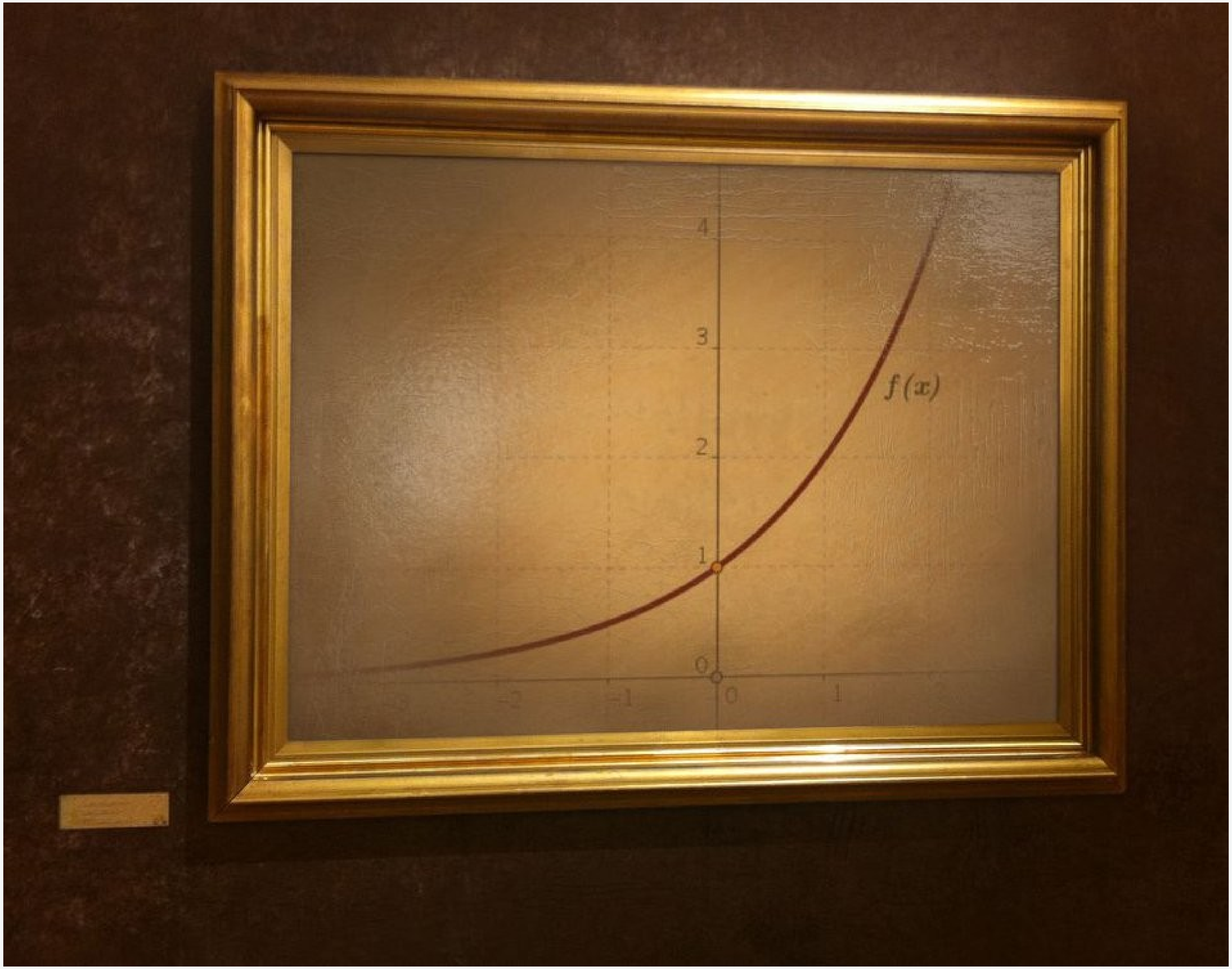

Exponentialfunktionen

Eigenschaften, graphische Darstellungen

Potenzfunktion: $y = x^9$

Exponentialfunktion: $y = 9^x$

Die Potenz- und die Exponentialfunktionen haben im wesentlichen denselben Aufbau. In beiden Fällen ist eine Basis mit einem Exponenten zu potenzieren. Während jedoch bei der Potenzfunktion die unabhängige Variable als Basis und eine Konstante als Exponent auftreten, ist das bei der Exponentialfunktion genau umgekehrt: Die Basis ist eine Konstante und die unabhängige Variable kommt im Exponenten vor.

Abb. 1: Einige Anwendungen der Exponentialfunktion mit der Basis e

Definition: Funktionen vom Typ $y = b^{x}$ mit positiver Basis b $(b \neq 1)$ heißen Exponentialfunktionen.

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $y = f(x)$ zur Basis 2, $y = 2^x$, und untersuchen ihre Eigenschaften.

Aufgabe 2:

Was bewirkt der reelle Parameter a in der Funktion $y = 2^{x+a}$?

Aufgabe 3:

Was bewirkt der Parameter c in der Funktion $y = 2^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Betrachten Sie dabei Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrieeigenschaften, Monotonie und Schnittpunkte mit den Achsen.

Aufgabe 4:

Zeichnen Sie die Exponentialunktionen mit den Basen 2, 4 und 8:

$y = 2^x, \qquad y = 4^x, \qquad y = 8^x$

Was haben diese Funktionen gemeinsam, worin unterscheiden sie sich?

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $y = f(x)$ zur Basis 2, $y = 2^x$, und untersuchen ihre Eigenschaften:

- Definitionsbereich (die Menge aller x-Werte, für die die Funktion definiert ist)
- Wertebereich (die Menge aller y-Werte der Funktion)
- Monotonie (eine fallende oder eine wachsende Funktion)
- Symmetrie (Bestimmen Sie ob die Funktion eine Achsen- oder eine Punktsymmetrie besitzt)
- Achsenschnittpunkte (die Schnittpunkte mit der x- oder y-Achse)
- Asymptote (eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion annähert, die er aber niemals erreicht)

Punkte zur graphischen Darstellung der Exponentialfunktion:

$$P_1 = (-6,\ 2^{-6}) = \left(-6,\ \frac{1}{2^6}\right) = \left(-6,\ \frac{1}{64}\right)$$

$$P_2 = (-5,\ 2^{-5}) = \left(-5,\ \frac{1}{2^5}\right) = \left(-5,\ \frac{1}{32}\right)$$

$$P_3 = (-4,\ 2^{-4}) = \left(-4,\ \frac{1}{2^4}\right) = \left(-4,\ \frac{1}{16}\right)$$

$$P_4 = (-3,\ 2^{-3}) = \left(-3,\ \frac{1}{2^3}\right) = \left(-3,\ \frac{1}{8}\right)$$

$$P_5 = (-2,\ 2^{-2}) = \left(-2,\ \frac{1}{2^2}\right) = \left(-2,\ \frac{1}{4}\right)$$

$$P_6 = (-1,\ 2^{-1}) = \left(-1,\ \frac{1}{2^1}\right) = \left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$P_7 = (0,\ 2^{0}) = \left(0,\ \frac{1}{2^0}\right) = (0,\ 1)$$

$$P_8 = (1,\ 2^{1}) = (1,\ 2)$$

$$P_9 = (2,\ 2^{2}) = (2,\ 4)$$

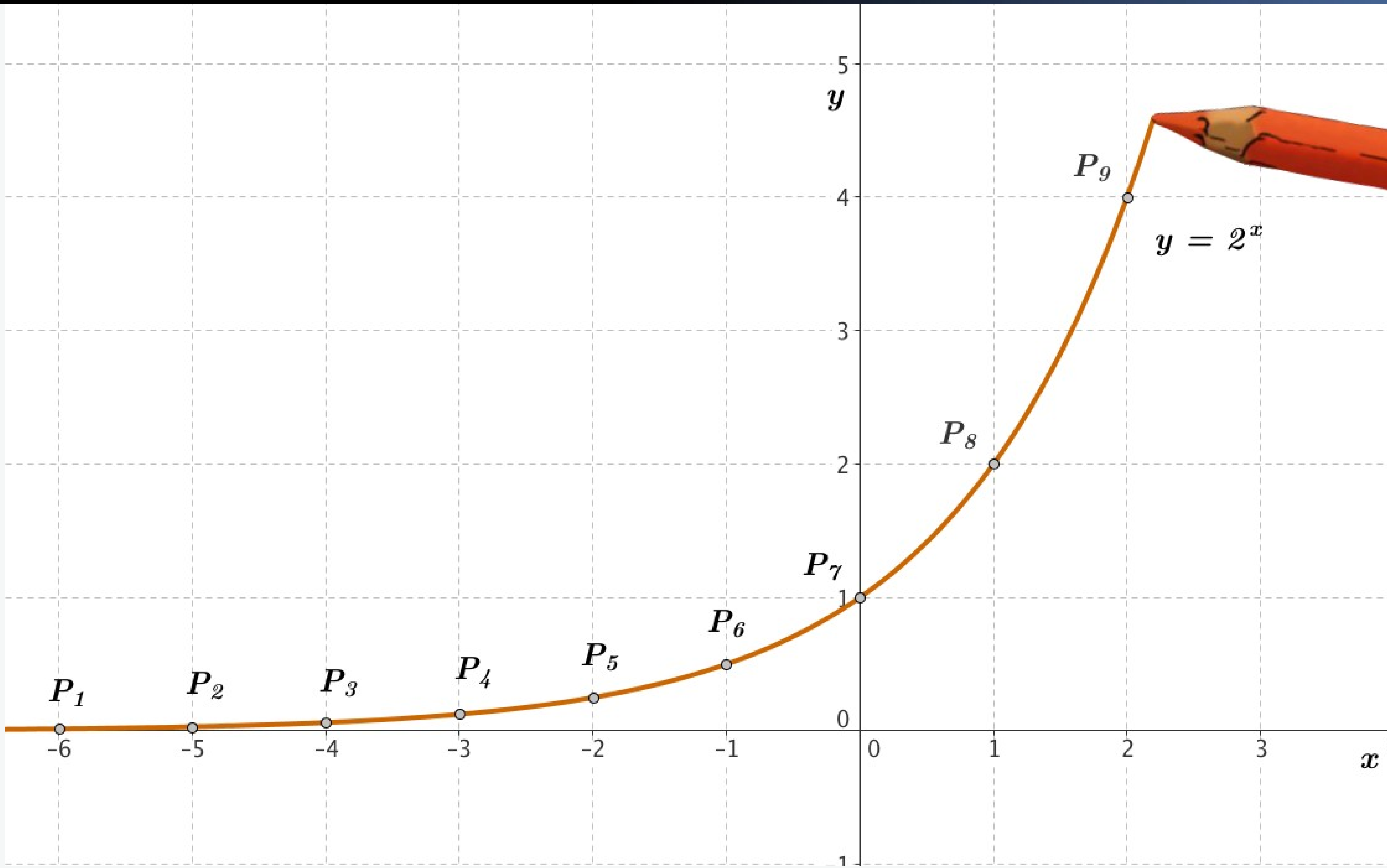

Abb. A1-1: Exponentialfunktion zur Basis 2

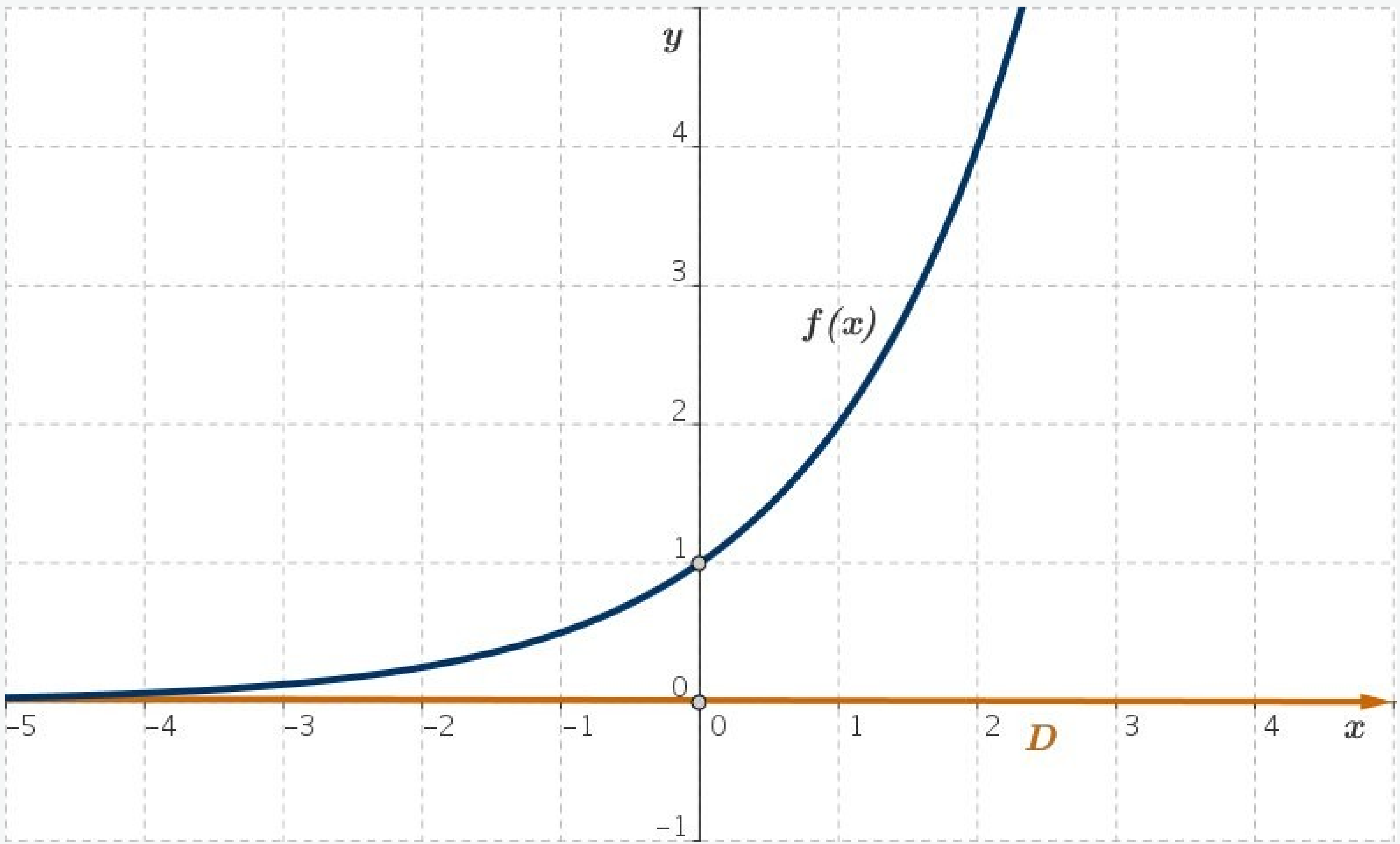

Abb. A1-2: Illustration des Definitionsbereiches der Exponentialfunktion zur Basis 2

Die Exponentialfunktion $y = f(x)$ ist für alle reelle x definiert:

$$f(x) = 2^x, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

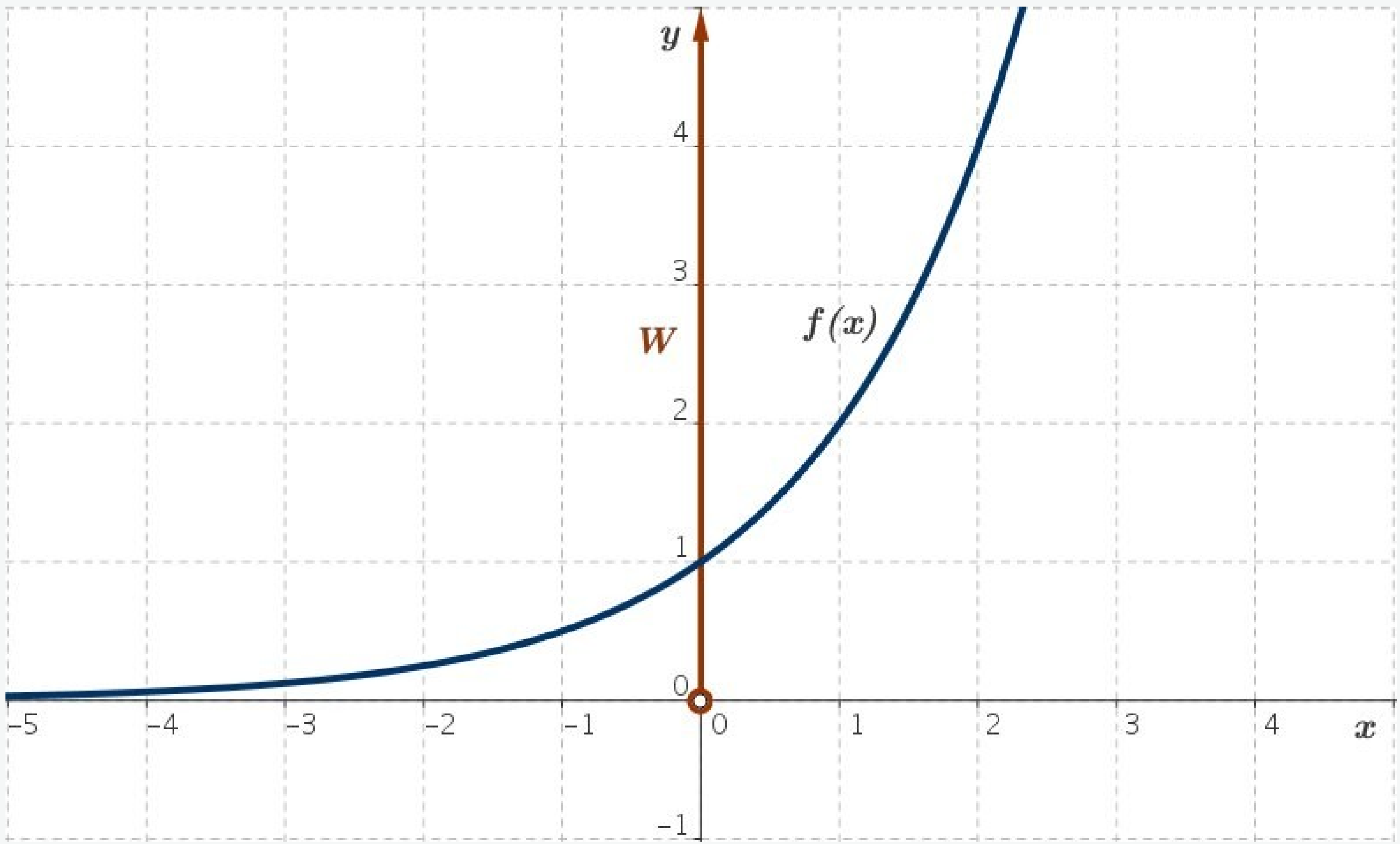

Abb. A1-3: Illustration des Wertebereiches der Exponentialfunktion zur Basis 2

Der Wertebereich der Exponentialfunktion $y = f(x)$ sind alle positiven reellen Zahlen:

$$f(x) = 2^x, \qquad W_f = (0, \infty)$$

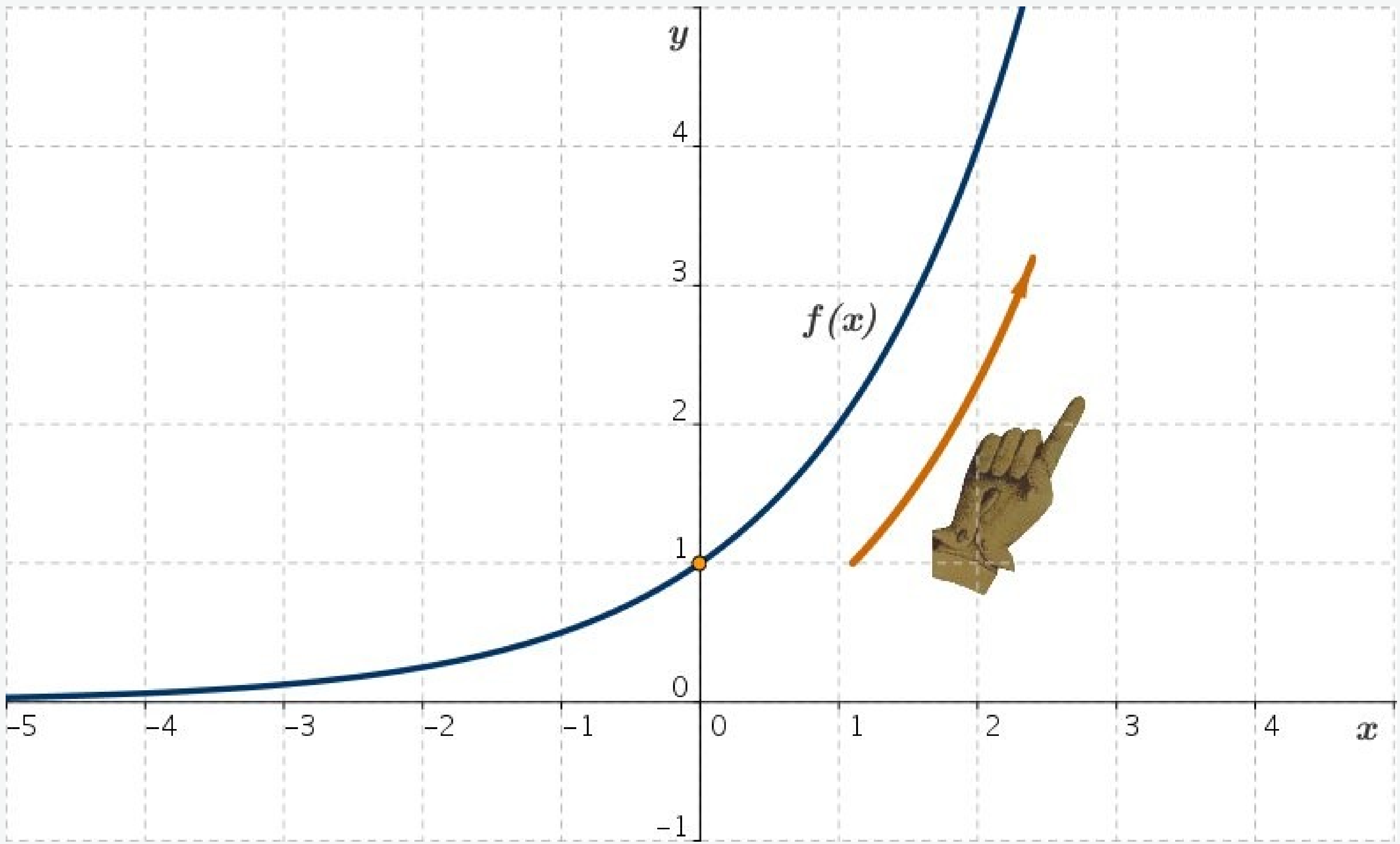

Abb. A1-4: Exponentialfunktion zur Basis 2

Die Funktion $y = f(x)$ ist streng monoton steigend, besitzt keine Symmetrie und hat den Schnittpunkt (0, 1) mit der y-Achse.

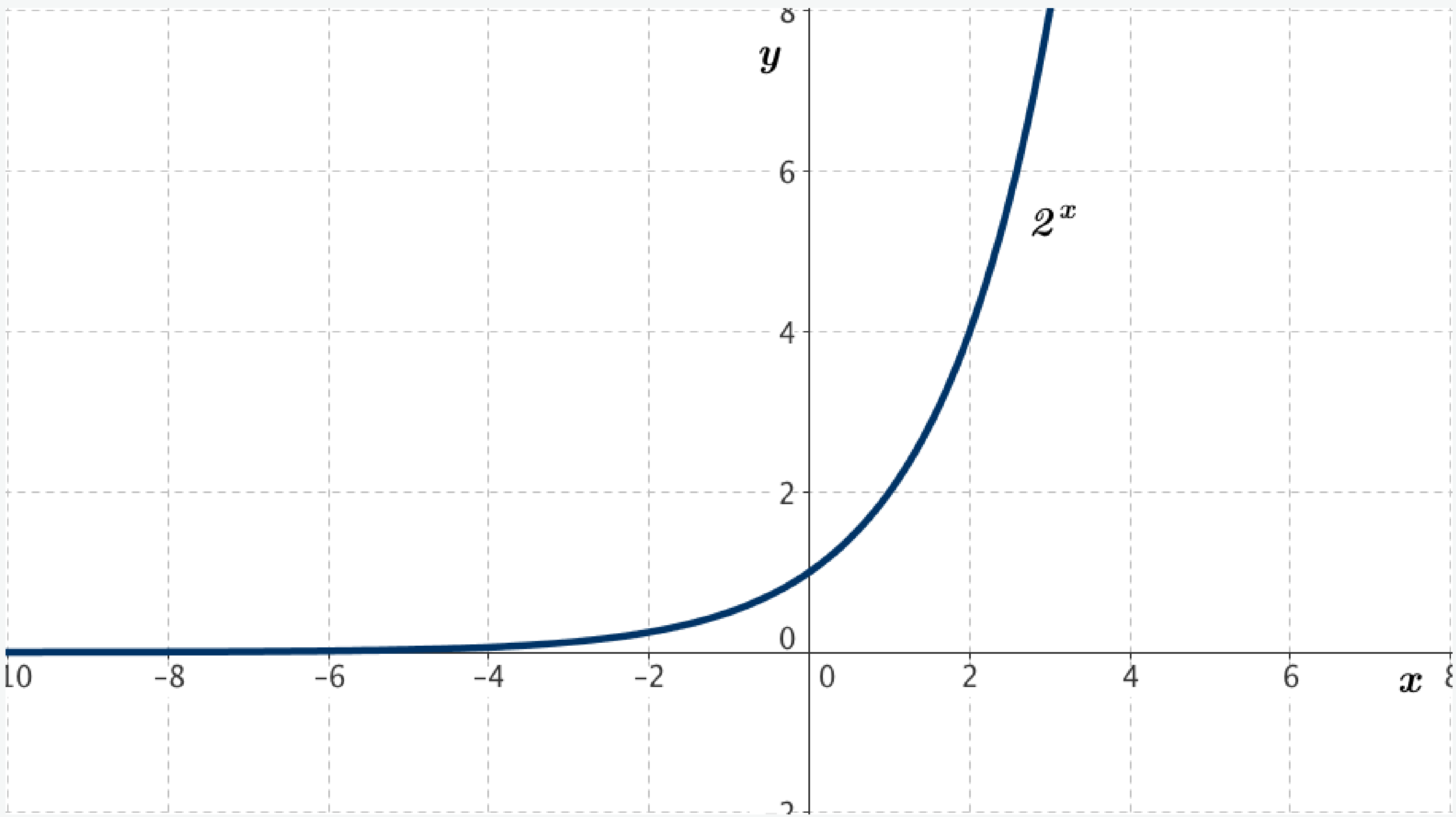

Abb. A1-5: Die x-Achse ist eine horizontale Asymptote der Exponentialfunktion. Der Funktionsgraph hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Aufgabe 2:

Was bewirkt der reelle Parameter a in der Funktion $y = 2^{x+a}$?

Hinweis:

Betrachten Sie die beiden Fälle: Der Parameter a hat einen positiven Wert, z.B. $a = 1$, und einen negativen Wert, z.B. $a = -2$.

$$y = 2^{a+x} = 2^a \cdot 2^x$$

$$a = 1: \quad y = 2^{1+x} = 2 \cdot 2^x$$

$$a = -2: \quad y = 2^{-2+x} = 2^{-2} \cdot 2^x = \frac{1}{4} \cdot 2^x$$

Die Funktionswerte ändern sich durch den Faktor 2 hoch a. Ist a positiv, verläuft der Graph der Funktion über dem Graph der Grundfunktion (rote Kurve in der Abb. A2). Ist a negativ, verläuft der Graph der Funktion unten der Grundfunktion (blaue Kurve in der der Abb. A2).

Die Funktionen $y = 2^x$, $y = 2^{a+x}$ haben gleichen Definitions- und Wertebereich, sind streng monoton steigend, besitzen keine Symmetrie und haben x-Achse als horizontale Asymptote. Durch Addieren eines Parameters zum Exponenten der Funktion $x \rightarrow x + a$ ändert sich der Schnittpunkt mit der y-Achse entsprechend der Formel:

$$S_y = (0,\ 1) \quad \rightarrow \quad S_y = (0,\ 2^a)$$

$$a = 1: \quad y = 2^{1+x}, \qquad S_y = (0, 2)$$

$$a = -2: \quad y = 2^{-2+x}, \qquad S_y = \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

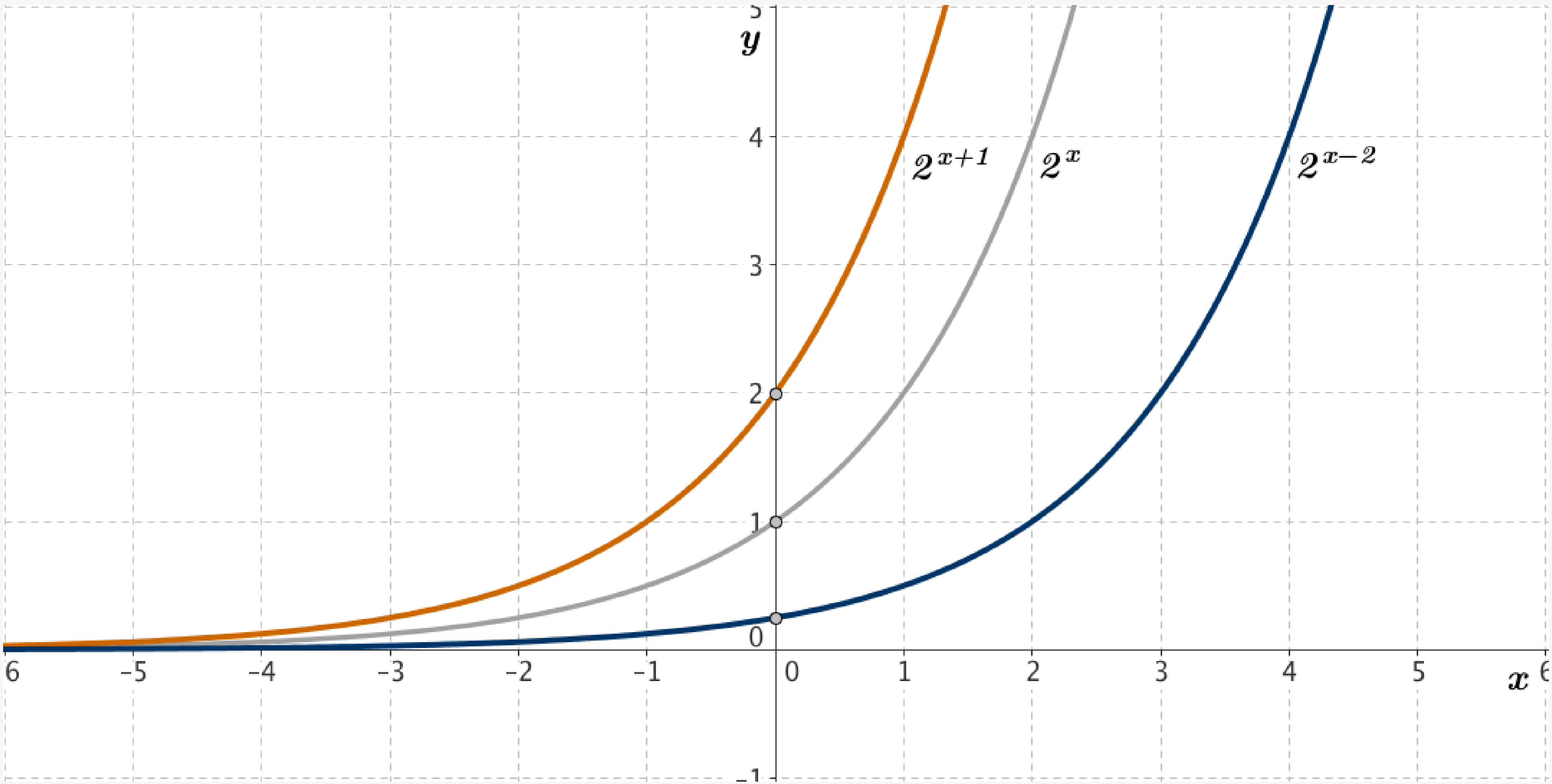

Abb. A2: Graphische Darstellung der Aufgabe: die rote Kurve entspricht dem Wert 1 und die blaue Kurve entspricht dem Wert -2 des Parameters a

$$y = 2^{x+a}$$

Das Argument $x + a$ bewirkt eine horizontale Verschiebung um $-a$ längs der x-Achse.

Aufgabe 3:

Was bewirkt der Parameter c in der Funktion

$$y = 2^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Betrachten Sie dabei Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrieeigenschaften, Monotonie und Schnittpunkte mit den Achsen.

Aufgabe 4:

Zeichnen Sie die Exponentialunktionen mit den Basen 2, 4 und 8:

$$y = 2^x, \qquad y = 4^x, \qquad y = 8^x$$

Was haben diese Funktionen gemeinsam, worin unterscheiden sie sich?

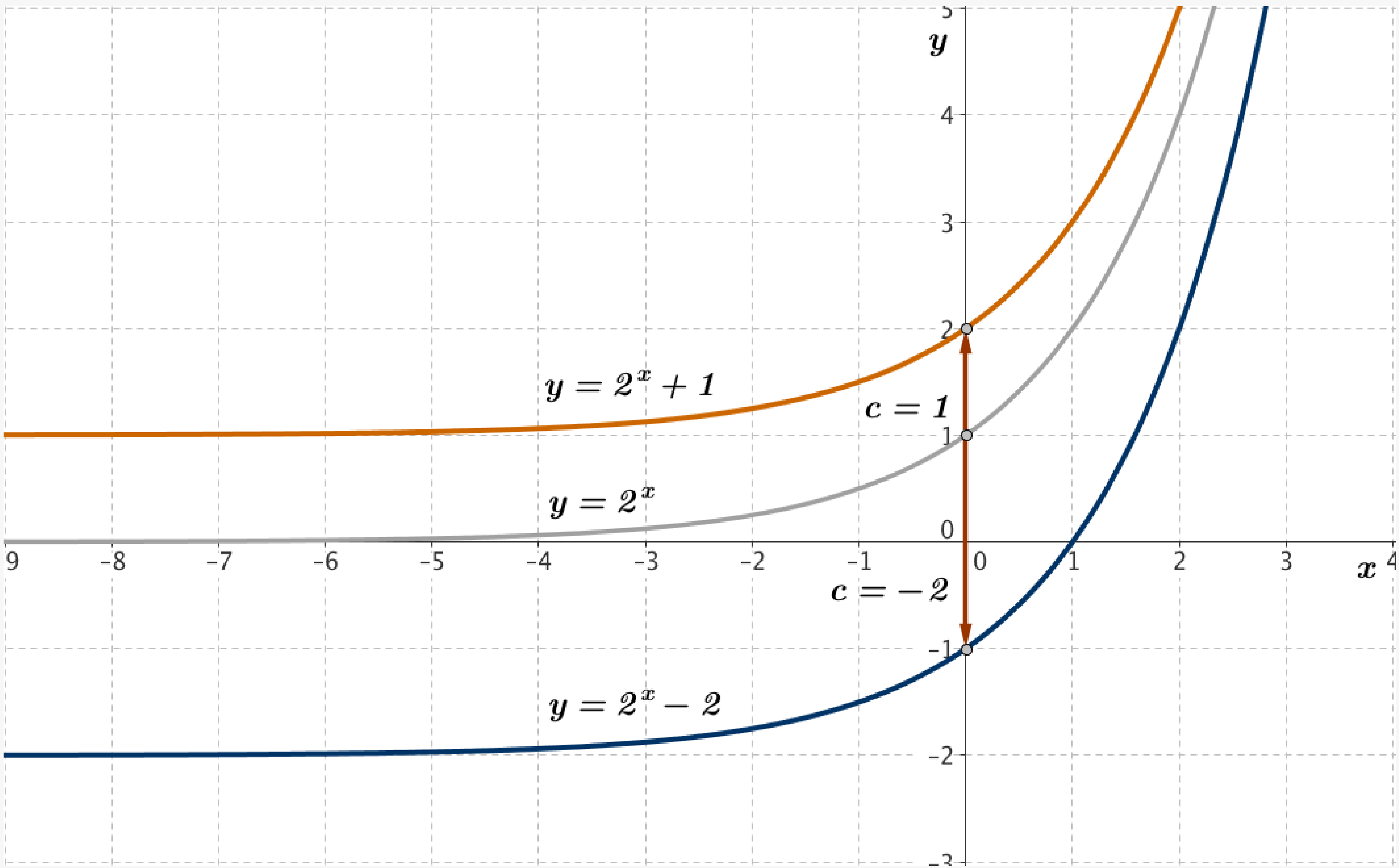

Abb. A3-1: Der Parameter c bewirkt eine vertikale Verschiebung. Durch c = 1 wird der Graph in positiver Richtung der y-Achse (rote Kurve), durch c = -2 in negativer Richtung der y-Achse (blaue Kurve) verschoben).

$$y = 2^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exponentialfunktion zur Basis 2: Lösung 3

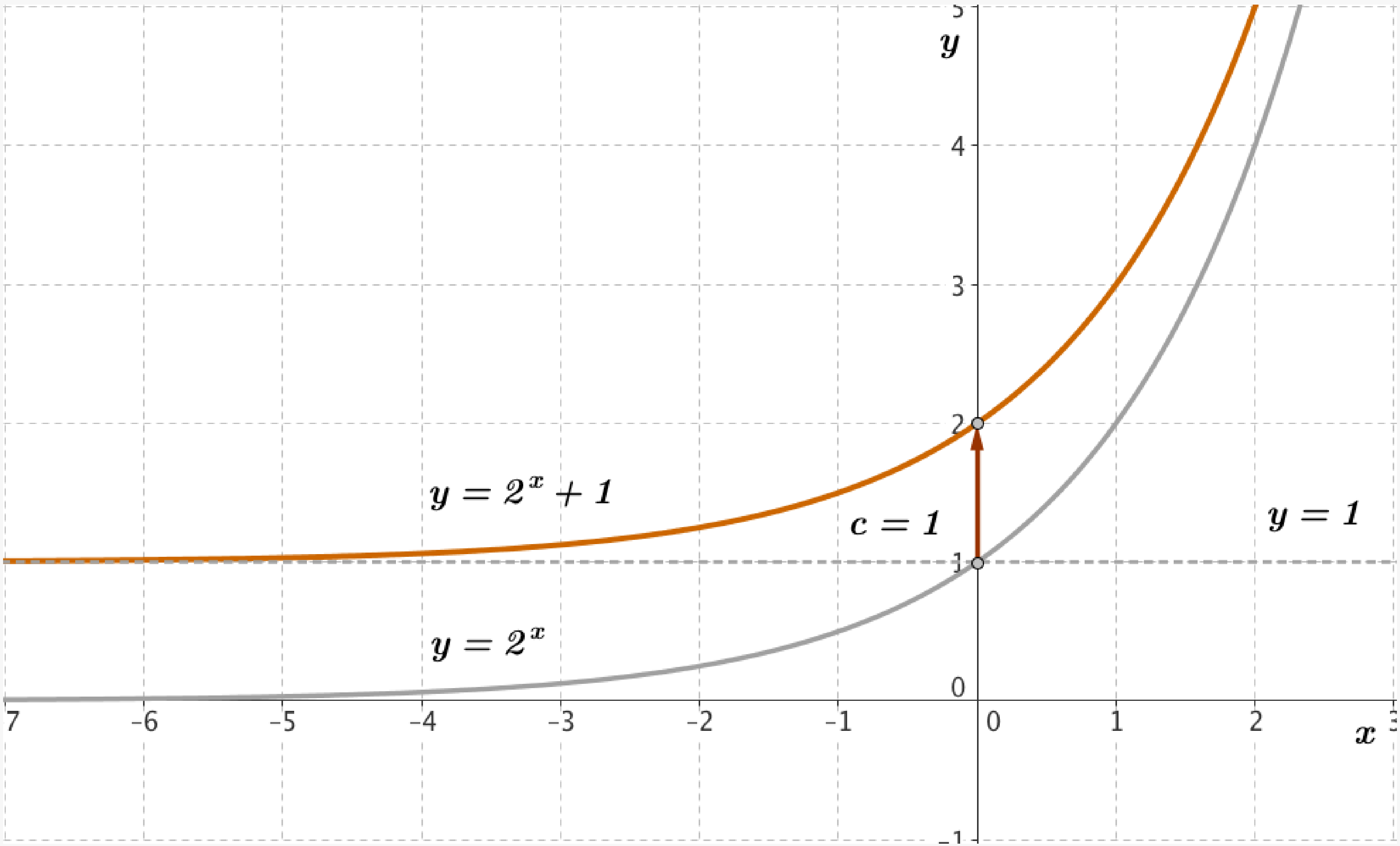

Abb. A3-2: Der Parameter c = 1 bewirkt eine vertikale Verschiebung in positiver Richtung der y-Achse. Bei einer solchen Verschiebung ändern sich der Wertebereich, die Lage des Schnittpunktes mit der y-Achse und die horizontale Asymptote

$$y = 2^x \quad \rightarrow \quad y = 2^x + 1 \; :$$

$$W = (0, \infty) \;\rightarrow\; W = (1, \infty), \qquad S_y = (0, 1) \;\rightarrow\; S_y = (0, 2)$$

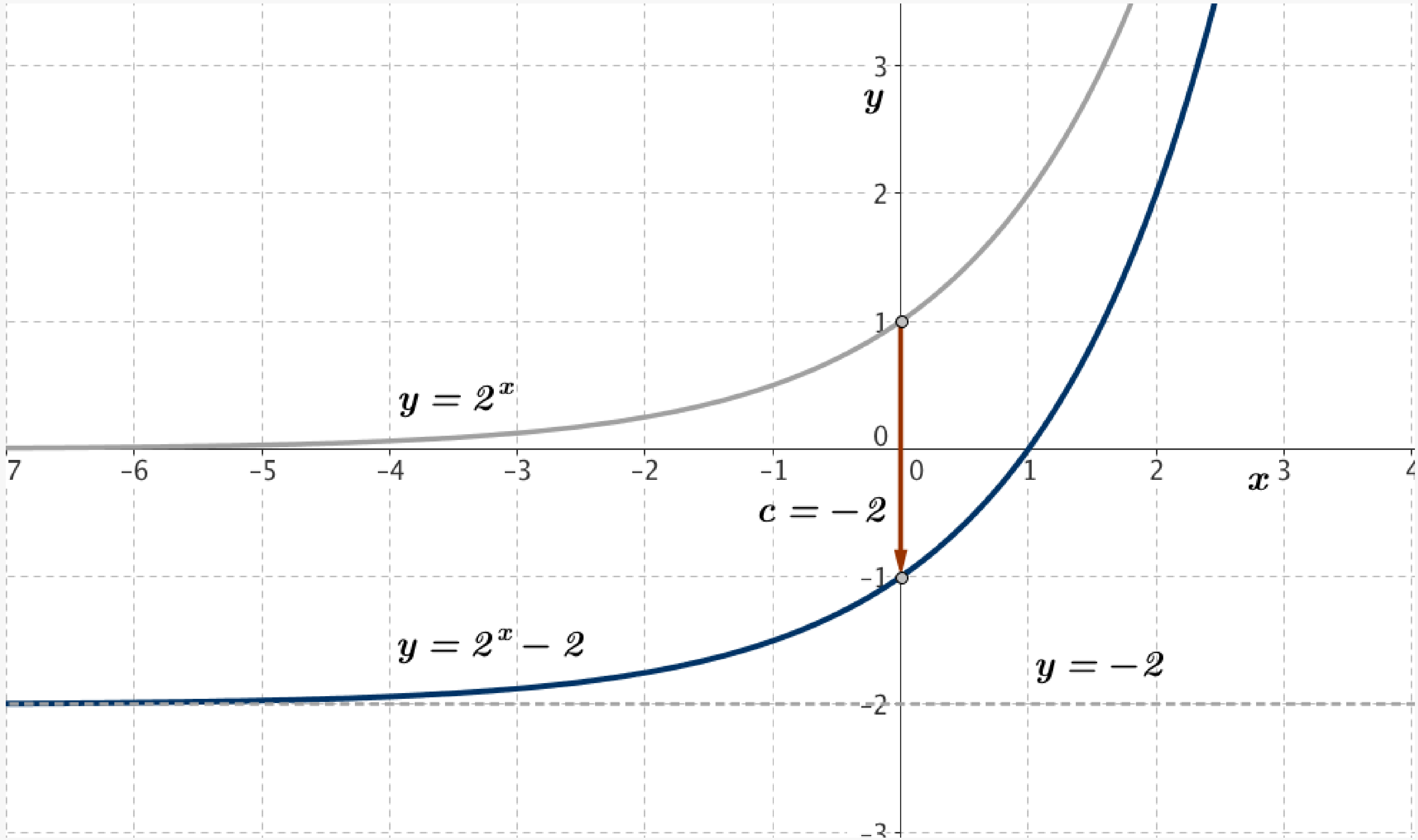

Abb. A3-3: Der Parameter c = -2 bewirkt eine vertikalen Verschiebung in negativer Richtung der y-Achse. Dabei ändern sich der Wertebereich, die Lage des Schnittpunktes mit der y-Achse und die horizontale Asymptote

$$y = 2^x \quad \rightarrow \quad y = 2^x - 2 :$$

$$W = (0, \infty) \;\rightarrow\; W = (-2, \infty), \qquad S_y = (0, 1) \;\rightarrow\; S_y = (0, -1)$$

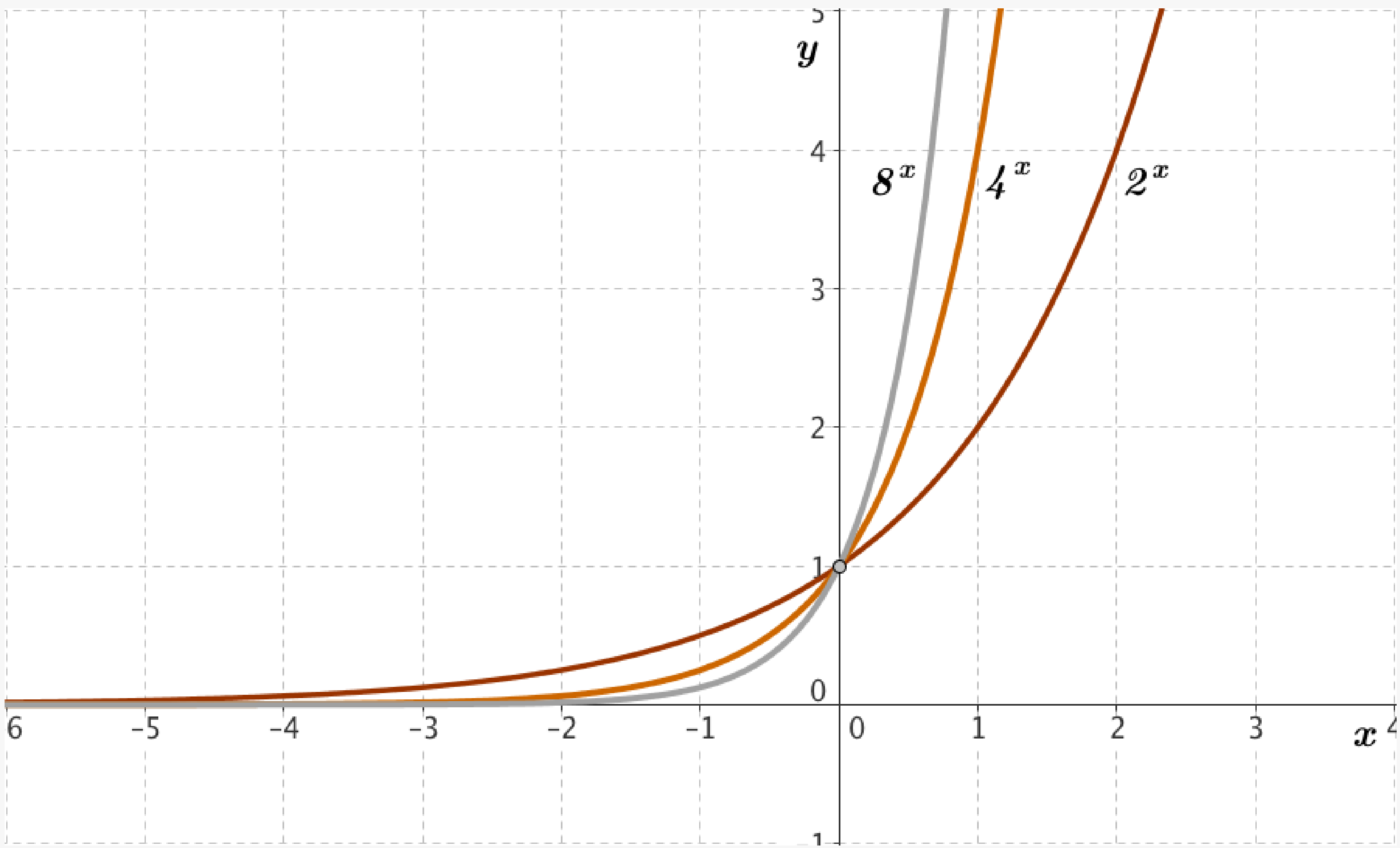

Abb. A4: In dieser Abbildung sind die Exponentialfunktionen mit den Basen 2, 4 und 8 dargestellt. Sie haben gleiche Definitions- und Wertebereiche, den Schnittpunkt S = (0, 1) mit der y-Achse, sie sind monoton wachsend und haben die x-Achse als horizontale Asymptote. Im positiven x-Bereich hat die Funktion mit Basis 8 die größten Funktionswerte. Im negativen x-Bereich hat die Funktion mit Basis 2 die größten Funktionswerte