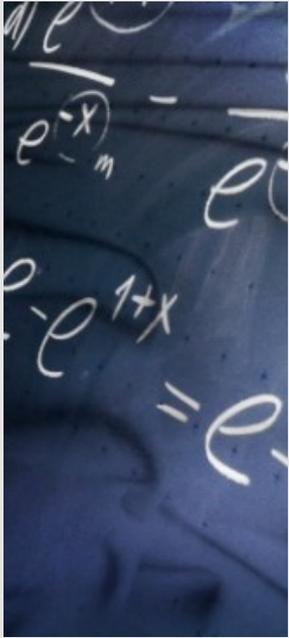


*Exponentialgleichungen: Teil 1*



## Aufgabe 1:

Berechnen Sie mithilfe der Potenzgesetze

$$\left[ 3^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \right] : \left(\frac{1}{3}\right)^6 ; \quad \left[ 3^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

## Aufgabe 2:

Fassen Sie zusammen:

a)  $(e^x \cdot e^{2x}) : (-e^{3x})$

b)  $e^{2x} : (-e^{-2x})$

c)  $(e^{-x} \cdot e^{2x}) : (e^{0.5x})$

d)  $e^{-x+1} : e^{-x} - e : e^{-x}$

e)  $e^{x-1} \cdot e - 2e^x + \frac{1}{2e^{-x}}$

f)  $(e - e^{1+x}) : (1 - e^x)$

## Exponentialgleichungen: Lösungen 1, 2

Lösung 1:  $\left[ 3^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \right] : \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 6^6, \quad \left[ 3^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 3^2 \cdot 2^3 = 72$

### Lösung 2:

a)  $(e^x \cdot e^{2x}) : (-e^{3x}) = \frac{e^x \cdot e^{2x}}{-e^{3x}} = -e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{-3x} = -e^{x+2x-3x} = -e^0 = -1$

b)  $e^{2x} : (-e^{-2x}) = \frac{e^{2x}}{-e^{-2x}} = -e^{2x} \cdot e^{2x} = -e^{4x}$

c)  $(e^{-x} \cdot e^{2x}) : (e^{0.5x}) = \frac{e^{-x+2x}}{e^{0.5x}} = e^x \cdot e^{-0.5x} = e^{0.5x}$

d)  $e^{-x+1} : e^{-x} - e : e^{-x} = \frac{e^{-x+1}}{e^{-x}} - \frac{e}{e^{-x}} = e^{-x+1+x} - e e^x = e - e e^x = e(1 - e^x)$

e)  $e^{x-1} \cdot e - 2e^x + \frac{1}{2e^{-x}} = e^{x-1+1} - 2e^x + \frac{1}{2} e^x = e^x - 2e^x + \frac{1}{2} e^x = -\frac{e^x}{2}$   
 $= e^x \left( 1 - 2 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{e^x}{2}$

f)  $(e - e^{1+x}) : (1 - e^x) = \frac{e - e e^x}{1 - e^x} = \frac{e(1 - e^x)}{1 - e^x} = e$

Aufgabe 3: Fassen Sie zusammen:

$$a) (e^{3x} \cdot e^{2x}) : (-e^{4x})$$

$$b) (e^{3x} : (-e^{-3x})) \cdot e^{-6x}$$

$$c) ((e^{-2x} \cdot e^{3x}) : (e^{x/3}))^3$$

$$d) e^{-2x+2} : e^{-2x} - e^2 : e^{-3x}$$

$$e) 2e^{2x-3} \cdot e^3 - 4e^{2x} + \frac{1}{4e^{-2x}}$$

$$f) (e - e^{1+2x}) : (1 - e^{2x})$$

## Exponentialgleichungen: Lösung 3

$$a) (e^{3x} \cdot e^{2x}) : (-e^{4x}) = -e^x$$

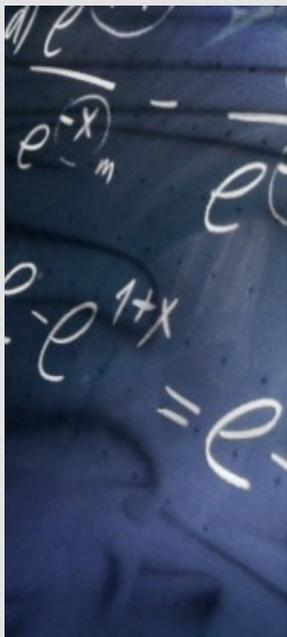
$$b) (e^{3x} : (-e^{-3x})) \cdot e^{-6x} = -1$$

$$c) ((e^{-2x} \cdot e^{3x}) : (e^{x/3}))^3 = e^{2x}$$

$$d) e^{-2x+2} : e^{-2x} - e^2 : e^{-3x} = e^2(1 - e^{3x})$$

$$e) 2e^{2x-3} \cdot e^3 - 4e^{2x} + \frac{1}{4e^{-2x}} = -\frac{7}{4}e^{2x}$$

$$f) (e - e^{1+2x}) : (1 - e^{2x}) = e$$



## Definition:

Gleichungen, bei denen die Variable mindestens einmal im Exponenten einer Potenz auftritt, werden Exponentialgleichungen genannt.

## Beispiele:

$$5^x + 7x = 4, \quad 9^{3x-2} = 19$$

$$3^x + 3^{2x} = 12, \quad a^{nx+m} = k$$

Im Gegensatz zu den quadratischen Gleichungen, Wurzel- und Bruchgleichungen gibt es für Exponentialgleichungen keine bestimmte Lösungsstrategie, die “automatisch” zum Ergebnis führt. Daher kann man nur Ideen und Konzepte für gewisse Standardsituationen angeben.

Welche der folgenden Gleichungen sind Exponentialgleichungen?

$$a) \quad 2^x - 6 = 0$$

$$b) \quad x^2 - 3x = 8$$

$$c) \quad e^x - x^2 = 4x$$

$$d) \quad e^{x^2} - 3e^{-x} + 12 = 0$$

$$e) \quad 2^{x^2 + 2x - 5} = 1$$

$$f) \quad 3^2 + 2e^2 = x^3 - 4x - 11$$

$$g) \quad \left(3x^2 + x\right)^{x-2} = 1$$

$$h) \quad e^2 - 2x^6 = 5x$$

$$i) \quad \pi^x - 7x = x^{\sin 2}$$

## Exponentialgleichungen: Lösung 4

- a)  $2^x - 6 = 0$  – Exponentialgleichung
- b)  $x^2 - 3x = 8$  – Polynomgleichung
- c)  $e^x - x^2 = 4x$  – Exponentialgleichung
- d)  $e^{x^2} - 3e^{-x} + 12 = 0$  – Exponentialgleichung
- e)  $2^{x^2 + 2x - 5} = 1$  – Exponentialgleichung
- f)  $3^2 + 2e^2 = x^3 - 4x - 11$  – Polynomgleichung
- g)  $(3^{x^2 + x})^{x-2} = 1$  – Exponentialgleichung
- h)  $e^2 - 2x^6 = 5x$  – Polynomgleichung
- i)  $\pi^x - 7x = x^{\sin 2}$  – Exponentialgleichung

## Definition:

In der Mathematik ist ein Polynom eine Summe von Vielfachen von Potenzen mit natürlichzahligen Exponenten einer Variablen, die meist mit  $x$  bezeichnet wird.

Eine Polynomfunktion ist eine Funktion  $f(x)$  der Form:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$
$$n \geq 0$$

Im Folgenden wird erklärt, wie die folgenden Gleichungen gelöst werden können

$$9^x = 27, \quad 5^x = 19$$

$$2^{x+3} + 5 \cdot 2^{x+1} - 144 = 0$$

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$$

- Kommt die Variable nur in einem Exponenten vor, so kann man die Gleichung durch Logarithmieren lösen.

Beispiel:

$$9^x = 27, \quad x \log_b 9 = \log_b 27, \quad x \log_b 3^2 = \log_b 3^3$$

$$2x \log_b 3 = 3 \log_b 3, \quad x = \frac{3 \log_b 3}{2 \log_b 3} = \frac{3}{2}$$

Da 9 und 27 Potenzen von 3 sind kann man die Lösung dieser Exponentialgleichung auch ohne Logarithmieren bestimmen.

$$9^x = 27, \quad (3^2)^x = 3^3, \quad 3^{2x} = 3^3, \quad 2x = 3, \quad x = \frac{3}{2}$$

Die Lösung der zweiten Gleichung kann man nur durch Logarithmieren bestimmen:

$$5^x = 19, \quad \log_5(5^x) = \log_5(19), \quad x = \log_5(19)$$

bzw.:

$$5^x = 19, \quad \ln(5^x) = \ln(19), \quad x \ln 5 = \ln(19), \quad x = \frac{\ln(19)}{\ln 5}$$

## Strategien zur Lösung von Exponentialgleichungen

- Kommt die Variable in mehreren Exponenten zu gleicher Basis vor, so kann man die Rechenregeln für Potenzieren anwenden, anschließend die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren und logarithmieren.

Beispiel:  $3^{x+1} - 3^x = 12$

Die Gleichung kann durch Anwendung der Potenzregeln umgewandelt werden in die Gleichung

$$3^{x+1} - 3^x = 12, \quad 3 \cdot 3^x - 3^x = 12, \quad 3^x (3 - 1) = 12$$

$$3^x = 6, \quad \log_3(3^x) = \log_3 6, \quad x = \log_3 6$$

bzw.:

$$3^x = 6, \quad \ln(3^x) = \ln 6, \quad x \ln 3 = \ln 6, \quad x = \frac{\ln 6}{\ln 3}$$

- Kommt die Variable in mehreren Exponenten zu gleicher Basis vor und sind diese Exponenten Vielfache voneinander, so kann man die Gleichung häufig durch Substitution und anschließendes Logarithmieren lösen.

Beispiel:  $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

Die Substitution  $u = 3^x$

führt zur quadratischen Gleichung  $u^2 - 2u + 1 = 0$

mit der Lösung  $u = 1$ , d.h.  $1 = 3^x$ ,  $x = 0$

- Exponentialgleichungen, die sich durch Umformen in die Form

$$a^{T_1(x)} = b^{T_2(x)}$$

überführen lassen, können durch Anwenden des Logarithmengesetzes

$$\log(x^n) = n \cdot \log x$$

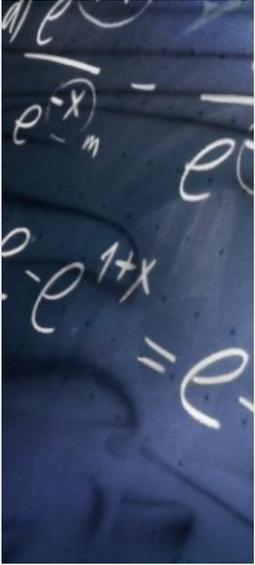
weiter vereinfacht werden zu  $T_1(x) \log a = T_2 \log b$

Falls  $a = b$  ist, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$T_1(x) = T_2(x),$$

was sich auch aus der oben gegebenen Gleichung durch Logarithmieren ergibt.

## Exponentialgleichungen: Aufgabe 5



Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$a) 7^{1-x} = 7^3, \quad 6^{2x-3} = 6^7, \quad 4^{9-2x} = 4^3$$

$$b) 3^x = 9, \quad 2^{x+2} = 32, \quad 4^{x-1} = 64$$

$$c) 3^{3x+2} = 27, \quad 2^{5x-2} = 2^{3x+4}$$

$$d) 3^{x+1} = \frac{1}{3}, \quad 2^{x+2} = \frac{1}{8}, \quad 5^{3+4x} = \frac{1}{25}$$

$$e) 4^{2x-3} = \frac{1}{16}, \quad 6^{4-3x} = \frac{1}{36}, \quad 7^{5x+8} = \frac{1}{49}$$

$$f) 2^x = -8, \quad 3^{2x} = -\frac{1}{3}, \quad 5^{-x} = -25$$

## Exponentialgleichungen: Lösung 5

$$a) \quad 7^{1-x} = 7^3, \quad 1-x=3, \quad x=-2$$
$$6^{2x-3} = 6^7, \quad x=5, \quad 4^{9-2x} = 4^3, \quad x=3$$

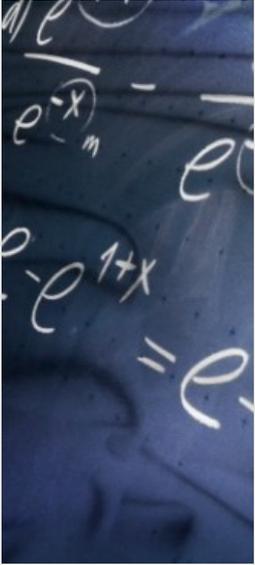
$$b) \quad 3^x = 9, \quad 3^x = 3^2, \quad x=2$$
$$2^{x+2} = 32, \quad x=3, \quad 4^{x-1} = 64, \quad x=4$$

$$c) \quad 3^{3x+2} = 27, \quad 3^{3x+2} = 3^3, \quad 3x+2=3, \quad x=\frac{1}{3}$$
$$2^{5x-2} = 2^{3x+4}, \quad x=3$$

$$d) \quad 3^{x+1} = \frac{1}{3}, \quad x=-2, \quad 2^{x+2} = \frac{1}{8}, \quad x=-5$$
$$5^{3+4x} = \frac{1}{25}, \quad x=-\frac{5}{4}$$

$$e) \quad 4^{2x-3} = \frac{1}{16}, \quad x=\frac{1}{2}, \quad 6^{4-3x} = \frac{1}{36}, \quad x=2$$
$$7^{5x+8} = \frac{1}{49}, \quad x=-2$$

f) keine Lösungen



Lösen Sie folgende Gleichungen:

## Aufgabe 6:

$$a) \quad 9^{x-2} = \sqrt{9}, \quad 5^{2x-1} = \sqrt{5}, \quad 7^{3x+2} = \sqrt[3]{7}$$

$$b) \quad 9^{3x-9} = 3, \quad 25^{4x-3} = 5, \quad 36^{3x+2} = \frac{1}{6}$$

$$c) \quad 2^{2x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4^{4x-3} = \frac{1}{2}, \quad 36^{3x-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

## Aufgabe 7:

$$a) \quad 7^{x^2} = 7^{6-x}, \quad b) \quad 5^{x^2-5x} = 5^{-2x}$$

$$c) \quad 2^{x^2-3x} = 16, \quad d) \quad 3^{x^2+2x} = 27$$

$$e) \quad 3^{x^2+2x} = 27, \quad f) \quad 7^{x^2-2x+2} = 49$$

## Exponentialgleichungen: Lösung 6

$$a) \quad 9^{x-2} = \sqrt{9}, \quad x = \frac{5}{2}, \quad 5^{2x-1} = \sqrt{5}, \quad x = \frac{3}{4}$$

$$7^{3x+2} = \sqrt[3]{7}, \quad x = -\frac{5}{9}$$

$$b) \quad 9^{3x-9} = 3, \quad (3^2)^{3x-9} = 3, \quad 3^{2(3x-9)} = 3, \quad x = \frac{19}{6}$$

$$25^{4x-3} = 5, \quad x = \frac{7}{8}, \quad 36^{3x+2} = \frac{1}{6}, \quad x = -\frac{5}{6}$$

$$c) \quad 2^{2x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = 0, \quad 4^{4x-3} = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{5}{8}$$

$$36^{3x-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad x = \frac{1}{4}$$

## Exponentialgleichungen: Lösung 7

$$a) 7^{x^2} = 7^{6-x}, \quad x^2 = 6-x, \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 2$$

$$b) 5^{x^2-5x} = 5^{-2x}, \quad x^2 - 3x = 0, \quad x(x-3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

$$c) 2^{x^2-3x} = 16, \quad 2^{x^2-3x} = 2^4, \quad x^2 - 3x = 4, \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4$$

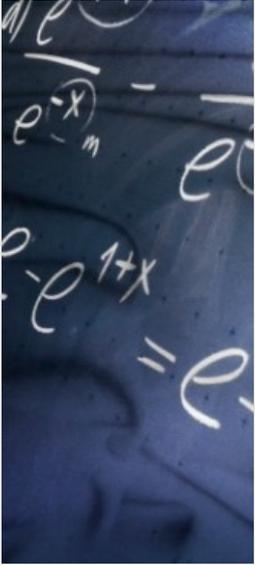
$$d) 3^{x^2+2x} = 27, \quad 3^{x^2+2x} = 3^3, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1$$

$$e) 8^{x^2-2x-13} = 64, \quad 8^{x^2-2x-13} = 8^2, \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5$$

$$f) 7^{x^2-2x+2} = 49, \quad 7^{x^2-2x+2} = 7^2, \quad x^2 - 2x = 0, \quad x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



Lösen Sie folgende Gleichungen

$$a) 2^x = 4^{x-1}$$

$$b) 3^x = 3^{5x-4}$$

$$c) 3^{4x} = 9^{x-6}, \quad 7^{3x-2} = \frac{1}{7^{x-4}}$$

$$d) 5^{2x-6} = \frac{1}{25^{x-2}}, \quad 36^{x-3} = \frac{1}{6^{3x-12}}$$

$$e) 4^{5-9x} = \frac{1}{8^{3x+2}}$$

# Exponentialgleichungen: Lösung 8a

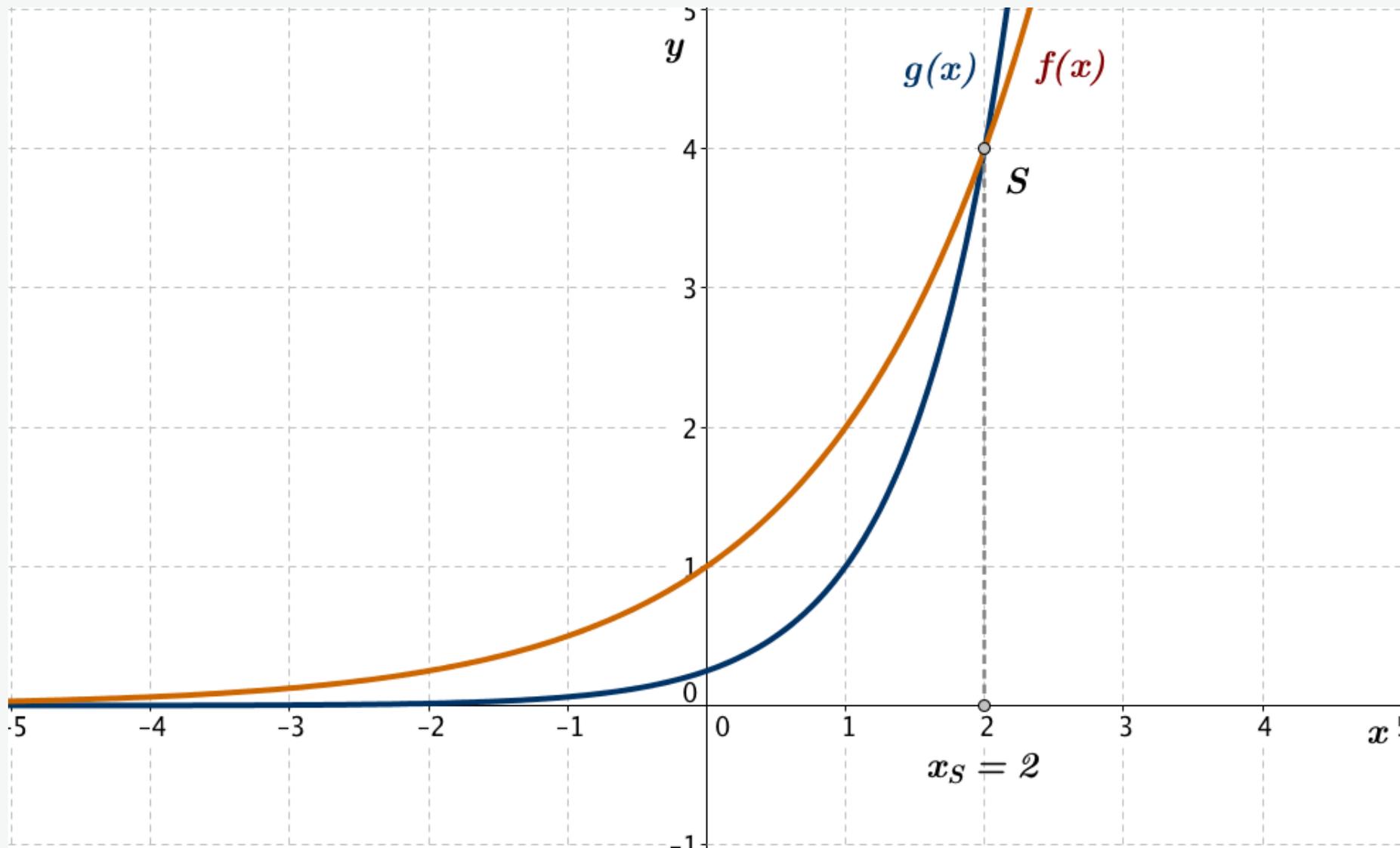


Abb. L8a: Graphische Lösung der Gleichung. Die  $x$ -Koordinate des Schnittpunktes der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  ist die Lösung der Gleichung

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = 4^{x-1}$$

$$2^x = 4^{x-1}, \quad 2^x = 2^{2(x-1)}, \quad x = 2(x-1), \quad x = 2$$

## Exponentialgleichungen: Lösung 8b

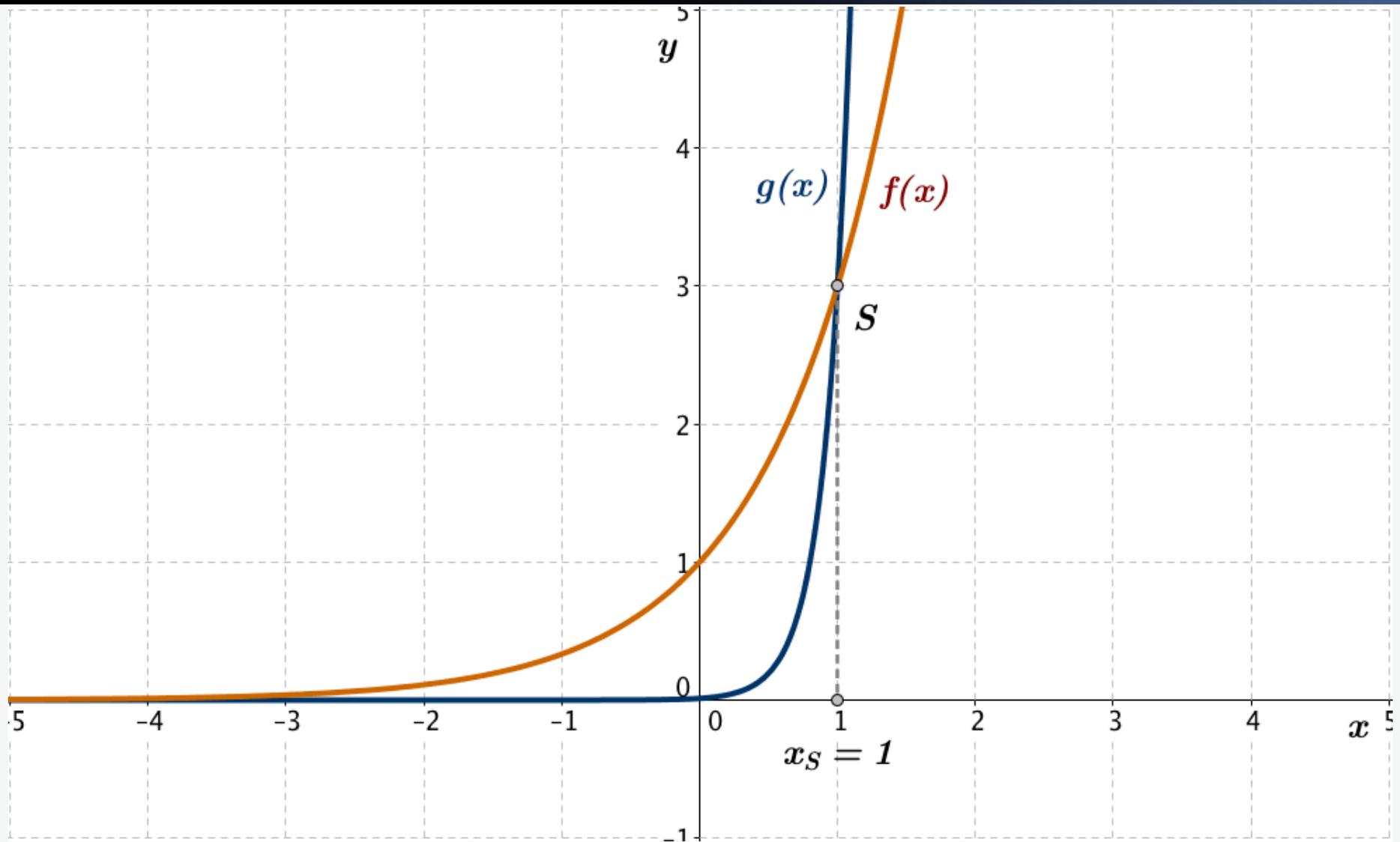


Abb. L8b: Graphische Lösung der Gleichung. Die  $x$ -Koordinate des Schnittpunktes der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  ist die Lösung der Gleichung

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = 3^{5x-4}$$
$$3^x = 3^{5x-4}, \quad x = 5x - 4, \quad x = 1$$

## Exponentialgleichungen: Lösungen 8 c-e)

$$c) 3^{4x} = 9^{x-6}, \quad 3^{4x} = 3^{2(x-6)}, \quad x = -6$$

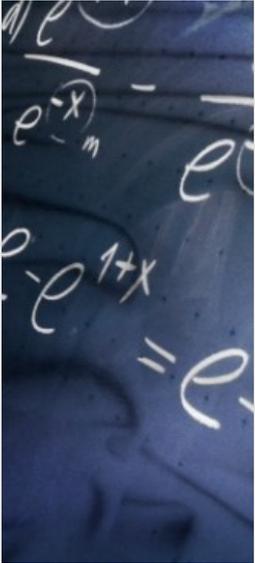
$$7^{3x-2} = \frac{1}{7^{x-4}}, \quad 7^{3x-2} = 7^{-x+4}, \quad x = \frac{3}{2}$$

$$d) 5^{2x-6} = \frac{1}{25^{x-2}}, \quad 5^{2x-6} = 5^{-2(x-2)}, \quad x = \frac{5}{2}$$

$$36^{x-3} = \frac{1}{6^{3x-12}}, \quad 6^{2(x-3)} = 6^{-3x+12}, \quad x = \frac{18}{5}$$

$$e) 4^{5-9x} = \frac{1}{8^{3x+2}}, \quad 2^{2(5-9x)} = \frac{1}{2^3(3x+2)}$$

$$2^{2(5-9x)} = 2^{-3(3x+2)}, \quad x = \frac{16}{9}$$



Lösen Sie folgende Gleichungen

## Aufgabe 9:

$$a) \frac{3^{2x}}{9} = \frac{3^{4x+6}}{27}, \quad b) \frac{2^{3x}}{16} = \frac{2^x}{128}$$

$$c) \frac{4^{2x}}{16} = \frac{16^{3x}}{64}, \quad d) \frac{5^{3x+2}}{5^{x-1}} = 5^3$$

$$e) \frac{7^{-4x-1}}{7^{x-5}} = 49 \cdot 7^{3x}, \quad f) \frac{3^{2x-2}}{27 \cdot 3^{-4x}} = \frac{9}{3^x}$$

## Aufgabe 10:

$$a) 2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x+1} = -64$$

$$b) 3^{x+3} - 6 \cdot 3^{x+1} = 81$$

## Exponentialgleichungen: Lösungen 9 a-c)

$$a) \frac{3^{2x}}{9} = \frac{3^{4x+6}}{27}, \quad \frac{3^{2x}}{3^2} = \frac{3^{4x+6}}{3^3}, \quad 3^{2x-2} = 3^{4x+3}$$
$$2x - 2 = 4x + 3, \quad x = -\frac{5}{2}$$

$$b) \frac{2^{3x}}{16} = \frac{2^x}{128}, \quad \frac{2^{3x}}{2^4} = \frac{2^x}{2^7}, \quad 2^{3x-4} = 2^{x-7}, \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$c) \frac{4^{2x}}{16} = \frac{16^{3x}}{64}, \quad x = \frac{1}{4}$$

$$d) \frac{5^{3x+2}}{5^{x-1}} = 5^3, \quad 5^{2x+3} = 5^3, \quad x = 0$$

$$e) \frac{7^{-4x-1}}{7^{x-5}} = 49 \cdot 7^{3x}, \quad 7^{-5x+4} = 7^{2+3x}, \quad x = \frac{1}{4}$$

$$f) \frac{3^{2x-2}}{27 \cdot 3^{-4x}} = \frac{9}{3^x}, \quad 3^{6x-5} = 3^{2-x}, \quad x = 1$$

$$a) \quad 2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x+1} = -64, \quad 2^2 \cdot 2^x - 6 \cdot 2 \cdot 2^x = -64$$

$$2^x (1 - 3) = -16, \quad 2^x = 8 = 2^3, \quad x = 3$$

$$b) \quad 3^{x+3} - 6 \cdot 3^{x+1} = 81, \quad x = 2$$

g)  $9^{x-2} = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$   
 $x-2 = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}$

$(3^2)^{x-2} = \sqrt{3^2} = 3^1$   
 $3^{2(x-2)} = 3^1$   
 $2(x-2) = 1$

m.m

m