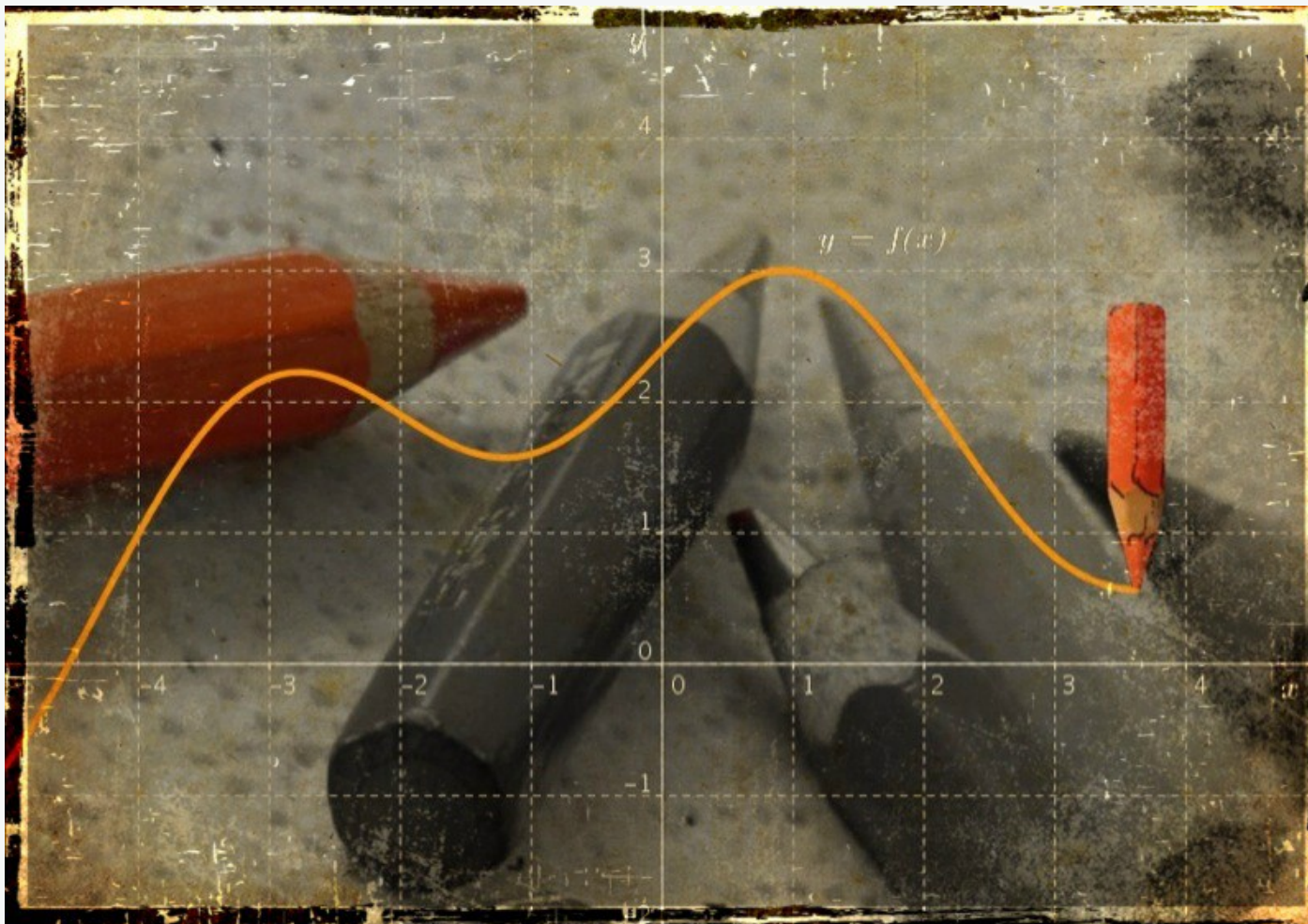
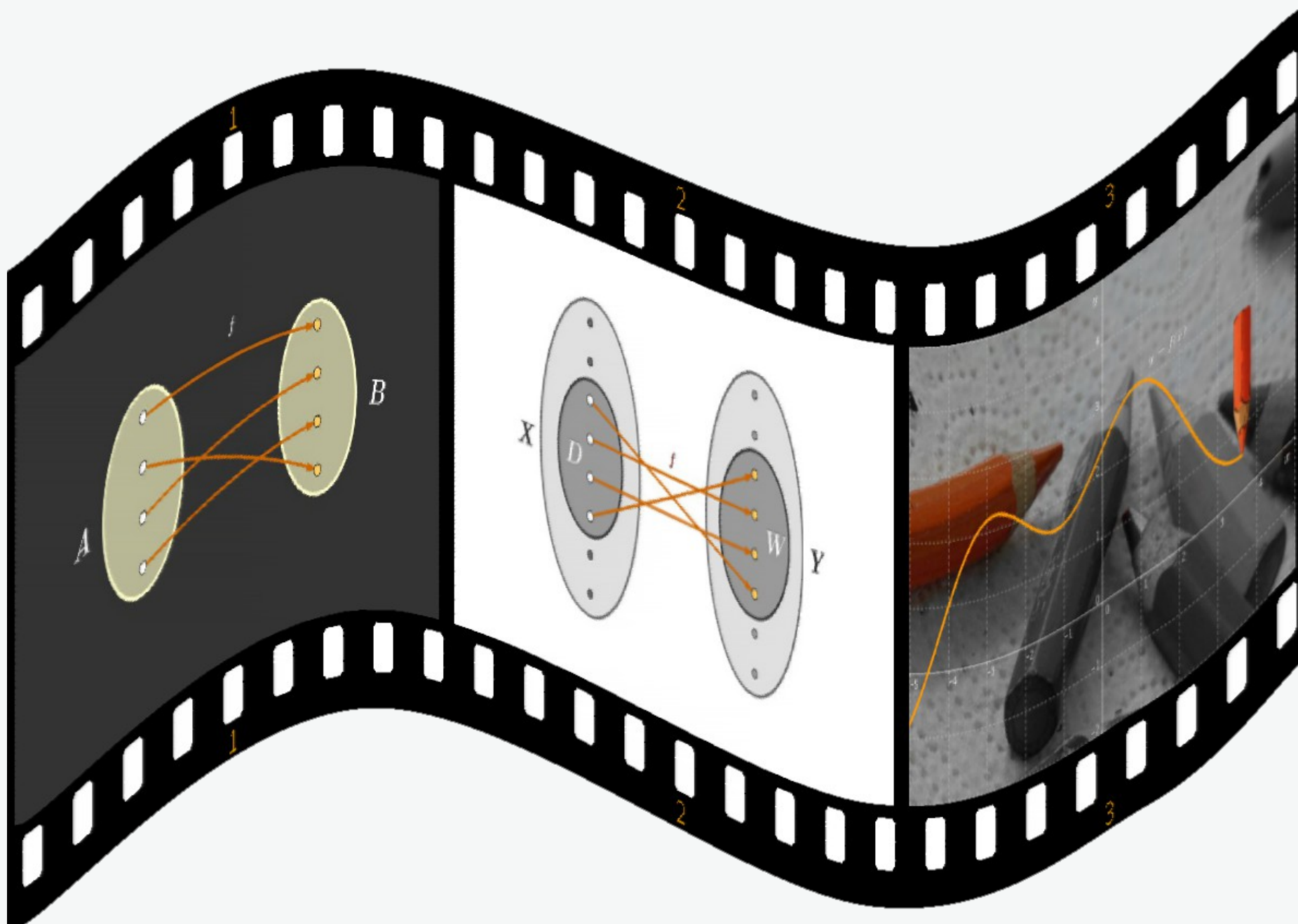
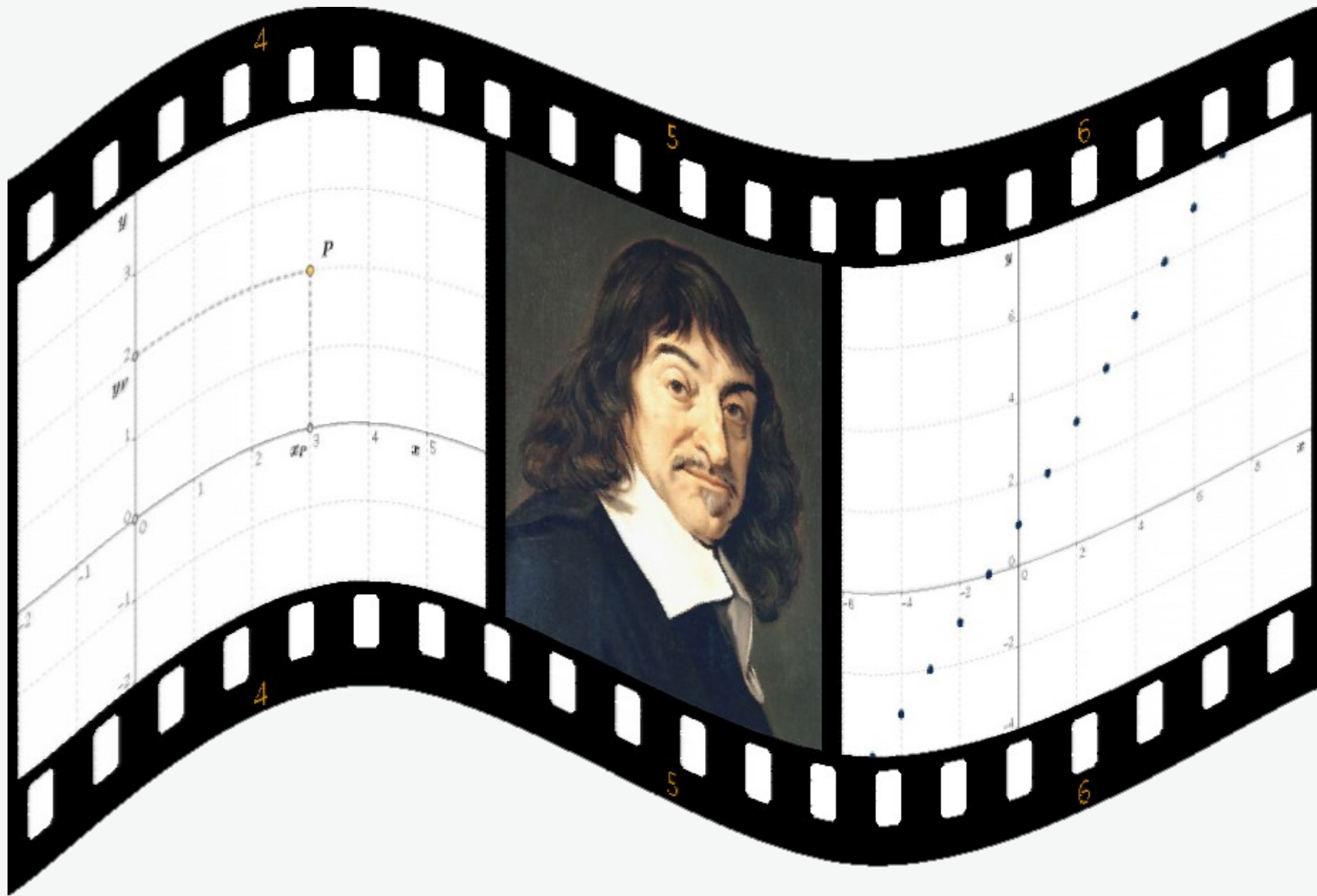




Funktionen: Einleitung

Funktionen sind fundamentale Instrumente der Mathematik zur Beschreibung verschiedener Zusammenhänge.





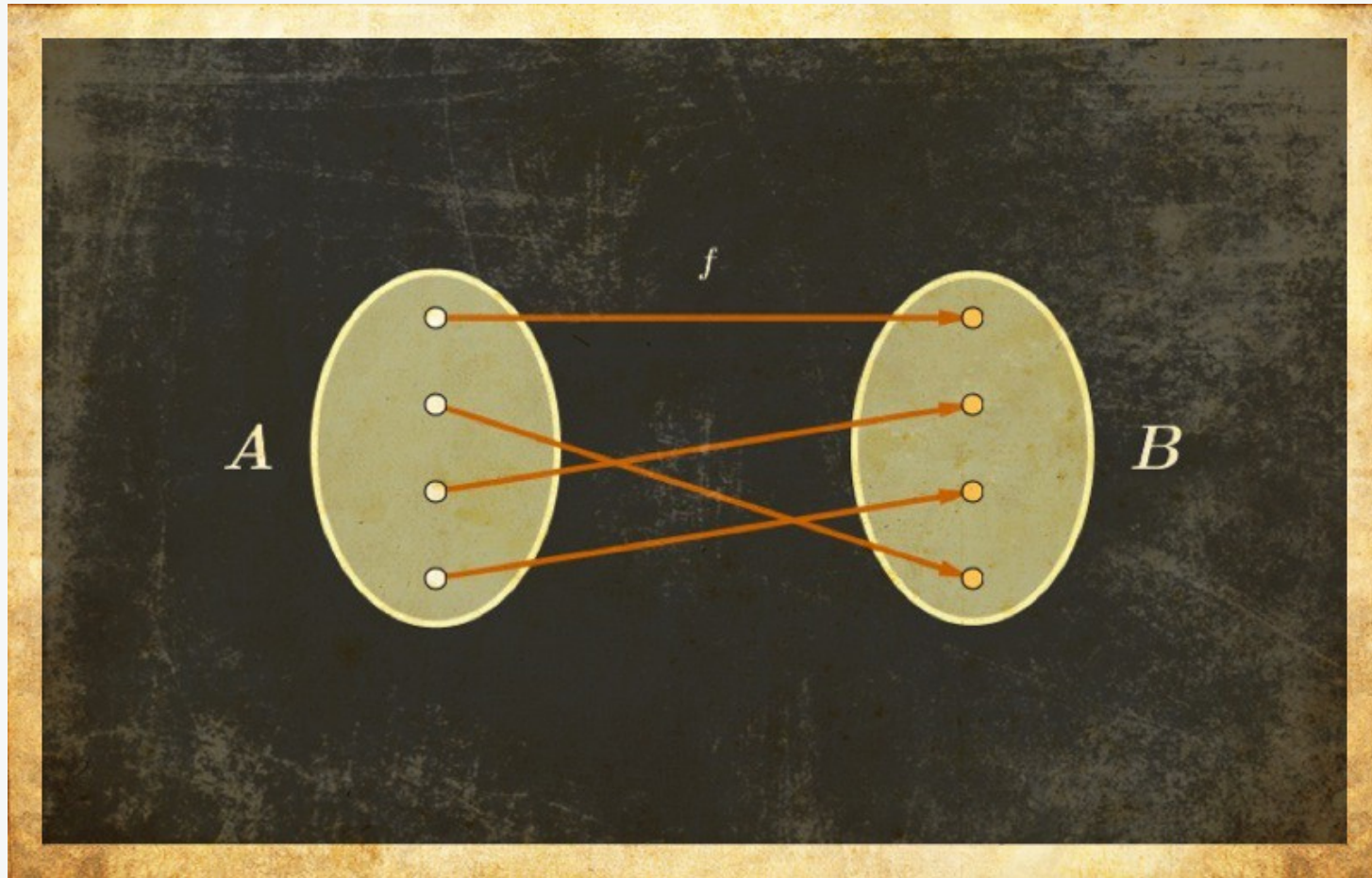


Abb. 1-1: Darstellung einer Abbildung

Oft will man Elementen einer bestimmten Menge auf eine eindeutige Weise Elemente einer anderen Menge zuordnen. Solche Zuordnungen nennt man Abbildungen. Der Abbildungsbegriff ist für die Mathematik von grundsätzlicher Bedeutung.

Definition:

Unter einer Abbildung f von A nach B versteht man eine Vorschrift (z. B. eine Formel, wörtliche Beschreibung), die jedem Element aus A genau ein Element aus B zuordnet.

Der Begriff “Abbildung” ist sehr allgemein und beinhaltet keine Einschränkungen bezüglich der Objekte, die einander zugeordnet werden. Den Begriff Funktion gebraucht man in einem engeren Sinn, und zwar dann, wenn es sich bei der Abbildung um die Zuordnung reeller Zahlen handelt. Man spricht in diesem Fall von reellwertigen Funktionen oder einfach von reellen Funktionen.

Eine Abbildung f von X nach Y wird auf folgende Weisen beschrieben:

$$1) \quad X \xrightarrow{f} Y, \quad f: X \rightarrow Y$$

$$2) \quad x \rightarrow f(x)$$

Der erste Ausdruck charakterisiert f als eine Abbildung von X nach Y , der zweite spezifiziert die Zuordnungsvorschrift, durch die x auf das Element $f(x)$ abgebildet wird.

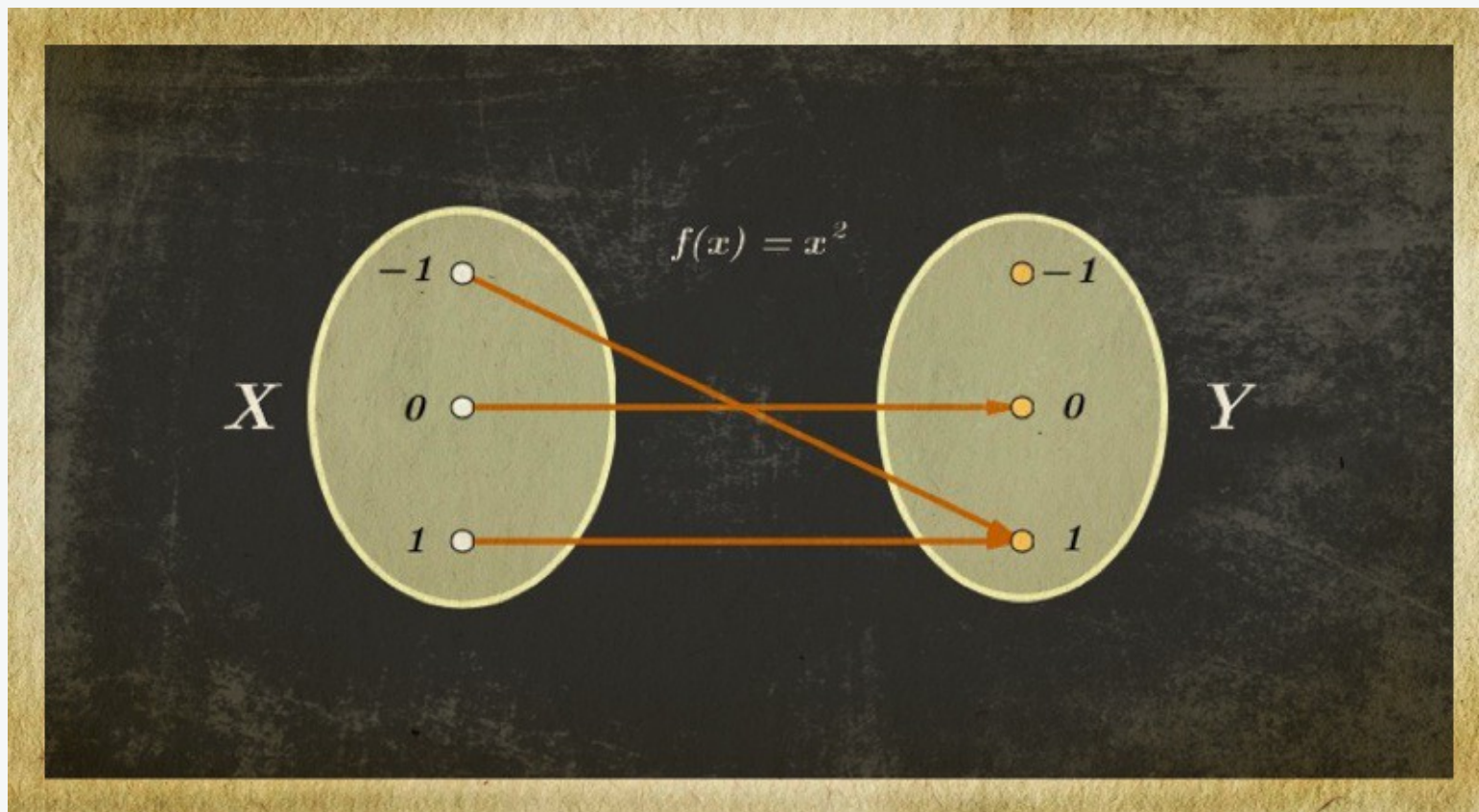


Abb. 1-2: Darstellung einer Abbildung mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^2$

Deutung der Abbildung 1-2:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1 \\ 0 \rightarrow f(0) = 0^2 = 0 \\ 1 \rightarrow f(1) = 1^2 = 1 \end{array} \right.$$

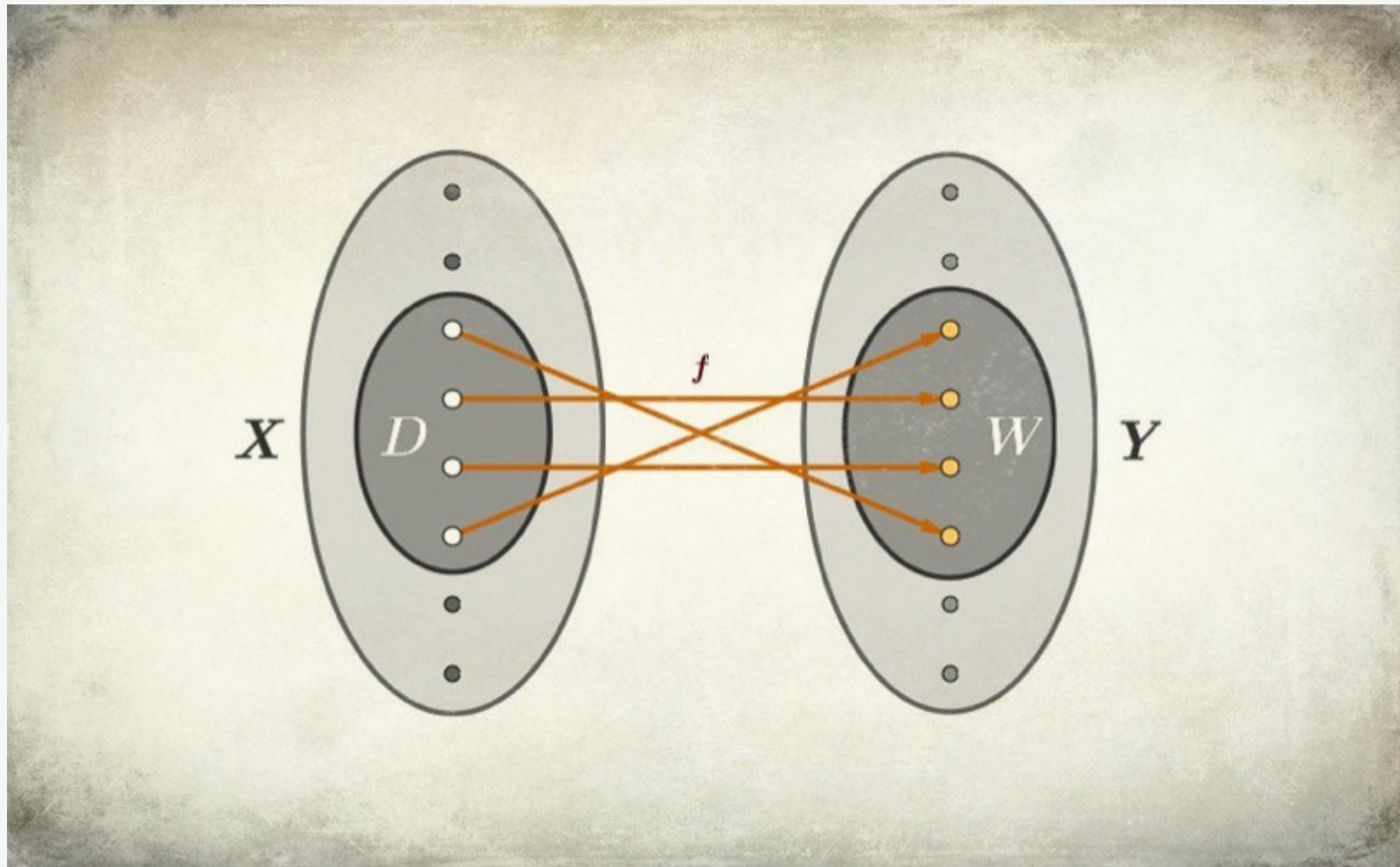


Abb. 1-3: Darstellung einer Abbildung von X nach Y . D ist die Definitionsmenge und W – der Wertebereich der Abbildung $f = f(x)$

Jedem x aus D wird nur ein Element $y = f(x)$ zugeordnet.

y – ist das Bild von x bezüglich f

x – ist das Urbild von y bezüglich f

Die Vorschrift f heißt Abbildung

Zu einem y aus W können mehrere Urbilder gehören.

Statt Abbildung sagt man auch Funktion.

Ist $X = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$, so nennt man f eine reelle Funktion.

Meist geht man zu einer Kurzfassung über:

$$f(x) = x^2 \quad \text{statt} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow x^2$$

Das ist natürlich völlig legitim, solange klar ist, was die Definitions- und was die Wertemenge ist.

Funktionen lassen sich mit Hilfe eines Koordinatensystems graphisch darstellen. Hierzu zeichnet man in der Ebene zwei sich kreuzende Zahlengeraden. Sie heißen Koordinatenachsen und werden oft x - und y -Achse genannt. Jeder Punkt P der Ebene kann dann durch Koordinaten, d.h. durch ein Zahlenpaar x_P und y_P beschrieben werden. Dabei ist x_P durch die Stelle gegeben, an der eine Parallele zur y -Achse, die durch den Punkt P geht, die x -Achse schneidet. Entsprechend ist y_P die Stelle, an der eine Parallele zur x -Achse durch P die y -Achse schneidet, siehe Abbildung 2-1.

Schiefwinkliges Koordinatensystem

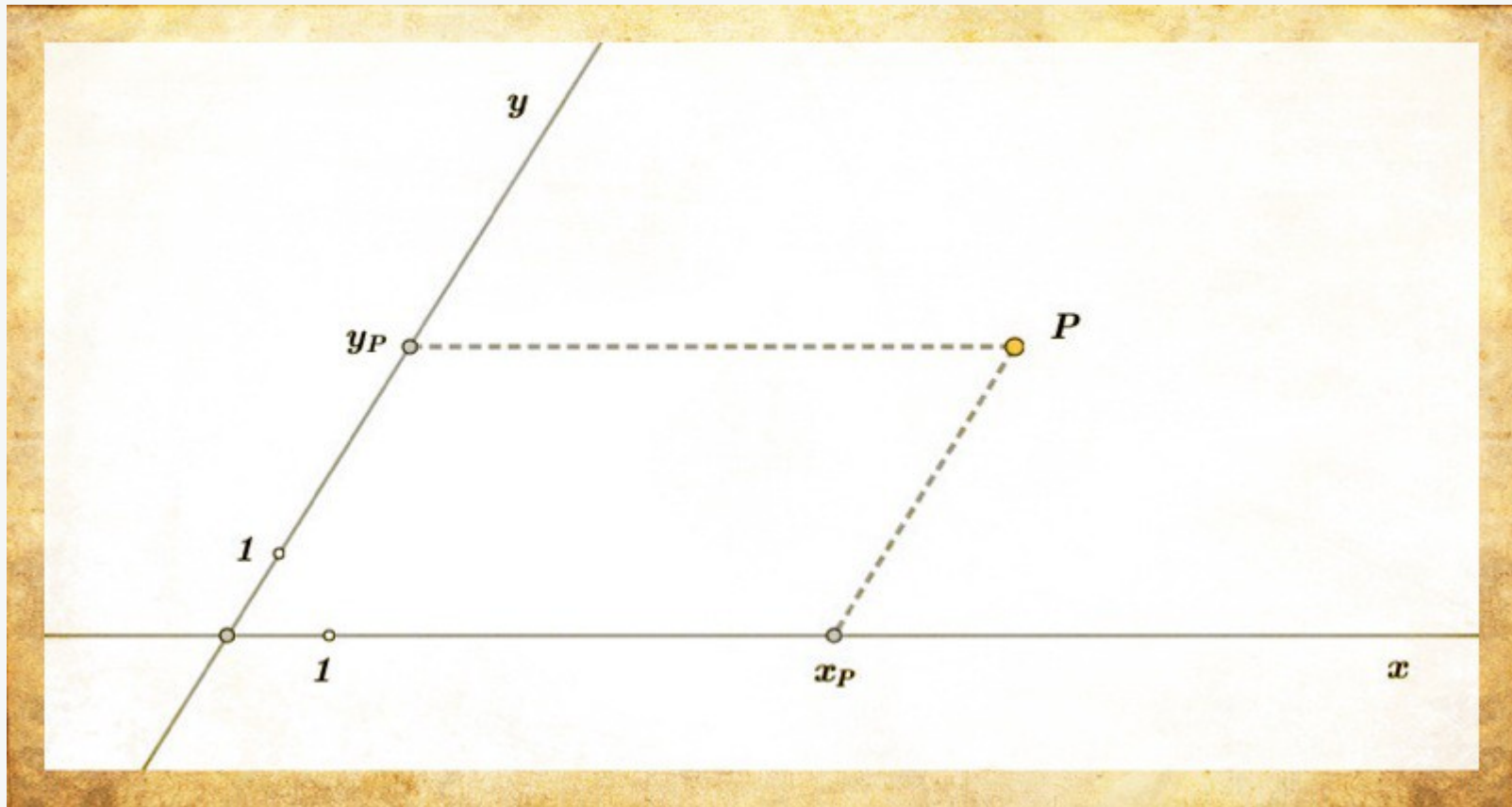


Abb. 2-1: Ein schiefwinkliges Koordinatensystem

Kartesisches Koordinatensystem

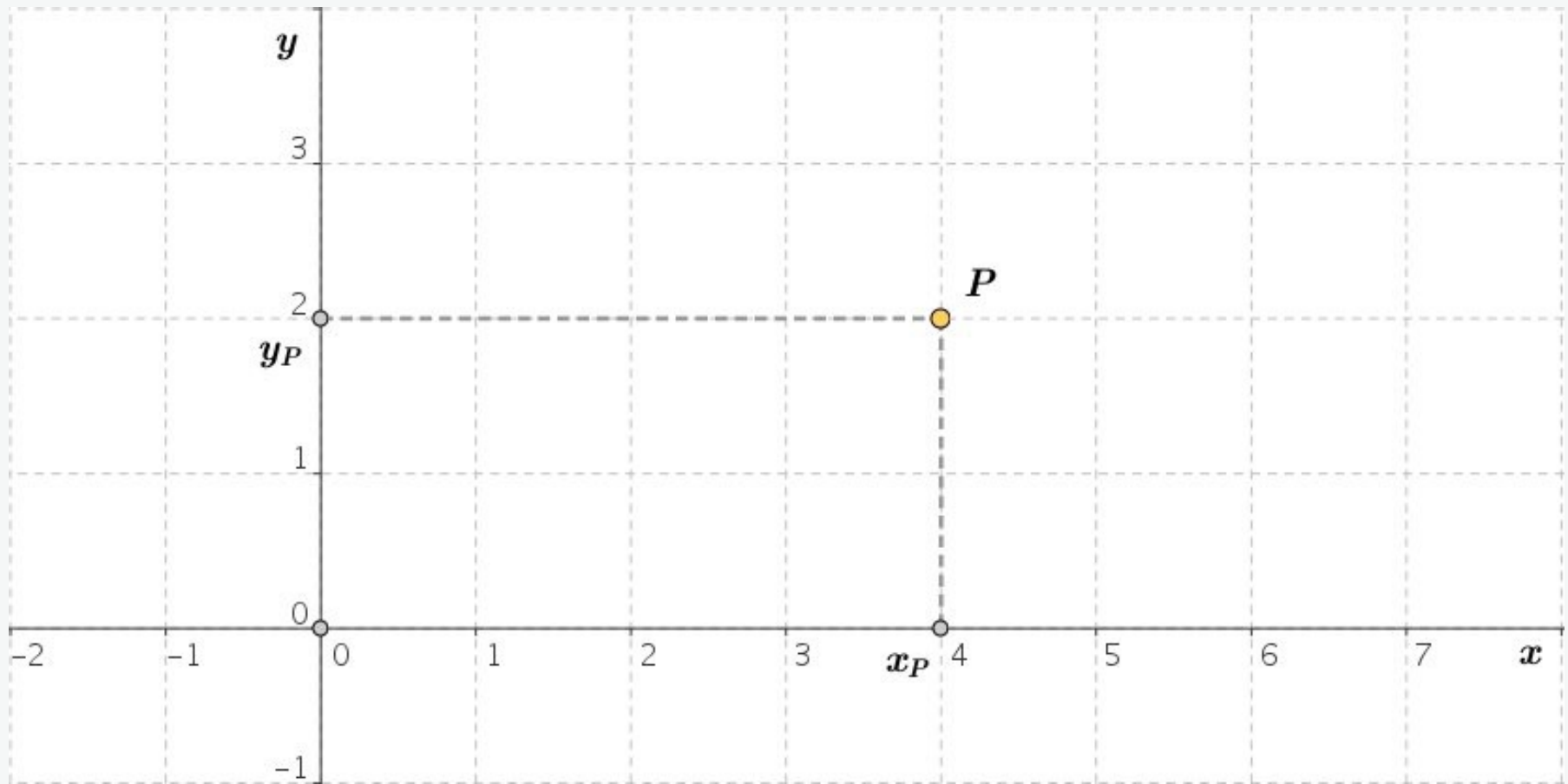


Abb. 2-2: Ein kartesisches Koordinatensystem

Ein Koordinatensystem heißt kartesisch, wenn die beiden Achsen senkrecht (orthogonal) zueinander sind und die Einheiten gleich sind, siehe z.B. das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem in Abbildung 2-2. Meistens benutzt man ein “rechtshändiges” System, bei dem sich die y -Achse durch Drehung der x -Achse um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn ergibt.

Eine graphische Darstellung einer Funktion f ist eine Darstellung der Gleichung $y = f(x)$. Sie besteht aus den Punkten $(x, y) = (x, f(x))$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Variable x , welche durch die Funktion f abgebildet wird, nennt man unabhängige Variable oder Abszisse, die durch f festgelegte Größe y nennt man abhängige Variable oder Ordinate.

Falls eine diskrete Menge abgebildet wird, z.B. die Menge der natürlichen Zahlen, so kann man die Funktion durch einzelne Punkte darstellen.

Zum Begriff der Abbildung (Funktion)

Die Abbildung (Funktion), welche jede reelle Zahl um 1 erhöht, wird durch $f(x): x \rightarrow y = x + 1$ beschrieben.

Im Folgenden zeichnen wir im kartesischem Koordinatensystem geordnete $(x, y) = (x, x + 1)$ Paare zu dieser Funktion, für

$$1) \quad X = Y = \mathbb{N}$$

$$2) \quad X = Y = \mathbb{Z}$$

$$3) \quad X = Y = \mathbb{R}$$

Zum Begriff der Abbildung (Funktion)

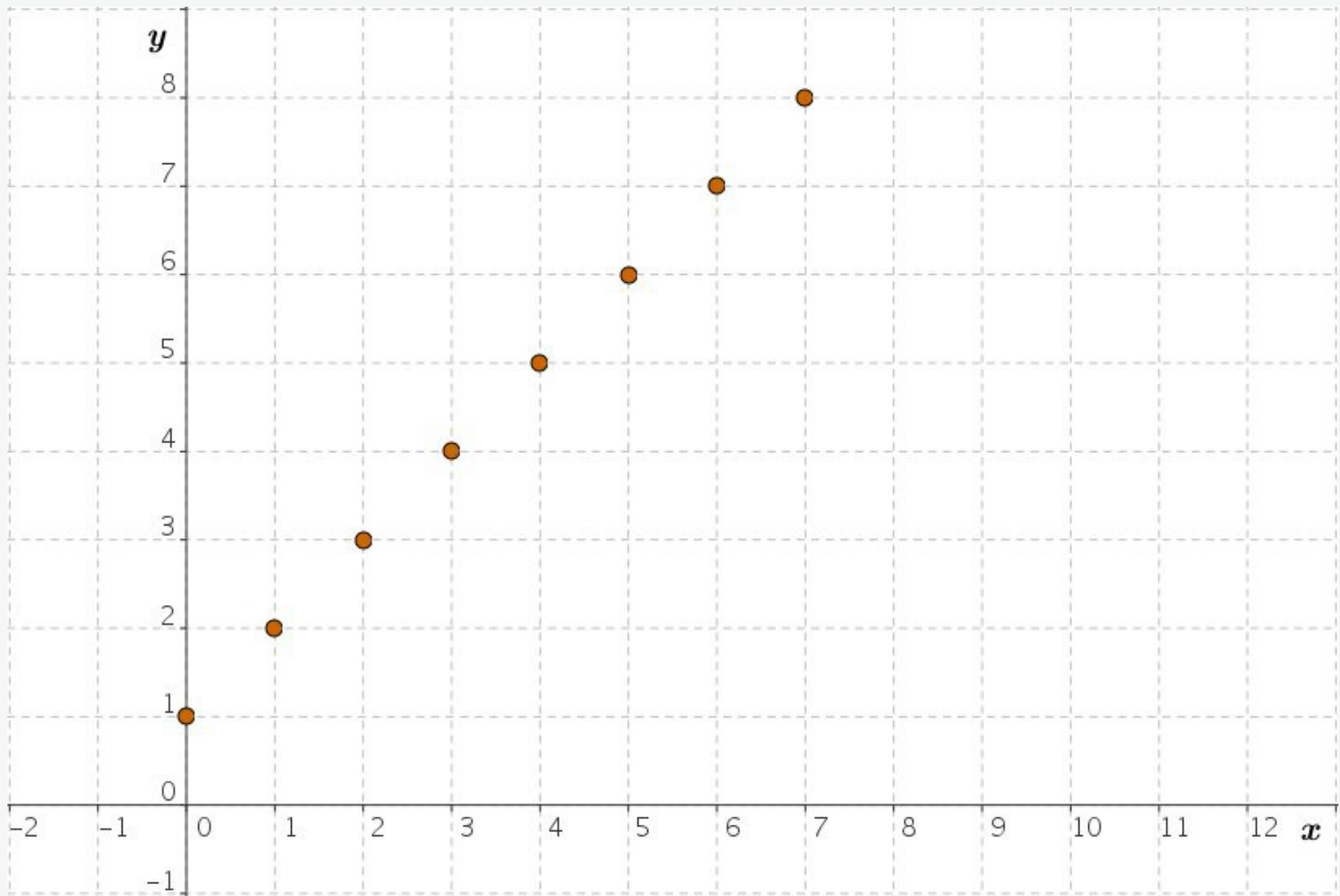


Abb. 3-1: Darstellung der Funktion $f(x) = x + 1$, wobei X und Y die Menge der natürlichen Zahlen sind.

Zum Begriff der Abbildung (Funktion)

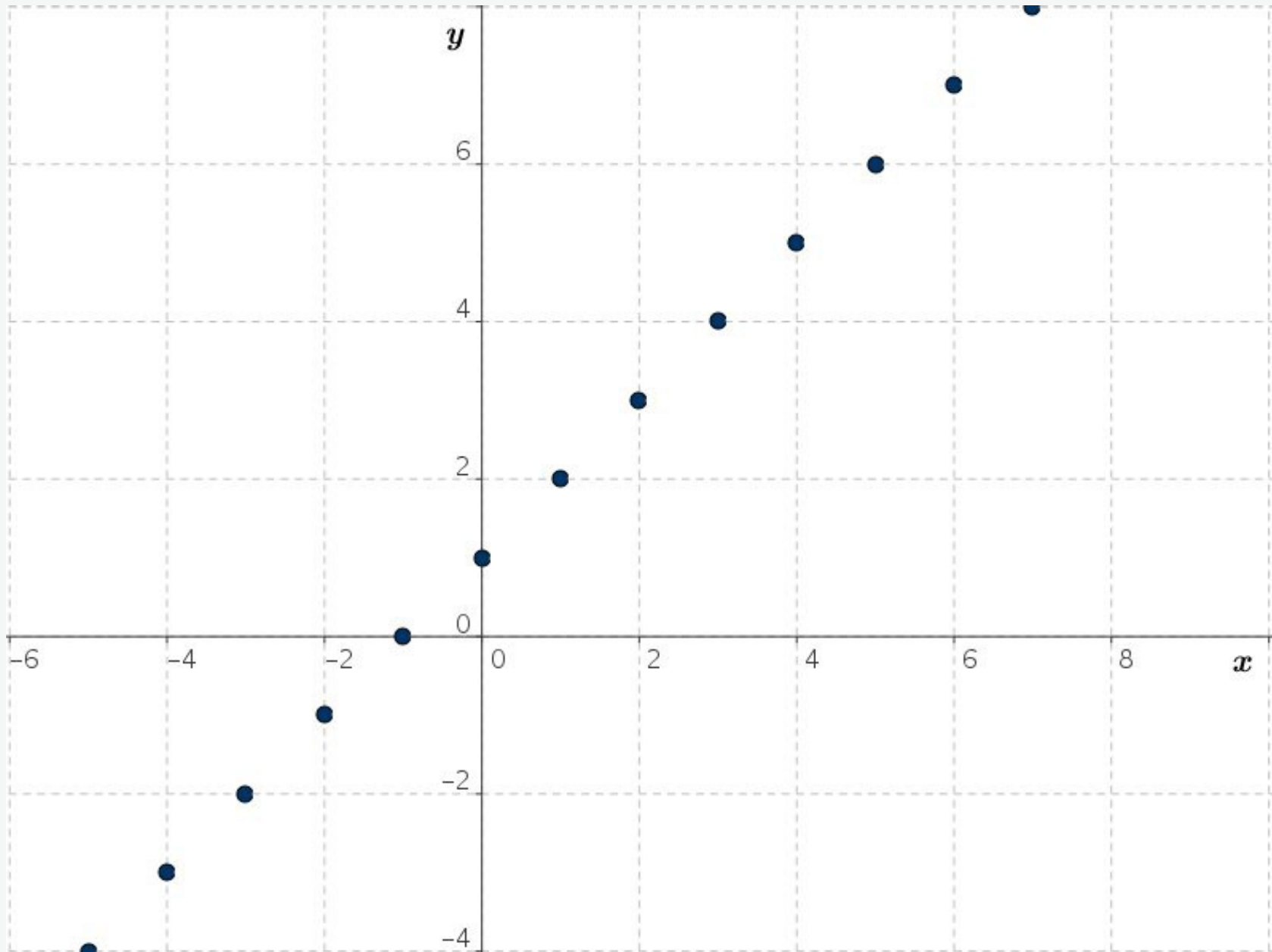


Abb. 3-2: Darstellung der Funktion $f(x) = x + 1$, wobei X und Y die Menge der ganzen Zahlen sind.

Zum Begriff der Abbildung (Funktion)

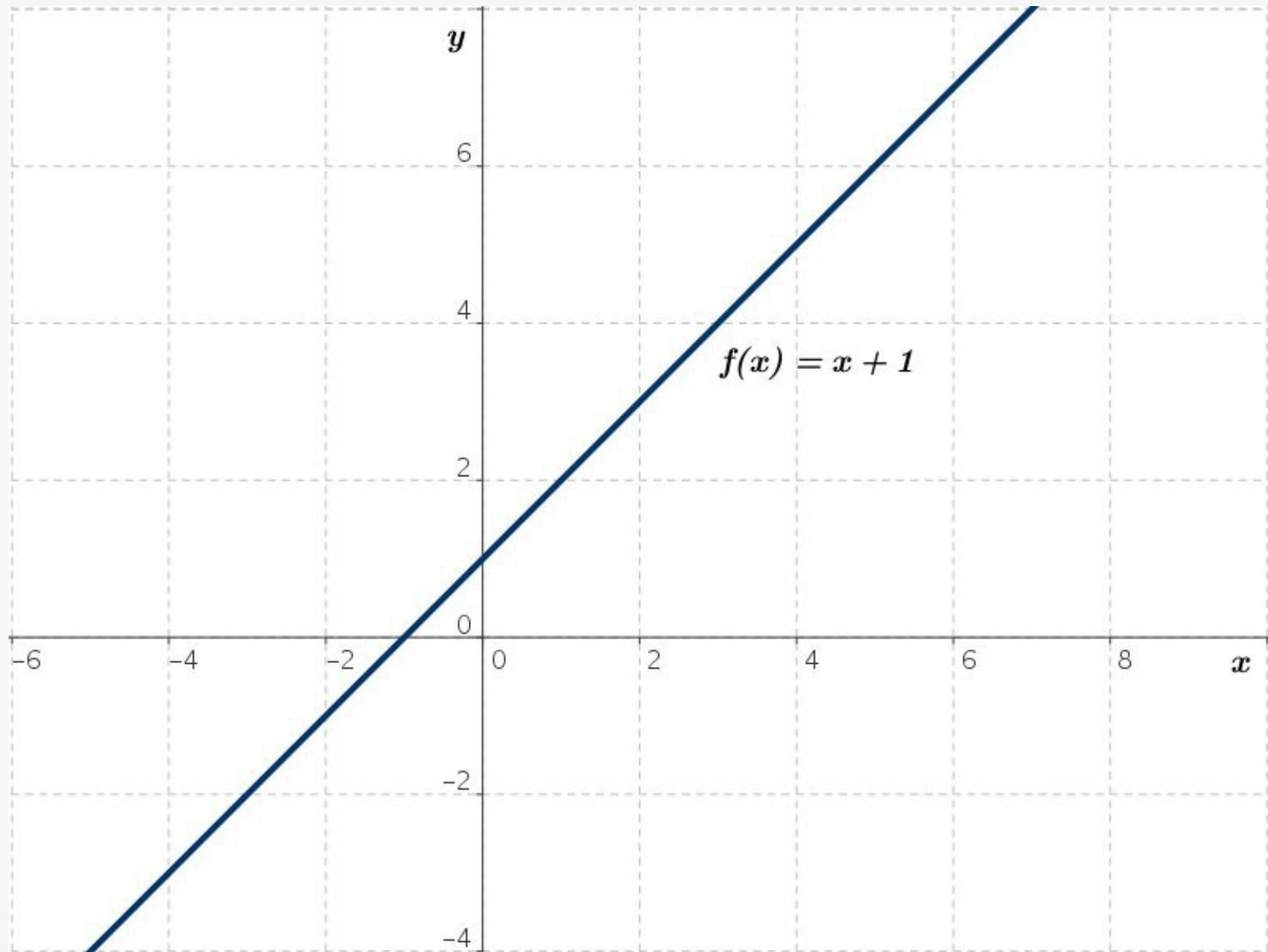


Abb. 3-2: Darstellung der Funktion $f(x) = x + 1$, wenn X und Y die Menge der reellen Zahlen sind.



Abb. 3: René Descartes, ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.

Das kartesische Koordinatensystem ist nach dem latinisierten Namen Cartesius seines Erfinders René Descartes benannt.