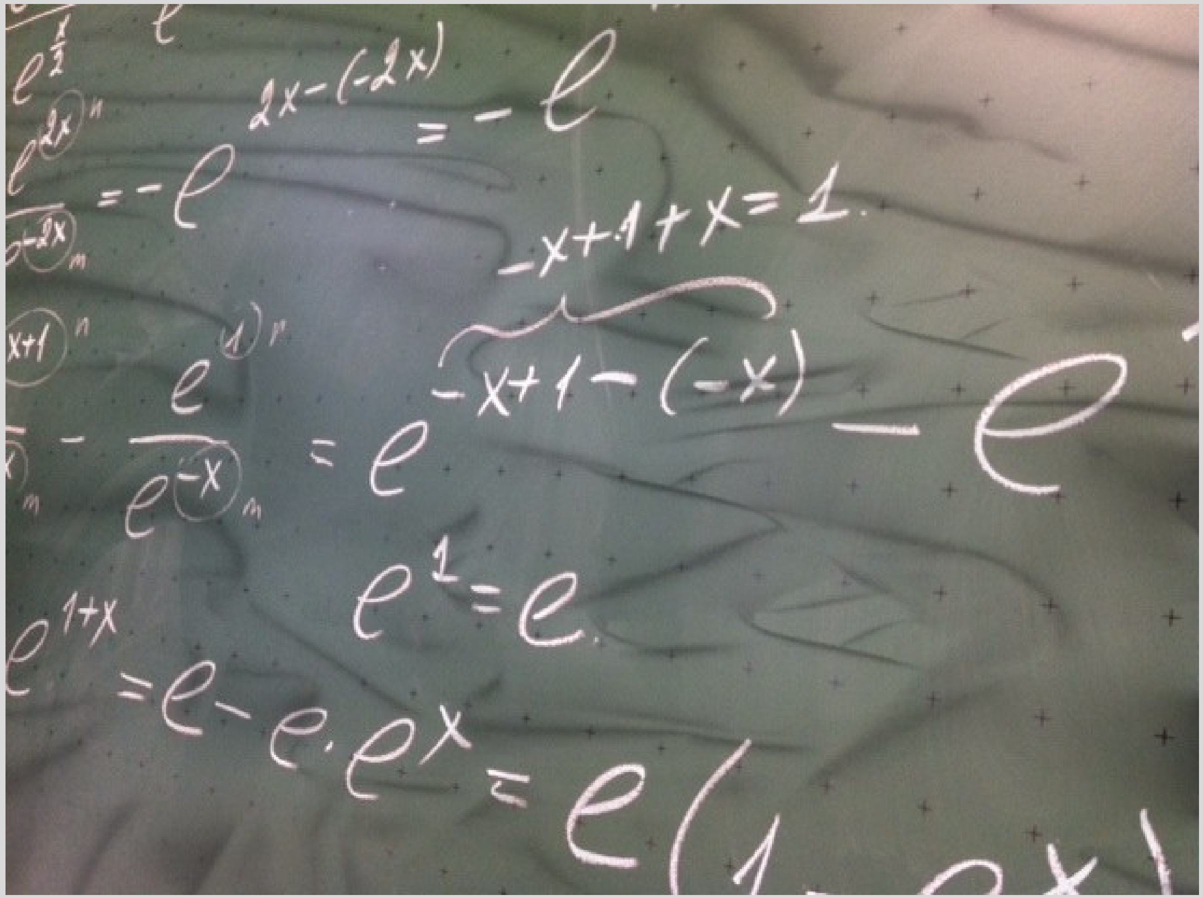
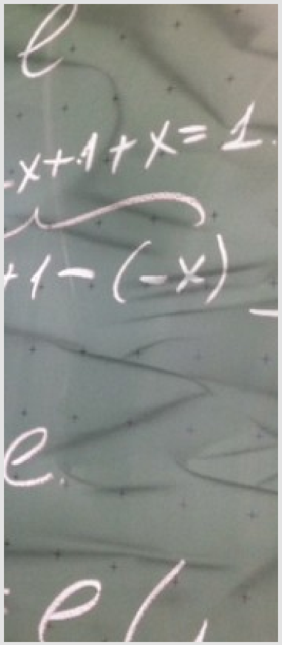



# Exponentialgleichungen: Teil 2



## Aufgabe 1:

Bestimmen Sie $x$ :

$a)\ \ 5^{x} = 9, \qquad b)\ \ 7^{x} = 16, \qquad c)\ \ 5^{-2x} = 50$

## Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in welchem die Gerade $y = c$ den Graphen der Funktion $f(x)$ schneidet

$$a)\ \ f(x) = e^{\frac{x}{2} - 1}, \qquad c = 2$$

$$b)\ \ f(x) = e^{x-2}, \qquad c = \frac{3}{2}$$

$$c)\ \ f(x) = 2^{2x-1}, \qquad c = 2.4$$

$$d)\ \ f(x) = -3^{x-1} + \frac{5}{2}, \qquad c = 1$$

- $5^{\,x} = 9, \qquad \ln 5^{\,x} = \ln 9, \qquad x \ln 5 = \ln 9$

  $$x = \frac{\ln 9}{\ln 5} \simeq \frac{2.197}{1.609} \simeq 1.365$$

- $5^{\,x} = 9, \qquad \log_5 5^{\,x} = \log_5 9, \qquad x \log_5 5 = \log_5 9, \qquad x = \log_5 9$

- $5^{\,x} = 9, \qquad \log_9 5^{\,x} = \log_9 9, \qquad x \log_9 5 = 1, \qquad x = \dfrac{1}{\log_9 5}$

  $$x = \frac{\ln 9}{\ln 5} = \log_5 9 = \frac{1}{\log_9 5} \simeq 1.365$$

Lösung 1b:

- $7^{x} = 16, \qquad \ln(7^{x}) = \ln(16) = \ln(2^4) = 4\ln(2)$

  $x\ln(7) = 4\ln(2), \qquad x = \dfrac{4\ln(2)}{\ln(7)}$

- $7^{x} = 16, \qquad \log_7(7^{x}) = \log_7(16)$

  $x\log_7(7) = \log_7(16), \qquad x = \log_7(16) = 4\log_7(2)$

Lösung 1c:

- $5^{-2x} = 50, \qquad 5^{-2x} = 2\cdot 5^{2}, \qquad 5^{-2x-2} = 2$

  $\log_5(5^{-2x-2}) = \log_5 2, \qquad -2x - 2 = \log_5 2, \qquad 2x = -2 - \log_5 2$

  $x = -1 - \dfrac{1}{2}\log_5 2$

Wir lösen diese Gleichung, indem wir auf beide Seiten der Gleichung den natürlichen Logarithmus anwenden

$$\ln e^{\frac{x}{2}-1} = \ln 2, \qquad \left(\frac{x}{2}-1\right)\ln e = \ln 2, \qquad \frac{x}{2}-1 = \ln 2,$$

$$\frac{x}{2} = \ln 2 + 1, \qquad x = 2\,(\ln 2 + 1) \simeq 2\,(0.693 + 1) = 3.386$$

Die gerade $y = 2$ schneidet den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $S$

$$S \approx (3.386,\ 2)$$

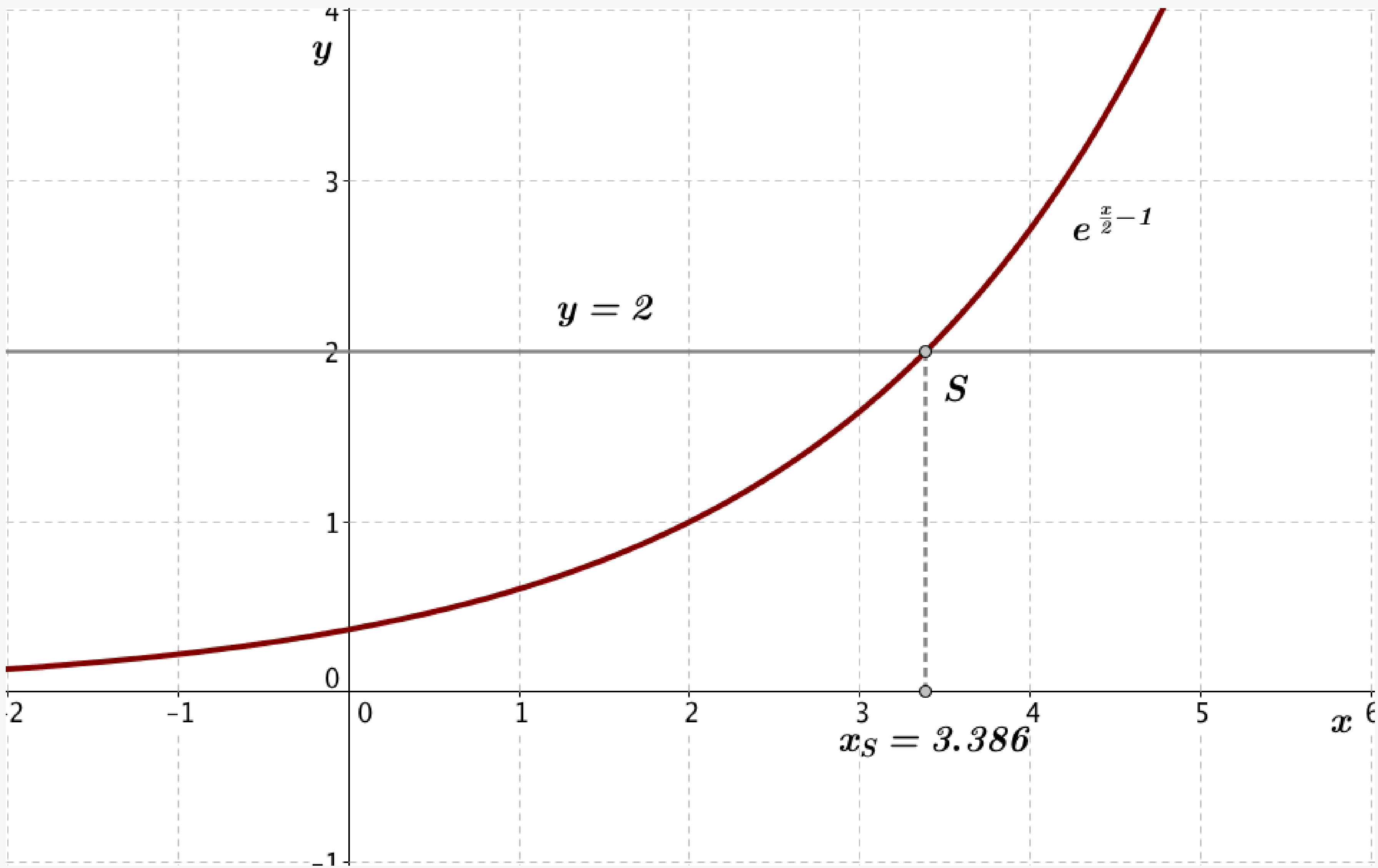



*Abb. L2a: Funktion f (x) = exp(x/2 – 1), Gerade y = 2 und der Schnittpunkt S*

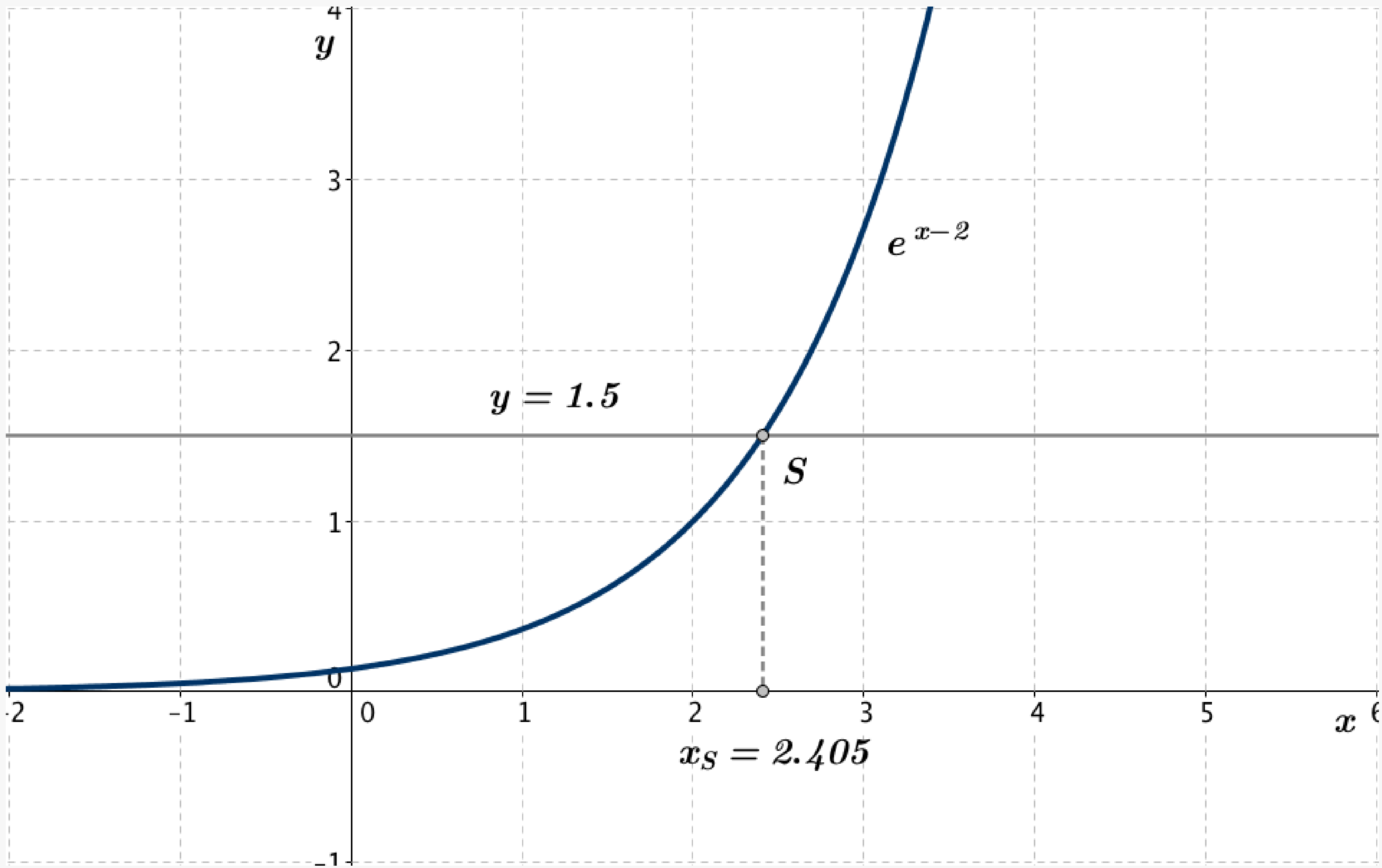



*Abb. L2b: Funktion f (x) = exp(x – 2), Gerade y = 3/2 und der Schnittpunkt S*

$$e^{x-2} = 1.5, \qquad \ln e^{x-2} = \ln 1.5, \qquad (x-2)\ln e = \ln 1.5, \qquad x - 2 = \ln 1.5$$

$$x = \ln 1.5 + 2 \simeq 2.405, \qquad S \simeq (2.405,\ 1.5)$$

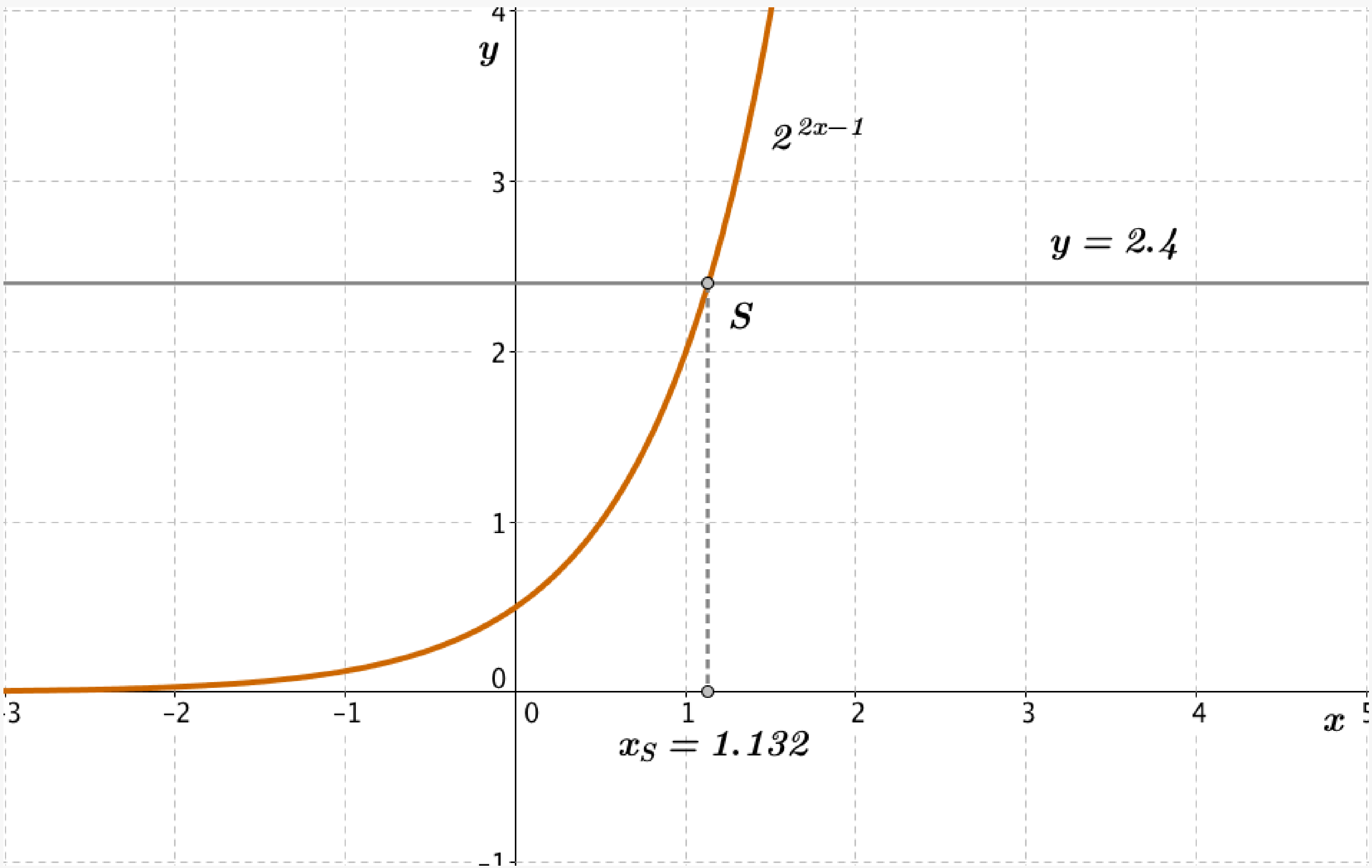



*Abb. L2c: Funktion $y = f(x)$, Gerade $y = 2{,}4$ und der Schnittpunkt $S$*

$$f(x) = 2^{2x-1}, \qquad y = 2.4, \qquad S \simeq (1.132,\ 2.4)$$

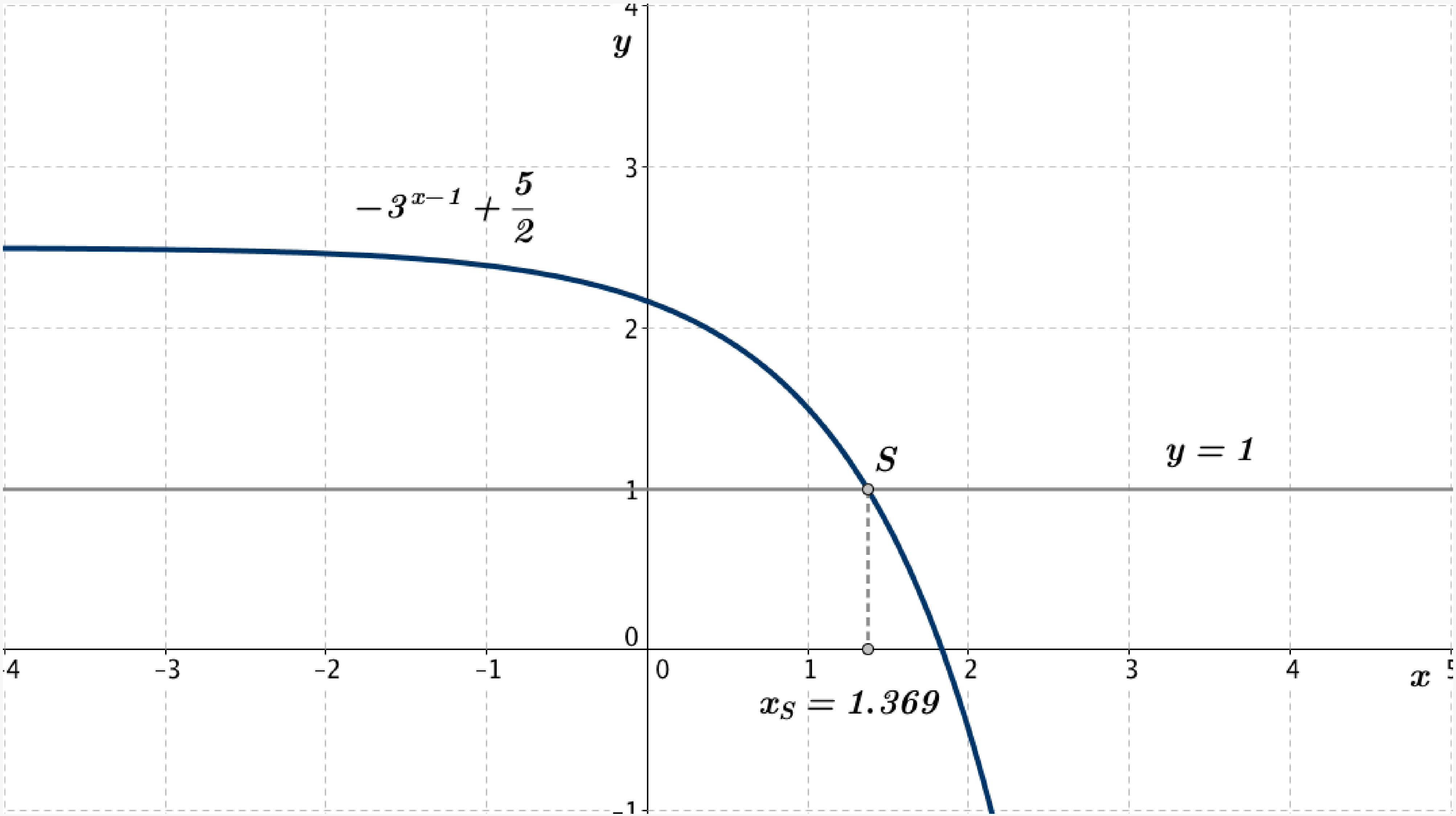
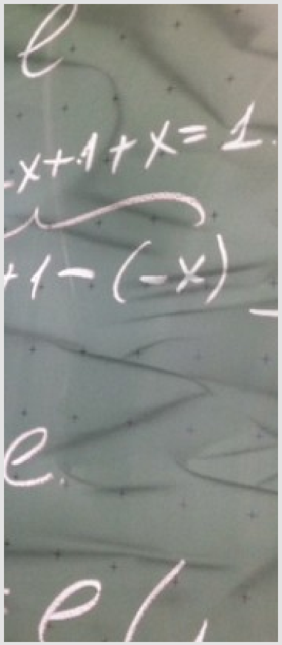



Abb. L2d: Funktion $y = f(x)$, Gerade $y = 1$ und der Schnittpunkt $S$

$$f(x) = -3^{\,x-1} + \frac{5}{2}, \qquad y = 1, \qquad S \simeq (1.369,\ 1)$$



Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen durch Anwendung der Potenzregeln

$a)\ \ e^{x+1} - e^{x} = 1$

$b)\ \ 4^{x+2} = (4e)^{x}$

$c)\ \ e^{x+2} - e^{x} = 5$

$d)\ \ 2^{x+3} + 2^{x+1} = 4$

# *Exponentialgleichungen: Lösung 3*

$$a)\quad e^{x+1} - e^{x} = 1, \qquad e\, e^{x} - e^{x} = 1, \qquad e^{x}(e-1) = 1$$

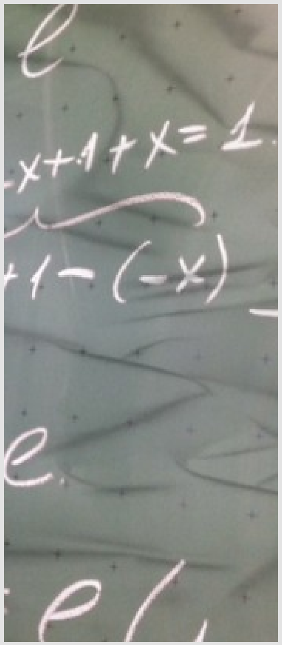
$$e^{x}(e-1) = 1, \qquad e^{x} = \frac{1}{e-1}, \qquad x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) = -\ln(e-1)$$

$$b)\quad 4^{x+2} = (4\,e)^{x}, \qquad 4^{2}\cdot 4^{x} = 4^{x}\cdot e^{x}, \qquad e^{x} = 4^{2} = 2^{4}$$

$$x = 4\ln 2$$

$$c)\quad e^{x+2} - e^{x} = 5, \qquad x = \ln\left(\frac{5}{e^{2}-1}\right)$$

$$d)\quad 2^{x+3} + 2^{x+1} = 4, \qquad x = \log_2\left(\frac{2}{5}\right) = 1 - \log_2 5$$



Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen

$a)\quad 2^{4x+1} - 3^{x} = 0$

$b)\quad 3^{2x+3} = 4^{2x}$

$a)$ $2^{4x+1} - 3^x = 0, \qquad 2^{4x+1} = 3^x$

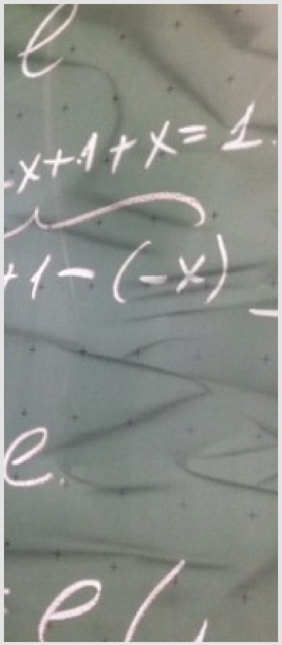
$$\ln 2^{4x+1} = \ln 3^x, \qquad (4x+1)\ln 2 = x \ln 3$$

$$4x + 1 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot x, \qquad x = \frac{\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2} \simeq \frac{0.693}{1.099 - 4 \cdot 0.693} \simeq -0.414$$

$b)$ $3^{2x+3} = 4^{2x}, \qquad \ln 3^{2x+3} = \ln 4^{2x}, \qquad (2x+3)\ln 3 = 2x \ln 4$

$$2x + 3 = 2cx, \qquad c \equiv \frac{\ln 4}{\ln 3}, \qquad x = \frac{3}{2(c-1)}$$

$$x = \frac{3}{2\left(\dfrac{\ln 4}{\ln 3} - 1\right)} \simeq \frac{3}{2(1.261 - 1)} \simeq 5.693$$



Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen durch Substitution

$a)\quad e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0$

$b)\quad e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$

$c)\quad e^{x} + e^{-x} = 2$

$d)\quad e^{2x} - 2e^{x} - 15 = 0$

$e)\quad -2e^{2x} - 4e^{x} + 6 = 0$

$f)\quad 2e^{2x} + 4e^{x} + 2 = 0$

$g)\quad e^{2x} - 6e^{x} + 5 = 0$

a) $e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0, \qquad u = e^{x}$

$u^2 - 2u - 3 = 0, \qquad u_1 = -1, \qquad u_2 = 3$

Da *exp (x)* immer positiv ist, ist die Bedingung $e^{x} = -1$ nicht erfüllbar. Die Gleichung hat somit die einzige Lösung

$e^{x} = 3, \qquad x = \ln 3$

b) $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0, \qquad u = e^{2x}$

$u^2 - 5u + 6 = 0, \qquad u_1 = 2, \qquad u_2 = 3$

$e^{2x} = 2, \quad x = \dfrac{\ln 2}{2}, \qquad e^{2x} = 3, \quad x = \dfrac{\ln 3}{2}$

c) $e^{x} + e^{-x} = 2 \quad | \quad \times\ e^{x}$

$e^{2x} + 1 = 2e^{x}, \qquad e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0, \qquad u = e^{x}$

$u^2 - 2u + 1 = 0, \qquad u_1 = u_2 = 1$

Die Gleichung hat die einzige Lösung $e^{x} = 1, \quad x = 0$

d) $e^{2x} - 2e^{x} - 15 = 0, \qquad u = e^{x}$

$u^2 - 2u - 15 = 0, \qquad u_1 = -3, \qquad u_2 = 5$

Da *exp (x)* immer positiv ist, ist die Bedingung $e^{x} = -3$ nicht erfüllbar. Die Gleichung hat somit die einzige Lösung

$e^{x} = 5, \qquad x = \ln 5$

$e)\ \ -2e^{2x} - 4e^{x} + 6 = 0, \qquad e^{x} = 1, \quad x = 0$

$f)\ \ 2e^{2x} + 4e^{x} + 2 = 0, \qquad e^{x} = -1$ – keine reelle Lösung

$g)\ \ e^{2x} - 6e^{x} + 5 = 0, \qquad x = 0, \quad x = \ln 5$