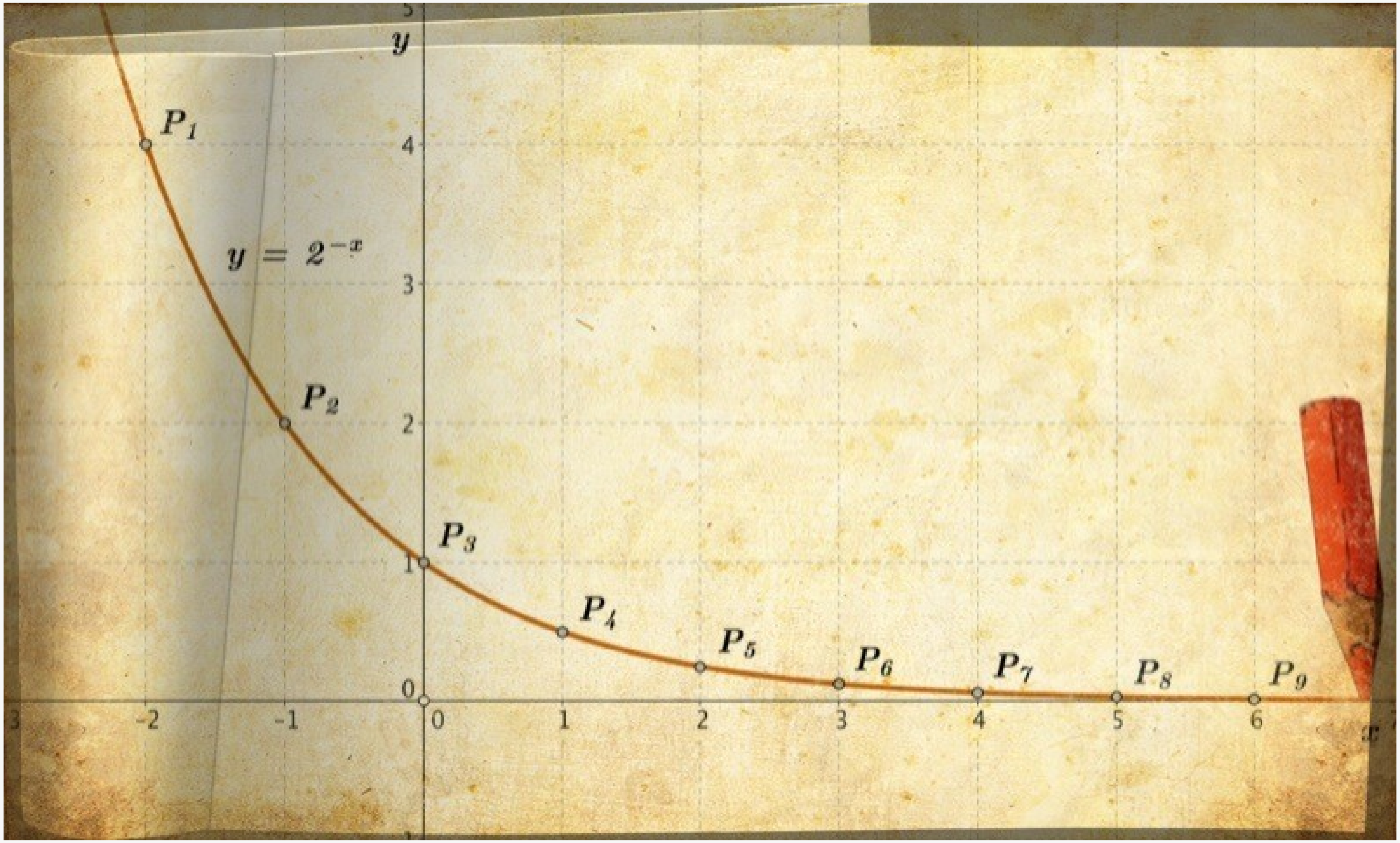

Exponentialfunktionen

Eigenschaften, graphische Darstellungen: Teil 2

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $y = f(x)$ zur Basis 2, $y = 2^{-x}$, und untersuchen Sie ihre Eigenschaften.

Aufgabe 2:

Was bewirkt der reelle Parameter a in der Funktion $y = 2^{-x+a}$?

Aufgabe 3:

Was bewirkt der Parameter c in der Funktion $y = 2^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Betrachten Sie dabei Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrieeigenschaften, Monotonie und Schnittpunkte mit den Achsen.

Aufgabe 4:

Zeichnen Sie die Exponentialunktionen mit den Basen 2, 4 und 8:

$y = 2^{-x}, \qquad y = 4^{-x}, \qquad y = 8^{-x}$

Was haben diese Funktionen gemeinsam, worin unterscheiden sie sich?

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $y = f(x)$ zur Basis 2, $y = 2^{-x}$, und untersuchen ihre Eigenschaften:

— Definitionsbereich (die Menge aller x-Werte, für die die Funktion definiert ist)

— Wertebereich (die Menge aller y-Werte der Funktion)

— Monotonie (eine fallende oder eine wachsende Funktion)

— Symmetrie (Bestimmen Sie ob die Funktion eine Achsen- oder eine Punktsymmetrie besitzt)

— Achsenschnittpunkte (die Schnittpunkte mit der x- oder y-Achse)

— Asymptote (eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion annähert, die er aber niemals erreicht)

Punkte zur graphischen Darstellung der Exponentialfunktion:

$$P_1 = \left(2,\ \ 2^{-(-2)}\right) = \left(2,\ \ 2^{\,2}\right) = \left(2,\ \ 4\right)$$

$$P_2 = \left(2,\ \ 2^{-(-1)}\right) = \left(2,\ \ 2\right) = \left(2,\ \ 2\right)$$

$$P_3 = \left(2,\ \ 2^{\,0}\right) = \left(2,\ \ 1\right) = \left(2,\ \ 1\right)$$

$$P_4 = \left(1,\ \ 2^{-1}\right) = \left(-1,\ \ \frac{1}{2}\right)$$

$$P_5 = \left(2,\ \ 2^{-2}\right) = \left(2,\ \ \frac{1}{2^{\,2}}\right) = \left(2,\ \ \frac{1}{4}\right)$$

$$P_6 = \left(3,\ \ 2^{-3}\right) = \left(3,\ \ \frac{1}{2^3}\right) = \left(3,\ \ \frac{1}{8}\right)$$

$$P_7 = \left(4,\ \ 2^{-4}\right) = \left(4,\ \ \frac{1}{2^4}\right) = \left(4,\ \ \frac{1}{16}\right)$$

$$P_8 = \left(5,\ \ 2^{-5}\right) = \left(5,\ \ \frac{1}{2^5}\right) = \left(5,\ \ \frac{1}{32}\right)$$

$$P_9 = \left(6,\ \ 2^{-6}\right) = \left(6,\ \ \frac{1}{2^6}\right) = \left(6,\ \ \frac{1}{64}\right)$$

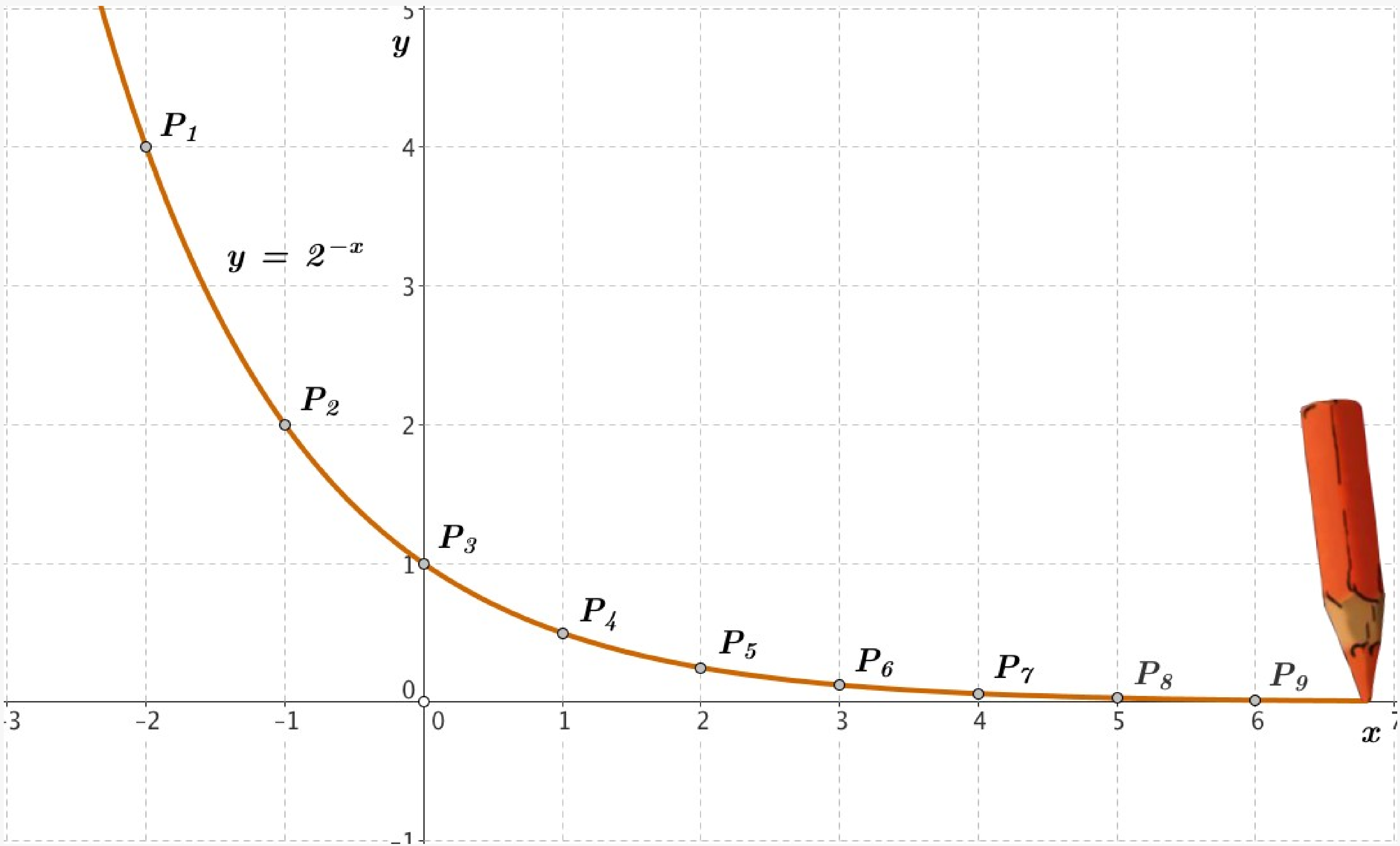

Abb. A1-1: Exponentialfunktion zur Basis 2

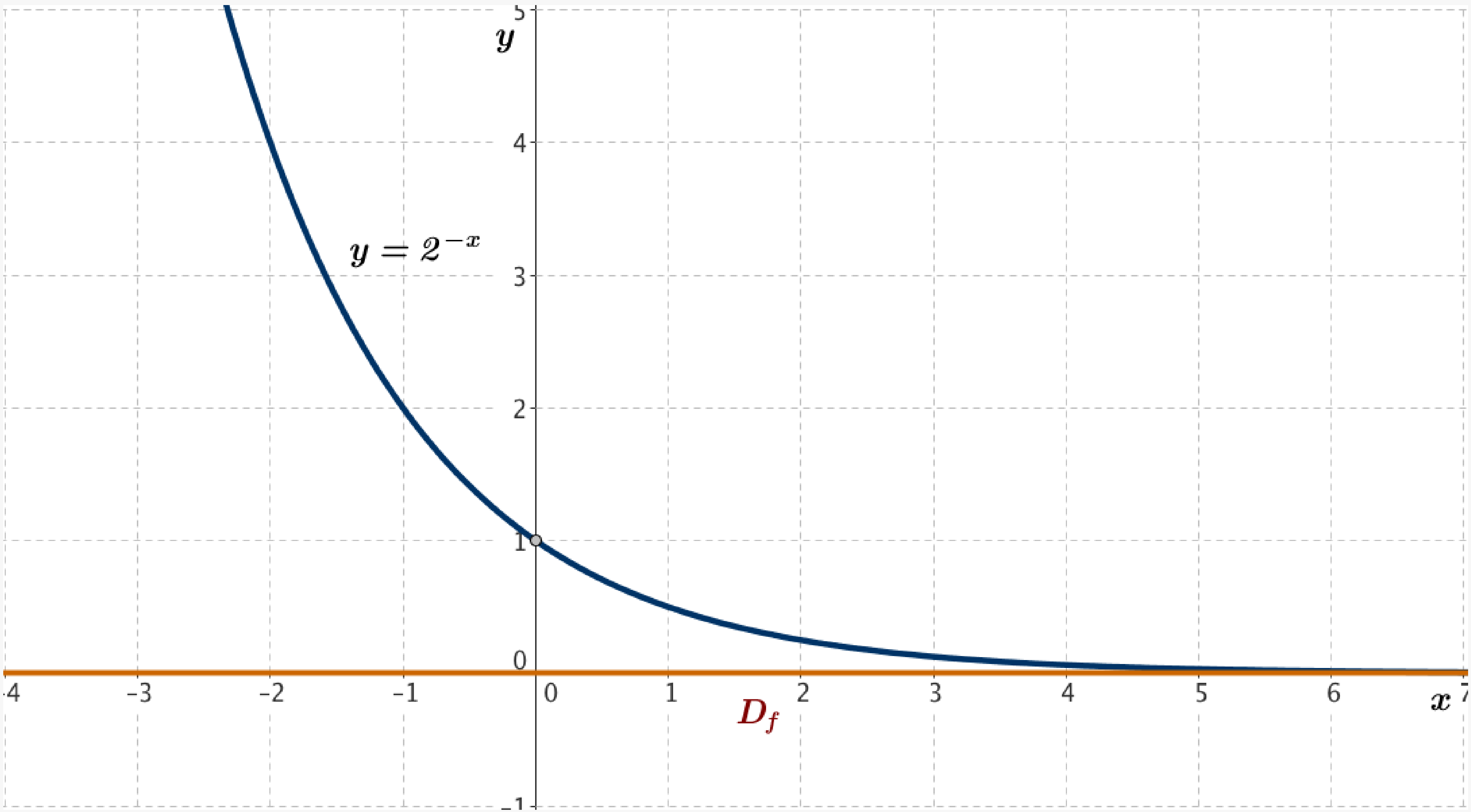

Abb. A1-2: Illustration des Definitionsbereiches der Exponentialfunktion zur Basis 2

Die Exponentialfunktion $y = f(x)$ ist für alle reelle x definiert:

$$f(x) = 2^{-x}, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

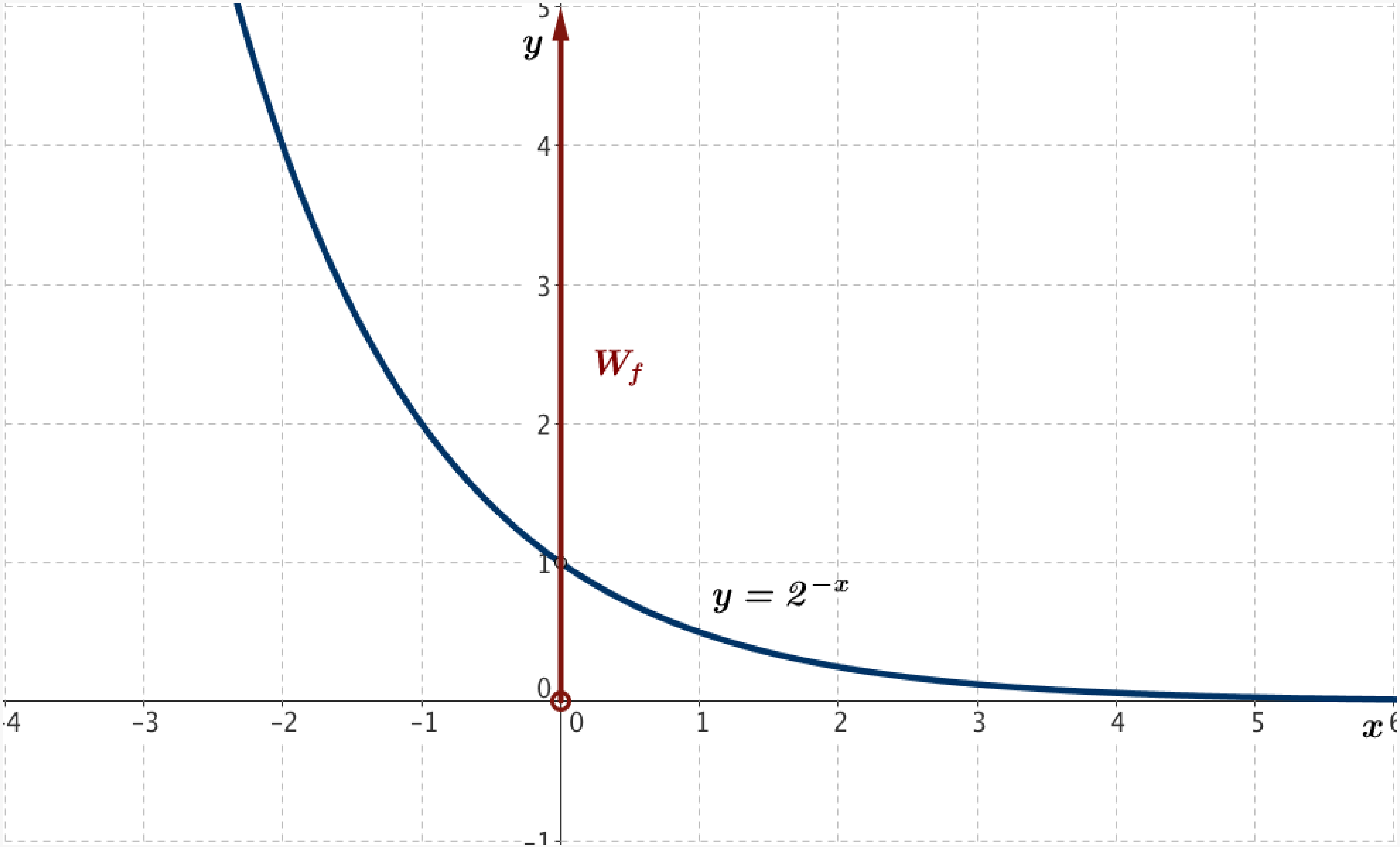

Abb. A1-3: Illustration des Wertebereiches der Exponentialfunktion zur Basis 2

Der Wertebereich der Exponentialfunktion $y = f(x)$ sind alle positiven reellen Zahlen:

$$f(x) = 2^{-x}, \qquad W_f = (0, \infty)$$

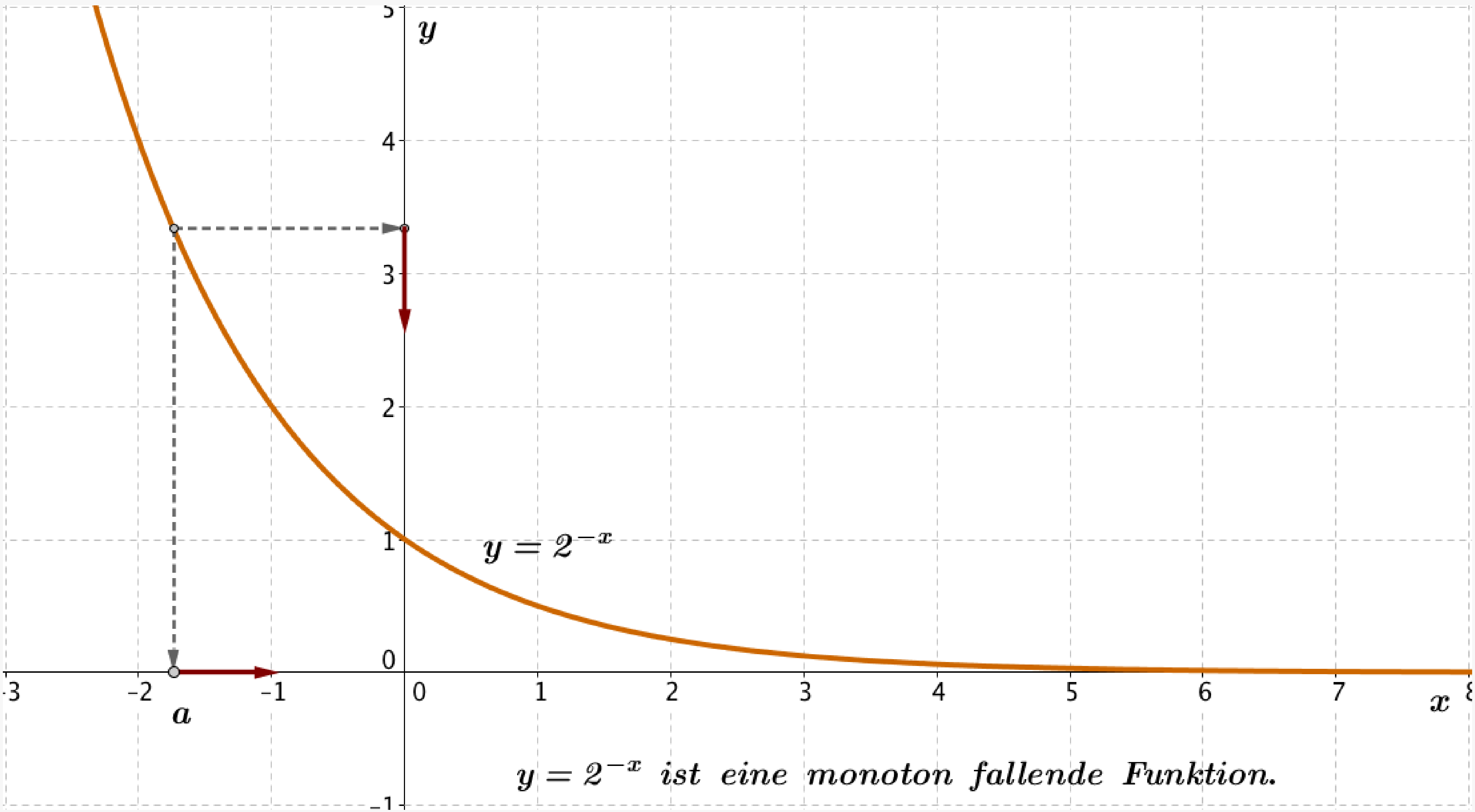

Abb. A1-4: Exponentialfunktion zur Basis 2

Die Funktion $y = f(x)$ ist streng monoton steigend, besitzt keine Symmetrie und hat den Schnittpunkt (0, 1) mit der y-Achse.

Aufgabe 2:

Was bewirkt der reelle Parameter a in der Funktion $y = 2^{x+a}$?

Hinweis:

Betrachten Sie die beiden Fälle: Der Parameter a hat einen positiven Wert, z.B. $a = 1$, und einen negativen Wert, z.B. $a = -1$.

$$y = 2^{a-x} = 2^{a} \cdot 2^{-x}$$

$$a = 1: \quad y = 2^{1-x} = 2 \cdot 2^{-x}$$

$$a = -1: \quad y = 2^{-1-x} = 2^{-1} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-x}$$

Die Funktionswerte ändern sich durch den Faktor 2 hoch a. Ist a positiv, verläuft der Graph der Funktion über dem Graph der Grundfunktion (rote Kurve in der Abb. A2). Ist a negativ, verläuft der Graph der Funktion unten der Grundfunktion (blaue Kurve in der der Abb. A2).

Die Funktionen $y = 2^{-x}, \quad y = 2^{a-x}$ haben gleichen Definitions- und Wertebereich, sind streng monoton fallend, besitzen keine Symmetrie und haben x-Achse als horisontale Asymptote. Durch Addieren eines Parameters zum Exponenten der Funktion $-x \to -x + a$ ändert sich der Schnittpunkt mit der y-Achse entsprechend der Formel:

$$S_y = (0,\ 1) \quad \to \quad S_y = (0,\ 2^{a})$$

$$a = 1: \quad y = 2^{1-x}, \qquad S_y = (0,\ 2)$$

$$a = -1: \quad y = 2^{-1-x}, \qquad S_y = \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$$

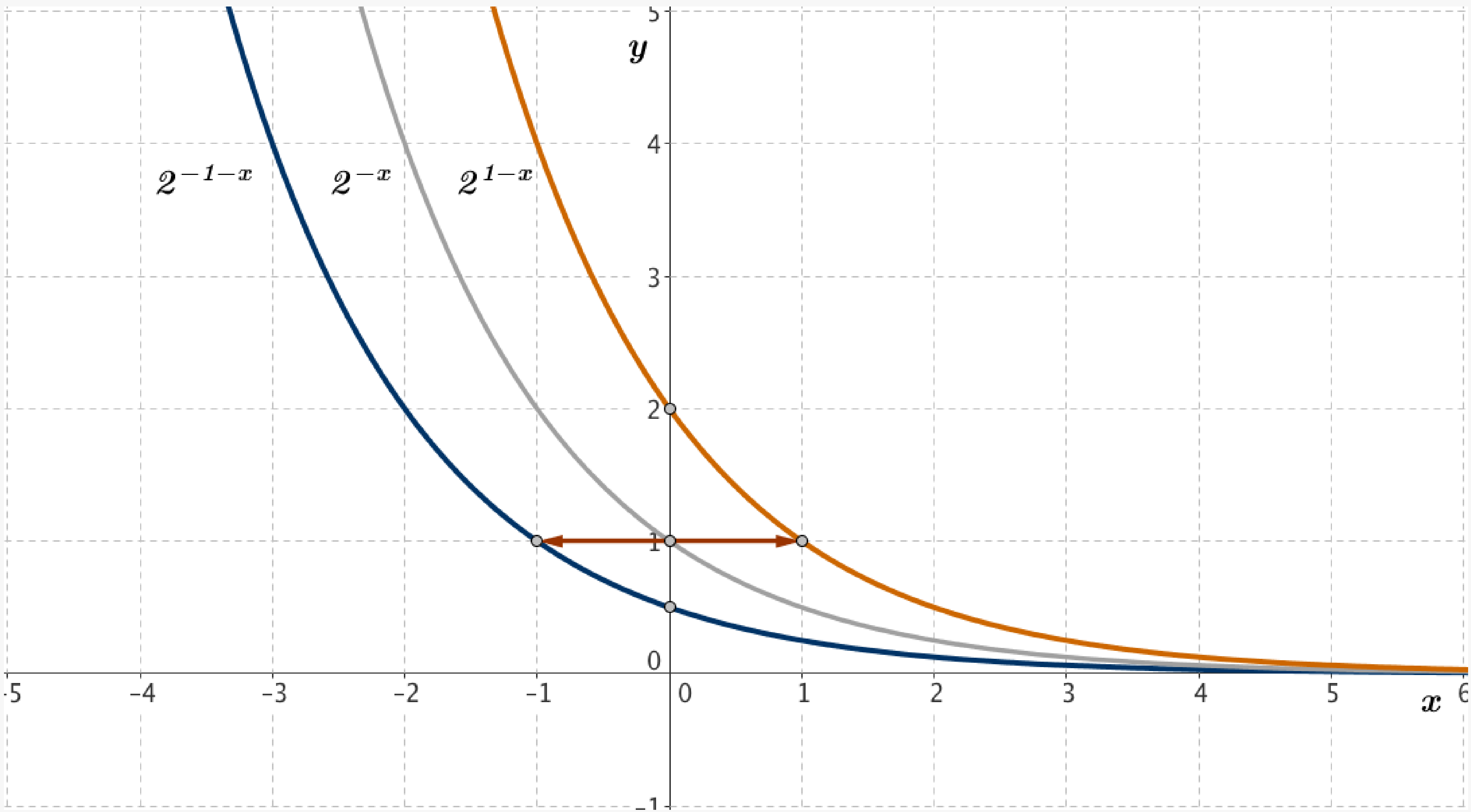

Abb. A2: Graphische Darstellung der Aufgabe: die rote Kurve entspricht dem Wert 1 und die blaue Kurve entspricht dem Wert -1 des Parameters a

$$y = 2^{a-x}$$

Das Argument $a - x$ bewirkt eine horizontale Verschiebung um $-a$ längs der x-Achse.