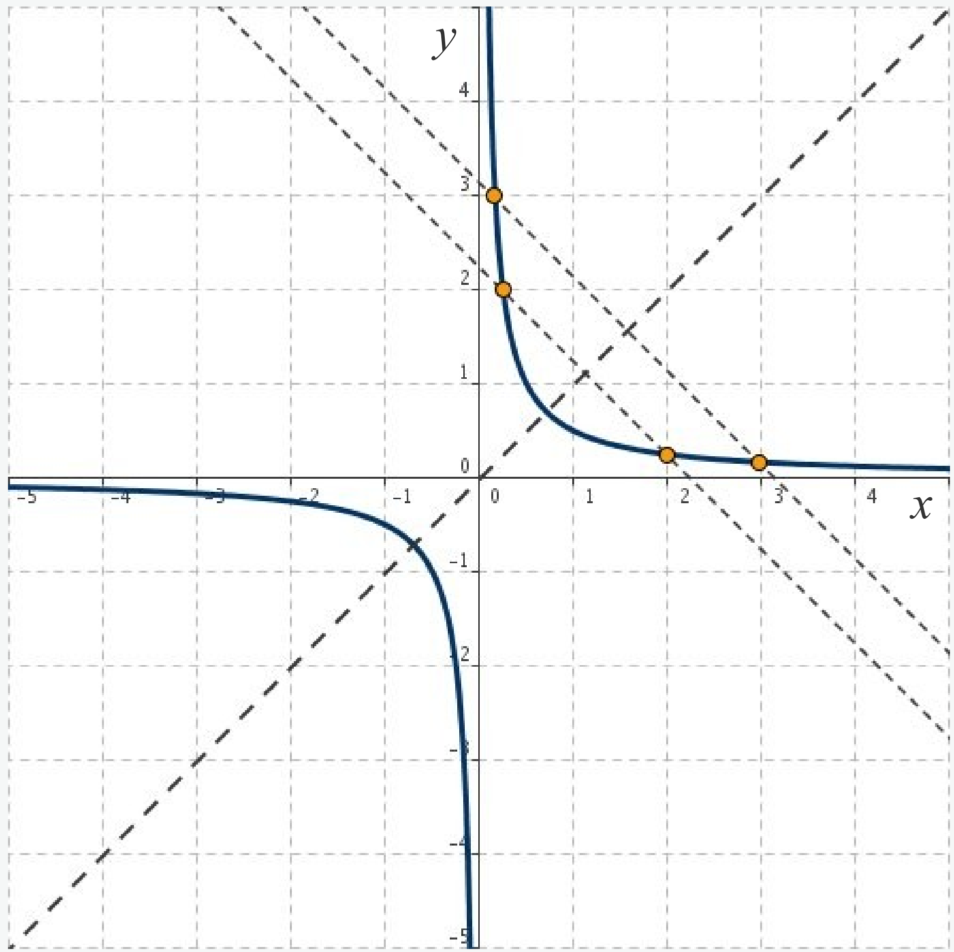
Funktion und Umkehrfunktion sind identisch



$$y = -\frac{x}{3} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}:\ x = -3\,y - 3 = f^{-1}(y)$$

Variablen x und y miteinander vertauschen:

$$f^{-1}:\ y = -3\,x - 3 = f^{-1}(x)$$



$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2y} \quad (x \to y, \ \ y \to x) \quad y = \frac{1}{2x}$$

Funktion und Umkehrfunktion sind identisch