http://www.flickr.com/photos/sigfrid/3428144517/

Darstellungsformen einer Funktion

Funktionen werden nach Möglichkeit explizit dargestellt, das heißt, die Glieder mit und ohne Funktionsvariablen stehen auf der einen Seite der Funktionsgleichung und der Funktionswert auf der anderen Seite. Man spricht dann von explizit definierten Funktionen.

$$y = f(x)$$

y steht isoliert auf einer Seite der Funktionsgleichung

Beispiele:

$$y = x^2 + 3x + 2$$

$$y = 3x - \sin x$$

$$y = -2x\, e^x$$

Zusammenhänge zwischen den Variablen x und y können so in einer Gleichung dargestellt werden, dass die Glieder mit x und y auf beiden Seiten der Gleichung stehen, ohne dass erkennbar ist, ob x oder y die unabhängige Variable ist. Man spricht dann von implizit definierten Funktionen und Relationen.

$$F(x, y) = 0$$

Beispiele:

$$F(x, y) = x^3 + 5y^3 - xy = 0$$

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - 2xy = 0$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

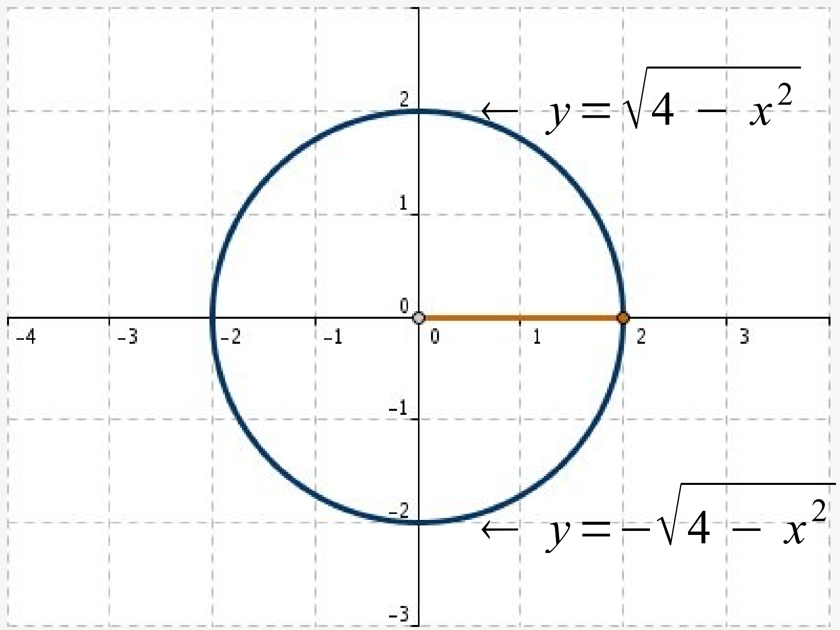

Abb. 1: Darstellung eines Kreises mit dem Radius 2

Wir bestimmen die explizite Form der impliziten Funktionsgleichung:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Die Auflösung nach y ergibt die Gleichungen von zwei Funktionen:

$$f_1: \quad y = \sqrt{4 - x^2}, \qquad X_1 = [-2, 2], \quad Y_1 = [0, 2]$$

$$f_2: \quad y = -\sqrt{4 - x^2}, \qquad X_2 = [-2, 2], \quad Y_2 = [-2, 0]$$

Ihre Graphen sind die beiden Halbkreise.

Geben Sie eine explizite Darstellung folgender implizit definierten Funktionen

a) $F(x, y) = 2x + 3y - 6 = 0$

b) $x^2 - 6y + 8 = 0$

c) $e^x = x y$

d) $\ln y = x^2$

$$a)\quad y = -\frac{2}{3}\,x + 2$$

$$b)\quad y = \frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}$$

$$c)\quad y = \frac{e^x}{x}$$

$$e)\quad y = e^{x^2}$$

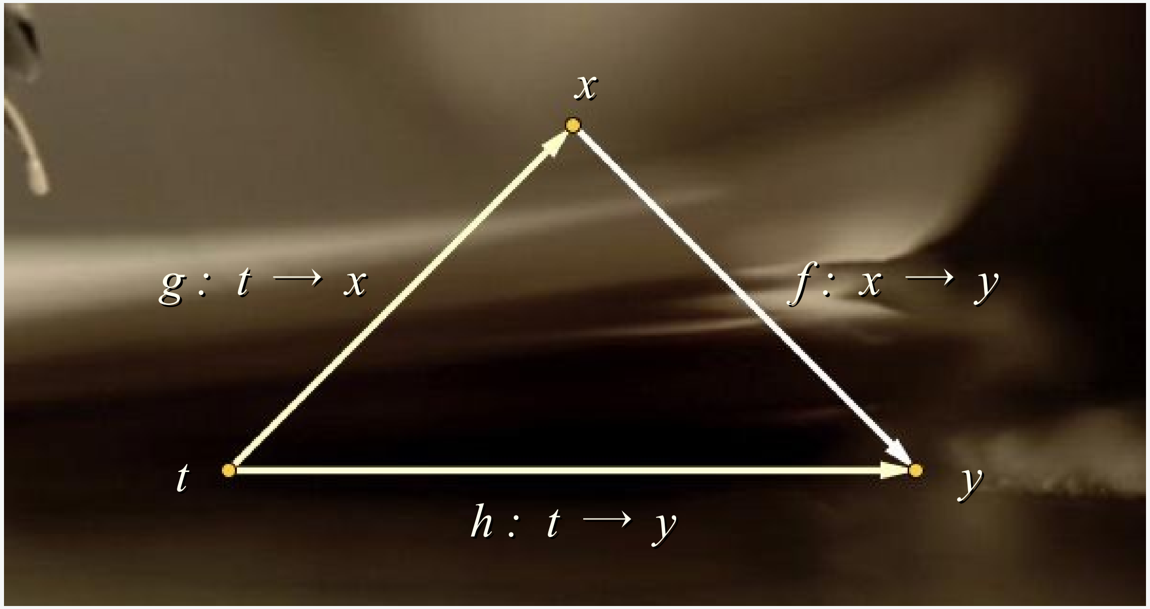

Abb. 2: Die Variablen x und y in Abhängigkeit von dem Parameter t

Die Variablen x und y werden in Abhängigkeit von einer dritten Variablen, dem Parameter, dargestellt. Die allgemeine Form der Parameterdarstellung lautet:

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in T$$

Jedem Wert des Parameters t wird durch diese Funktionsgleichungen eindeutig ein Wert x und ein Wert y zugeordnet.

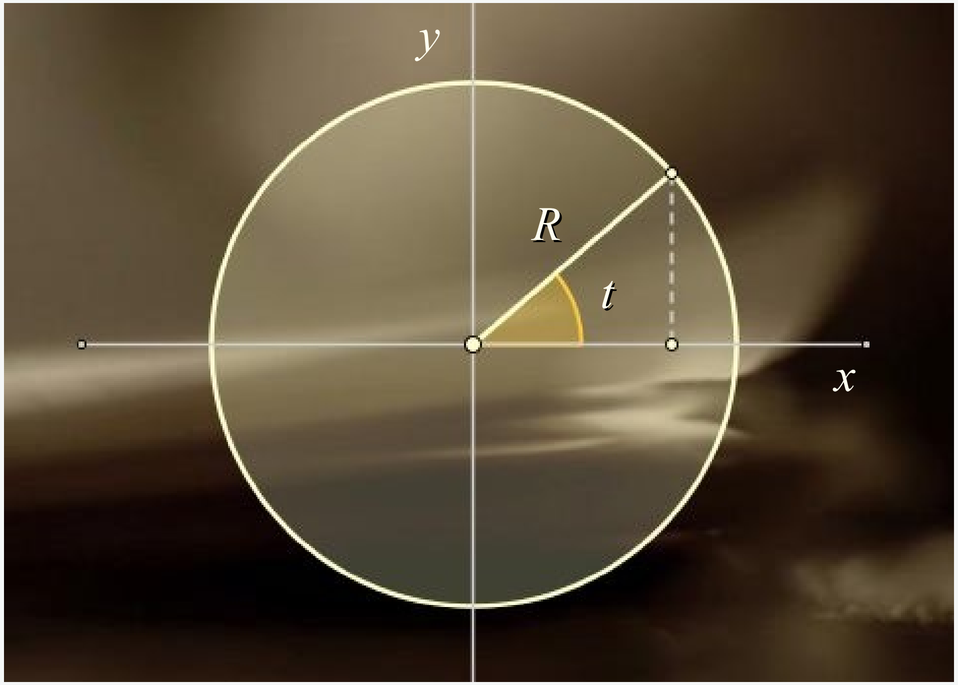

Abb. 3-1: Der Kreises mit dem Radius 2

Die Relation

$$R(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}, \qquad D(R) = [-2,\ 2]$$

hat im rechtwinkligen *(x y)*-Koordinatensystem den Kreis *(R = 2)* um den Nullpunkt als Graphen.

Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Relation.

Parameterdarstellung

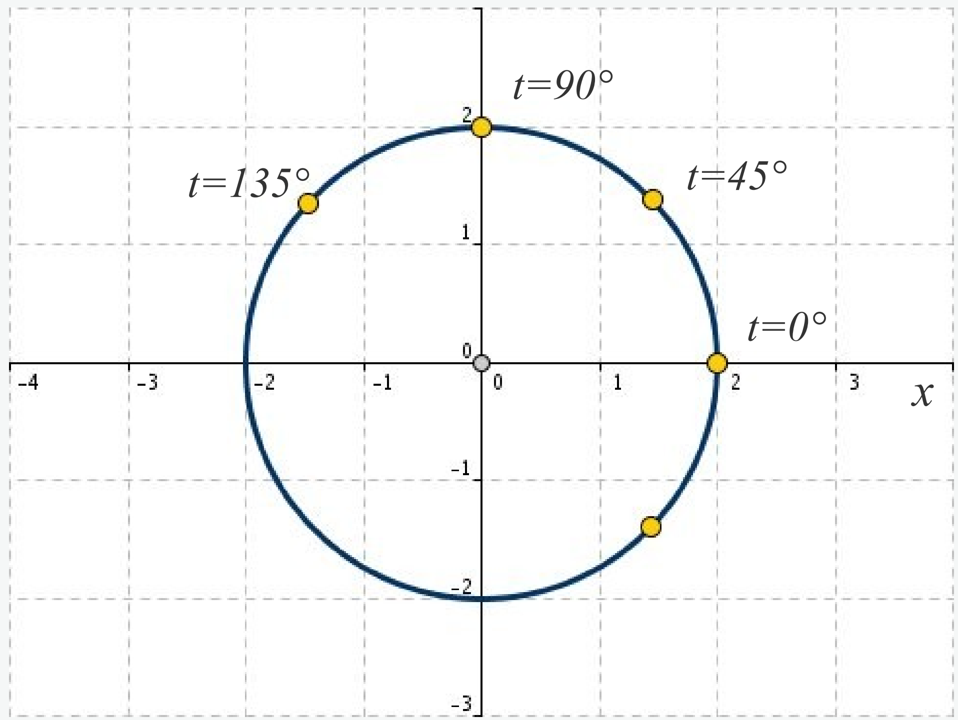

Abb. 3-2: Der Kreis (R=2) mit einigen Parameterwerten

Das ist die Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius $R = 2$:

$$x = 2 \cos t\,, \qquad y = 2 \sin t\,, \qquad 0 \geqslant t \geqslant 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Die Funktionen der folgenden Aufgaben sind durch Parametergleichungen definiert. Stellen Sie sie explizit, d.h. in der Form $y = y\,(x)$ dar, und skizzieren Sie Graphen

Aufgabe 1:

$a)\quad x\,(t) = t + 2\,, \qquad y\,(t) = 5 - \dfrac{t^2}{2}$

$b)\quad x\,(t) = t - 1, \qquad y\,(t) = t^3 - 1$

Aufgabe 2:

$a)\quad x\,(t) = 2\,t + 2\,, \qquad y\,(t) = t + 2$

$b)\quad x\,(t) = 4 - t\,, \qquad y\,(t) = 3 - 0.5\,t$

$c)\quad x\,(t) = t^2 - 2\,, \qquad y\,(t) = 0.5\,t^2$

Parameterdarstellung: *Lösung 1 a*

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	0.5	3	4.5	5	4.5	3

Mit der Wertetabelle lassen sich Wertepaare von f bestimmen, z.B. *(-2, -3), (-1, 0.5)*. An den Graph von f werden die Parameterwerte geschrieben. Die Elimination von t aus den Gleichungen

$$x = t + 2\,, \qquad y = 5 - \frac{t^2}{2}$$

ergibt mit

$$t = x - 2\,, \qquad y = 5 - \frac{1}{2}\,(x - 2)^2$$

Die parameterfreie explizite Form der Funktionsgleichung ist

$$y = -\frac{x^2}{2} + 2\,x + 3 = f\,(x)$$

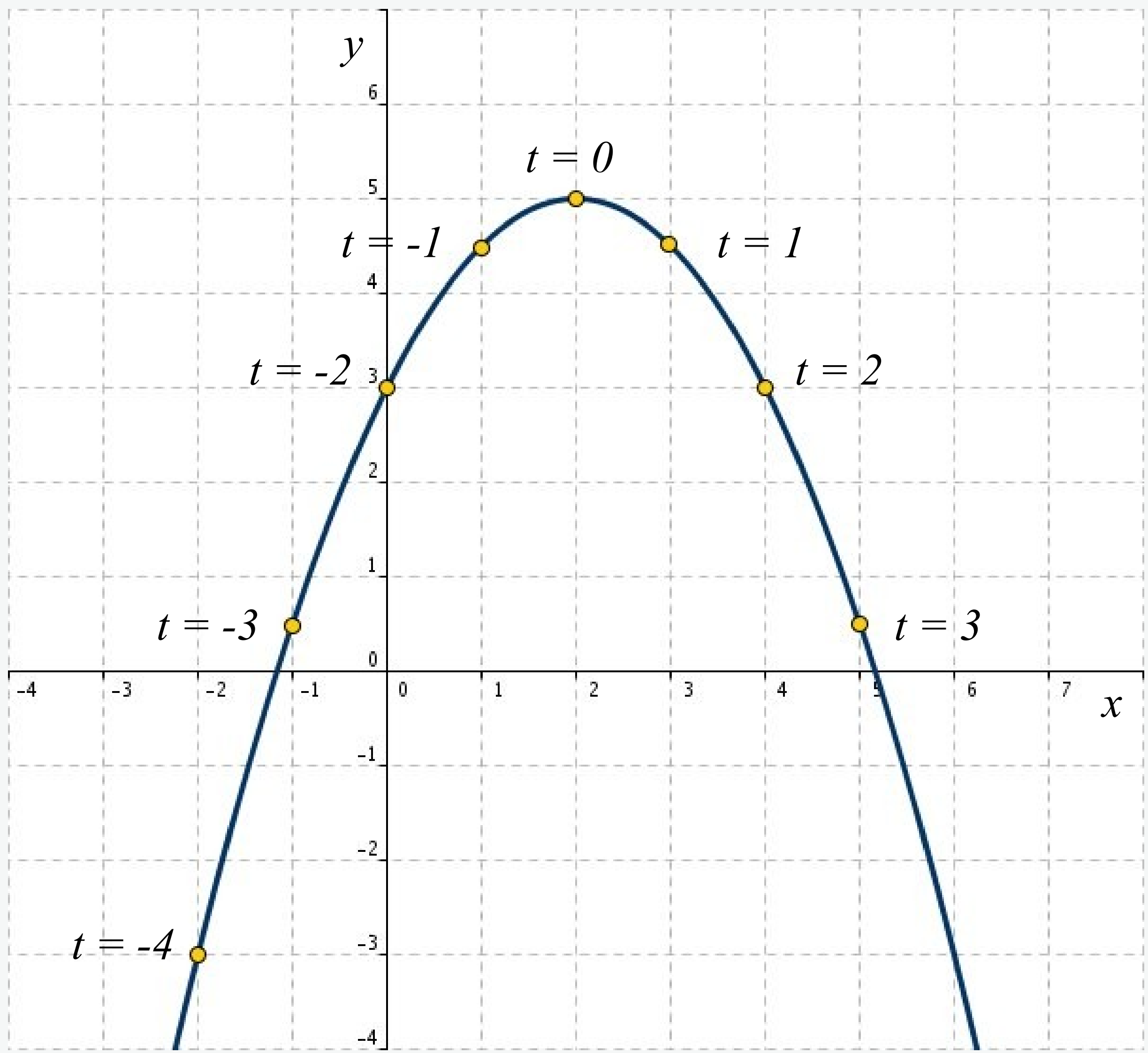

Abb. 4-1: Funktion f(x) mit einigen Parameterwerten

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3$$

$$x(t) = t - 1, \qquad y(t) = t^3 - 1$$

$t = x + 1 \quad$ in $\quad y = y(t) \quad :$

$$y(x) = \left[\, t^3 - 1 \,\right]_{t = x + 1} =$$

$$= (x + 1)^3 - 1 = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x =$$

$$= x\,(x^2 + 3\,x + 3)$$

$x = 0$ – Schnittpunkt mit der x-Achse

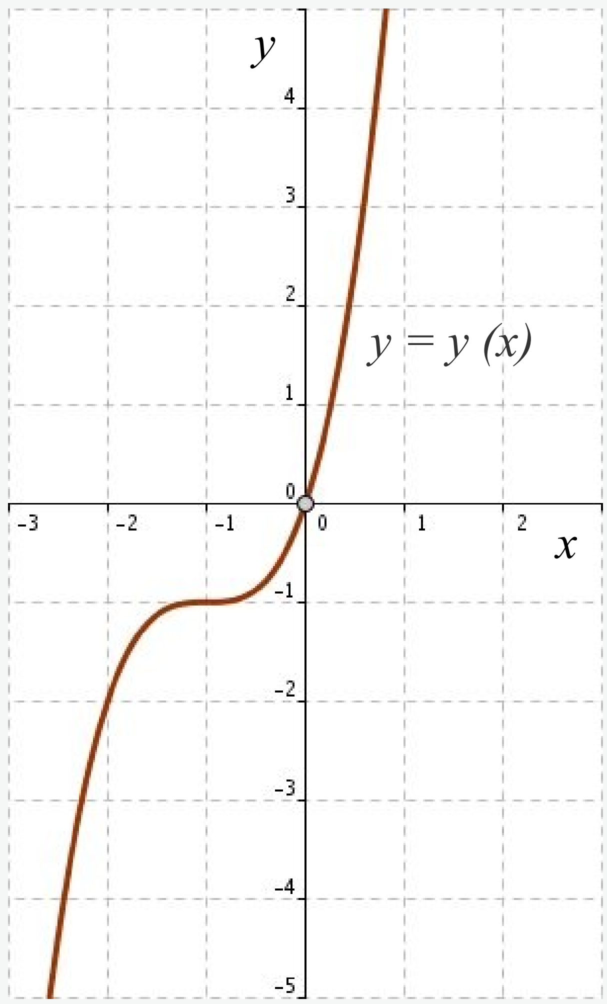

Abb. 4-2: Graphische Darstellung der Funktion $y(x) = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x$

Parameterdarstellung: Lösung 2

Die vier Parameterdarstellungen führen alle auf dieselbe parameterfreie Funktionsgleichung !

$$a)\quad t = \frac{x-2}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x-2}{2} + 2 = \frac{x}{2} + 1$$

$$b)\quad t = 4 - x \quad \rightarrow \quad y = 3 - \frac{4-x}{2} = \frac{x}{2} + 1$$

$$c)\quad t^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$$

Für die in Parameterform gegebenen Kurven ist die Darstellung $y = f(x)$ zu ermitteln. Wodurch unterscheiden sie sich?

a) $x(t) = \sqrt{t}\,, \qquad y(t) = t$

b) $x(t) = \cos t\,, \qquad y(t) = 0.5\,(\cos(2t) + 1)$

Hinweis: $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$

c) $x(t) = e^t\,, \qquad y(t) = e^{2t}$

$$a)\quad x(t) = \sqrt{t}\,, \qquad y(t) = t \quad \Rightarrow \quad y = x^2, \qquad D = [\,0,\ \infty)$$

$$b)\quad x(t) = \cos t\,, \qquad y(t) = 0.5\,(\cos(2t) + 1)\,, \qquad D = [-1,\ 1]$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$y = 0.5\,(2\cos^2 t - 1 + 1) = \cos^2 t = x^2$$

$$c)\quad x(t) = e^t, \qquad y(t) = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = x^2, \qquad D = (0,\ \infty)$$