Vorkurs: Bruchrechnung Anwendungsbeispielen aus der Elektrotechnik

Lisa Rebekka Odenwald

24. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

Alle Naturwissenschaften, so auch die Elektrotechnik, kommen ohne die Mathematik nicht aus. Um den Einstieg in diese Thematik zu vereinfachen, wird im folgenden Kapitel die Grundlagen der benötigten Mathematik wiederholt und mit gezielten Übungsaufgaben auf die elektrotechnischen Problemstellungen vorbereitet. In den nachfolgenden Kapiteln werden diese mathematischen Kenntnisse in Aufgaben aus der Elektrotechnik angewendet.

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Bruchrechnung

Der Quotient $a : b$ lässt sich alternativ als Bruch $\frac{a}{b}$ schreiben, wobei a als Zähler und b als Nenner bezeichnet wird. Die Elemente a und b sind reele Zahlen. Jedoch darf b nicht den Wert *Null* annehmen, da die Division durch *Null* in der Mathematik nicht definiert ist.

$$\frac{a}{b} = a : b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad b \neq 0.$$

Das Erweitern von Brüchen

Man erweitert einen Bruch $\frac{a}{b}$, indem man sowohl den Zähler a als auch den Nenner b mit einem beliebigen Wert k multipliziert. Der Wert des Bruches bleibt dadurch unverändert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}, \qquad b,\ k \neq 0 \tag{1}$$

Im weiteren Verlauf des Dokuments, werden die Beispiele mit „B.“ gekennzeichnet.

B.1 Der Bruch $\frac{3}{4}$ soll mit 5 erweitert werden: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

B.2 Der Bruch $\frac{1}{5}$ soll mit $x + 1$ erweitert werden: $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot (x+1)}{5 \cdot (x+1)} = \frac{x+1}{5x+5}$.

Das Kürzen von Brüchen

Das Kürzen von Brüchen ist die „Umkehrrechnung“ zum Erweitern. Man kürzt einen Bruch $\frac{a}{b}$, indem man sowohl den Zähler a als auch den Nenner b durch einen beliebigen Wert k dividiert. Der Wert des Bruches bleibt dadurch unverändert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}, \qquad b,\ k \neq 0 \tag{2}$$

Ein Bruch ist vollständig gekürzt, wenn man mit keinem ganzzahligen Faktor außer 1 weiter kürzen kann. Bei Rechnungen mit Brüchen sollte stets darauf geachtet werden, dass sie zu jedem Rechenschritt in vollständig gekürzter Form vorliegen. Dies minimiert bei größeren Rechnungen den Rechenaufwand, sowie die Fehleranfälligkeit.

B.3 Der Bruch $\frac{7}{14}$ soll mit 7 gekürzt werden: $\frac{7}{14} = \frac{\cancel{7} \cdot 1}{\cancel{7} \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

B.4 Der Bruch $\frac{8x}{12y}$ soll mit 2 gekürzt werden: $\frac{8x}{12y} = \frac{\cancel{2} \cdot 4x}{\cancel{2} \cdot 6y} = \frac{4x}{6y}$.

B.5 Der Bruch $\frac{8x}{12y}$ soll vollständig gekürzt werden: $\frac{8x}{12y} = \frac{\cancel{4} \cdot 2x}{\cancel{4} \cdot 3y} = \frac{2x}{3y}$.

B.6 Der Bruch $\frac{5x}{25x^2}$ soll vollständig gekürzt werden: $\frac{5x}{25x^2} = \frac{\cancel{5x} \cdot 1}{\cancel{5x} \cdot 5x} = \frac{1}{5x}$.

B.7 Der Bruch $\frac{48a+8b}{72}$ soll vollständig gekürzt werden:

$$\frac{48a+8b}{72} = \frac{\cancel{8} \cdot (6a+b)}{\cancel{8} \cdot 9} = \frac{6a+b}{9}.$$

Wie in den Beispielen schon bemerkt, können Zähler und Nenner nicht nur einfache Zahlen sein, sondern auch Terme darstellen. Genauso kann man solche Brüche auch mit ganzen Termen kürzen. Dabei ist jedoch Vorsicht geboten. Es ist besonders darauf zu achten, dass man ausschließlich in Produkten kürzt. Sind Zähler und Nenner als Summen dargestellt und bestehen die einzelnen Summanden aus Produkten, so darf man die Faktoren nicht aus den einzelnen Summanden kürzen:

$$\frac{k \cdot a + c}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a + c}{\cancel{k} \cdot b} \neq \frac{a+c}{b}$$

In diesem Fall ist der Zähler eine Summe mit den Summanden $k \cdot a$ und c. Es ist nicht erlaubt, einen Faktor aus einem einzelnen Summanden „heraus“ zu kürzen.

Es kann jedoch vorkommen, dass Zähler und Nenner Produkte sind, bei denen die einzelnen Faktoren aus Summen bestehen. In diesem Fall kann man die Faktoren kürzen.

B.8 $\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x+5)\cdot(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{(x+5)\cdot\cancel{(x-1)}} = \frac{x+2}{x+5}$.

B.9 $\frac{a^2-b^2}{2a+2b} = \frac{(a-b)\cdot(a+b)}{2\cdot(a-b)} = \frac{\cancel{(a-b)}\cdot(a+b)}{2\cdot\cancel{(a-b)}} = \frac{a+b}{2}$.

In Beispiel B.9 wurde im ersten Umformungsschritt die 3. Binomische Formel im Zähler verwendet und im Nenner der Faktor 2 ausgeklammert. Da die Binomischen Formeln sehr häufig verwendet werden und sie die Umformung von Brüchen im Wesentlichen erleichtern, werden sie im Folgenden wiederholt:

Exkurs: Die Binomischen Formeln

$$1.\ \textit{Binomische Formel}: \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$2.\ \textit{Binomische Formel}: \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$3.\ \textit{Binomische Formel}: \qquad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

B.10 $$\frac{9a^2 - 6ax + x^2}{24a - 8x} = \frac{(3a-x)^2}{8\cdot(3a-x)} = \frac{(3a-x)\cancel{(3a-x)}}{8\cdot\cancel{(3a-x)}} = \frac{3a-x}{8}$$

B.11 $$\frac{50a^2 + 60ab + 18b^2}{75a^2 - 27b^2} = \frac{2\cdot(5a+3b)^2}{3\cdot(5a+3b)(5a-3b)} = \frac{2\cdot(5a+3b)(5a+3b)}{3\cdot(5a+3b)(5a-3b)} =$$

$$\frac{2\cdot\cancel{(5a+3b)}(5a+3b)}{3\cdot\cancel{(5a+3b)}(5a-3b)} = \frac{2(5a+3b)}{3(5a-3b)} = \frac{10a+6b}{15a-9b}$$

Die Addition und Subtraktion von Brüchen

Zwei Brüche mit gleichem Nenner b werden addiert bzw. subtrahiert, indem man deren Zähler a_1 und a_2 addiert bzw. subtrahiert.

$$\frac{a_1}{b} \pm \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 \pm a_2}{b}, \qquad b \neq 0 \tag{3}$$

Brüche mit verschiedenen Nennern werden durch geschicktes Erweitern (oder Kürzen) auf den gleichen Nenner, den sogenannten Hauptnenner, gebracht und anschließend addiert oder subtrahiert. Um den Hauptnenner zu berechnen, erweitert man jeweils den einen Bruch mit dem Nenner des anderen Bruches und umgekehrt.

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1\cdot b_2}{b_1\cdot b_2} + \frac{a_2\cdot b_1}{b_2\cdot b_1} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1\cdot b_2}, \qquad b_1, b_2 \neq 0 \tag{4}$$

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1\cdot b_2}{b_1\cdot b_2} - \frac{a_2\cdot b_1}{b_2\cdot b_1} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1\cdot b_2}, \qquad b_1, b_2 \neq 0 \tag{5}$$

Zur vereinfachten Darstellung von Produkten kann kann das Multiplikationszeichen weglassen.

B.12 $\dfrac{3}{8}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\cdot 3+2\cdot 8}{8\cdot 3}=\dfrac{9+16}{24}=\dfrac{25}{24}.$

B.13 $\dfrac{2x}{7}-\dfrac{x}{3a}=\dfrac{2x\cdot 3a-x\cdot 7}{7\cdot 3a}=\dfrac{6ax-7x}{21a}.$

B.14 $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2}+\dfrac{1\cdot R_1}{R_1\cdot R_2}=\dfrac{R_2+R_1}{R_1\cdot R_2}.$

B.15 $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}=\dfrac{1\cdot R_2\cdot R_3}{R_1\cdot R_2\cdot R_3}+\dfrac{1\cdot R_1\cdot R_3}{R_1\cdot R_2\cdot R_3}+\dfrac{1\cdot R_1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2\cdot R_3}=\dfrac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3}.$

Es funktioniert sehr gut den Hauptnenner auf diese Weise zu berechnen. Jedoch können die Zahlenwerte besonders mit steigender Anzahl der Summanden ziemlich groß werden. Aus diesem Grund kann man das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner bilden und hat somit meist einen kleineren Hauptnenner.

B.16 $\dfrac{x}{14}+\dfrac{2x}{7}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{14}+\dfrac{2\cdot 2x}{2\cdot 7}+\dfrac{7\cdot x}{7\cdot 2}=\dfrac{x}{14}+\dfrac{4x}{14}+\dfrac{7x}{14}=\dfrac{x+4x+7x}{14}=\dfrac{12x}{14}.$

Der Hauptnenner der drei Summanden ist 14. Alle drei Brüche werden auf den Hauptnenner erweitert und im Anschluss addiert.

B.17 $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{4x}{x+2}=\dfrac{6}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{4x}{x+2}=\dfrac{6}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{4x\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$

$$\frac{6}{x^2-4}-\frac{4x^2-8x}{x^2-4}=\frac{6-(4x^2-8x)}{x^2-4}=\frac{6-4x^2+8x}{x^2-4}=\frac{(-4x^2)+8x+6}{x^2-4}.$$

Hier ist darauf zu achten, dass bei einem Minuszeichen vor einer Klammer, sich die Vorzeichen innerhalb der Klammer umkehren, wenn diese aufgelöst wird:

$$c-(a+b)=c+(-1)(a+b)=c-a-b.$$

Die Multiplikation von Brüchen

Man multipliziert zwei Brüche $\dfrac{a_1}{b_1}$ und $\dfrac{a_2}{b_2}$, indem man jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1\cdot a_2}{b_1\cdot b_2},\qquad b_1,b_2\neq 0. \tag{6}$$

B.18 a) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{1\cdot 5}{3\cdot 7}=\dfrac{5}{21}$, b) $\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{3a}{2}=\dfrac{2\cdot 3a}{x\cdot 2}=\dfrac{6a}{2x}=\dfrac{3a}{x}.$

B.19 $\dfrac{x-1}{2}\cdot\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{2}\cdot\dfrac{4}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot 4}{2\cancel{(x-1)}(x+1)}=\dfrac{4}{2(x+1)}=\dfrac{2}{x+1}.$

Die Division von Brüchen

Man dividiert zwei Brüche, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert. Man bildet den Kehrwert eines Bruches, indem man Zähler und Nenner vertauscht. Der Kehrwert von $\frac{3}{4}$ ist demnach $\frac{4}{3}$.

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}, \qquad b_1,\ b_2,\ a_2 \neq 0 \tag{7}$$

B.20 a) $\frac{1}{6} : \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{1}{9}$, b) $\frac{x-1}{2} : \frac{x-1}{3} = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3}{2}$.

Es ist nicht unüblich, dass eine Division von Brüchen als Doppelbruch dargestellt wird. Jedoch werden sie in der Technik oftmals vermieden.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad b,\ c,\ d \neq 0 \tag{8}$$

B.21 $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

B.22 $\frac{\frac{R_1 R_2}{R_3}}{\frac{R_4}{R_1 R_3}} = \frac{R_1 R_2}{R_3} : \frac{R_4}{R_1 R_3} = \frac{R_1 R_2}{\cancel{R_3}} \cdot \frac{R_1 \cancel{R_3}}{R_4} = \frac{{R_1}^2 R_2}{R_4}$.

Teilt man 1 durch einen Term, so erhält man dessen Kehrwert.

B.23 $\frac{1}{\frac{1}{R_1}} = 1 : \frac{1}{R_1} = 1 \cdot \frac{R_1}{1} = R_1$.

B.24 $\frac{1}{\frac{R_1 + 1}{R_2 \cdot R_3}} = 1 : \frac{R_1 + 1}{R_2 \cdot R_3} = 1 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + 1} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + 1}$.

1.2 Potenzen

Die Multiplikation identischer Zahlen $a \cdot a \cdot ... \cdot a$ wird als Potenz a^n dargestellt. a wird als Basis und n als Exponent bezeichnet. Der Exponent gibt an, wie oft die Zahl a mit sich selbst multipliziert wird.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-mal}, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Um Potenzen im mathematischen Sinn richtig anwenden zu können, muss man die folgenden Potenzgesetze befolgen. Für $a, b \in \mathbb{R}; \quad a, b \neq 0; \quad m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^n \cdot a^m = a^{a+m}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{9}$$

Zehnerpotenzen

Oftmals sind die Werte für die Spannung U, die Stromstärke I und den Widerstand R sehr klein oder sehr groß. Um die Werte trotzdem kompakt darstellen zu können, nutzt man Zehnerpotenzen und deren Vorsilben.
Die am meist verwendeten Zehnerpotenzen in der Elektrotechnik sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Bedeutung	Vorsilbe	Zehnerpotenz
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}

Tabelle 1: Zehnerpotenzen

B.25 Stellen Sie die Stromstärke $I = 0,005A$ in Milliampere dar.
Lösung: Die Stromstärke hat den Wert $I = 0,005\ Ampere = 5 \cdot 10^{-3}\ A$
Man ersetzt den Faktor 10^{-3} durch die Vorsilbe „Milli“ und kann somit für 0,005 A auch 5 mA (Milliampere) schreiben.

$I = 0,005\ A = 5 \cdot 10^{-3} A = 5\ mA$

B.26 Stellen Sie den Widerstand $R = 7.000.000\ Ohm$ in Megaohm dar.
Lösung: Ein Widerstand hat den Wert $R = 7.000.000\ Ohm = 7 \cdot 10^6 \Omega$.
Die Zehnerpotenz 10^6 steht für die Vorsilbe „Mega“.

$R = 7.000.000\ \Omega = 7 \cdot 10^6 \Omega = 7\ M\Omega\ (Megaohm)$

B.27 Die Stromstärke hat den Wert $I = 36\ \mu A$ ($Mikroampere$)
Die Vorsilbe „Mikro“ entspricht der Zehnerpotenz 10^{-6}.

$$I = 36\ \mu A = 36 \cdot 10^{-6}\ A = 0,000036A$$

B.28 Ein Widerstand hat den Wert $R = 100\ k\Omega$ ($Kiloohm$)
Die Vorsilbe „Kilo“ entspricht der Zehnerpotenz 10^3.

$$R = 100\ k\Omega = 100 \cdot 10^3\ \Omega = 100 \cdot 1000\ \Omega = 100.000\ \Omega$$

1.3 Exkurs: Summenzeichen Σ

Das Zeichen Σ (großes griechisches Sigma) wird Summenzeichen genannt. Mit Hilfe dieses Zeichens kann man längere Summen einfach und kompakt darstellen.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + ... + a_n$$

Der Summationsindex heißt i und wird auch Laufvariable genannt. Mit dem Ausdruck $i = 1$ wird der Startwert der Summe definiert (untere Summationsgrenze). n wird als obere Summationsgrenze bezeichnet und gibt den Endwert der Laufvariablen an.

B.29 a) $\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, b) $\sum_{i=1}^{3} 4^i = 4^1 + 4^2 + 4^3 = 4 + 16 + 64$.

B.30 a) $\sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$, b) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.

1.4 Das Umstellen von gebrochen rationalen Gleichungen

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Zusammenfassen und Vereinfachen von Brüchen bzw. gebrochen rationalen Termen behandelt. Werden zwei gebrochen rationale Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so spricht man von einer Gleichung.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

In der Naturwissenschaft wird oft verlangt, dass man Gleichungen bzw. Formeln nach bestimmten Variablen umstellt, um diese anschließend berechnen zu können. Wie man solche Aufgaben löst, wird im folgenden Kapitel dargestellt.

B.31 Die Gleichung $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ soll nach der Variablen a umgestellt werden.
Zunächst fasst man die zwei Brüche der rechten Seite zusammen.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{c+b}{bc}$$

Anschließend multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit a und dividiert beide Seiten mit dem Term $\frac{c+b}{bc}$:

$$1 = \frac{c+b}{bc} \cdot a, \qquad a = \frac{bc}{c+b} \ .$$

B.32 Die Gleichung $U = \frac{1-R}{1+R} \cdot U_0$ soll nach der Variablen R umgestellt werden.
Lösung: Es fällt auf, dass die Variable R zwei mal vorhanden ist und zudem noch im Nenner eines Bruches steht. Man dividiert zunächst beide Seiten mit U_0, damit R auf einer Seite isoliert ist und eliminiert durch die Multiplikation mit $1 + R$ den Nenner.

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1-R}{1+R}, \qquad \frac{U}{U_0} \cdot (1+R) = 1 - R$$

Zur weiteren Vereinfachung wird die linke Seite ausmultipliziert.

$$\frac{U}{U_0} + \frac{U \cdot R}{U_0} = 1 - R$$

Die Variable R wird durch die Subtraktion mit $\frac{U \cdot R}{U_0}$ und der Subtraktion mit 1 wieder auf der rechten Seite isoliert.

$$\frac{U}{U_0} = 1 - R - \frac{U \cdot R}{U_0}, \qquad \frac{U}{U_0} - 1 = -R - \frac{U \cdot R}{U_0}$$

Man klammert nun R auf der rechten Seite aus und dividiert mit $(-1 - \frac{U}{U_0})$.

$$\frac{U}{U_0} - 1 = R \cdot (-1 - \frac{U}{U_0}), \qquad \frac{\frac{U}{U_0} - 1}{-1 - \frac{U}{U_0}} = R, \qquad \frac{\frac{U - U_0}{U_0}}{\frac{-U_0 - U}{U_0}} = R$$

Abschließend kann man den Faktor (-1) aus dem Nenner ausklammern.

$$-\frac{U - U_0}{U + U_0} = R$$

Grundsätzlich ist die Vorgehensweise bei der Umstellung von Gleichungen bzw. dem Auflösen nach bestimmten Variablen immer gleich. Die gewünschte Variable darf nicht im Nenner eines Bruches stehen und muss auf eine Seite isoliert werden. Je nach Gleichung erfordert dies geschicktes Umformern, welches man durch Übung erlernen kann.

1.5 Aufgaben

Die folgenden Brüche sollen vollständig gekürzt werden (ggf. mit Hilfe der Binomischen Formeln).

A.1 a) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$, b) $\dfrac{7a^2-14ab+7b^2}{3(a-b)}$, c) $\dfrac{54a^2-36ab+6b^2}{6a-2b}$

Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen und geben Sie das Ergebnis in vollständig gekürzter Form an.

A.2 a) $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{1}{3a+3}-\dfrac{4}{a+1}$, b) $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3y}{y+1}+\dfrac{xy}{(x+1)(y+1)}$

A.3 a) $\dfrac{2y}{3z+2}-\dfrac{1-y}{z+2}+\dfrac{3x-2xy}{3xz+6x)}$, b) $\dfrac{a^2+7ab+4b^2}{3a+6b}-\dfrac{ab}{a+2b}$

A.4 a) $\dfrac{2a^2+5ab}{4(a+1)}+\dfrac{4b^2-2ab}{8a+8}$, b) $\dfrac{3}{a-b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{9}\cdot\dfrac{2}{a+b}$

A.5 a) $\dfrac{(x-y)^{-1}}{(x+y)^2}\cdot\dfrac{(x+y)^{-2}}{(x-y)^3}$, b) $(\dfrac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3})^2\cdot(\dfrac{a^{-2}x}{(b^3y^2})^{-3}$

A.6 a) $\dfrac{\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}}{\frac{a-b}{a+b}}$, b) $\dfrac{\frac{ab}{2a+4}+\frac{b}{a+2}}{\frac{a}{b+3}-\frac{ab}{3b-9}}$

Die folgenden Gleichungen sollen nach der angegebenen Variable umgestellt werden.

A.7 Stellen Sie die Gleichung nach x um: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{10-x}{b}=\dfrac{10}{c}$

A.8 Stellen Sie die Gleichung nach c um: $F=\dfrac{U_a-U_b}{\frac{U_c}{A}-\frac{U_d}{c}}$

A.9 Stellen Sie die Gleichung nach U um: $I = \dfrac{\dfrac{U}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}$

A.10 Stellen Sie die Gleichung nach R_1 um: $U_2 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}\cdot U_1 - \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\cdot I$

Schreiben Sie die folgenden Einheiten wörtlich auf *(A steht für Ampere, V steht für Volt und Ω steht für Ohm)*
Beispiel: 10 cm → 10 Zentimeter

A.11 $k\Omega$, mA, GV, μA, nV, $M\Omega$.

In der folgenden Aufgabe sollen die Werte ohne Angabe von den Vorsilben der Zehnerpotenzen angegeben werden.
Beispiel: 10cm → 0,1m

A.12 550 mA, $0,1\ k\Omega$, $2,3\ kV$, 4500 $m\Omega$, 24.000 μV, 1.000.000 nV, $0,00076\ G\Omega$.

Es sollen nun die Werte mit Hilfe von den Zehnerpotenzen und deren Vorsilben kompakt dargestellt werden.
Beispiel: 1000 m → 1 km

A.13 65.000 Ω, $0,000043\ A$, 300.000 V, $0,000076\ A$, $0,00000066\ A$, 50.000.000 Ω.

1.6 Lösungen

L.1 a) $x+y$, b) $\dfrac{7(a-b)}{3}$, c) $3(3a-b)$

L.2 a) $-\dfrac{5}{3(a+1)}$, b) $\dfrac{2x-3y}{(x+1)(y+1)}$

L.3 a) $\dfrac{y}{z+2}$, b) $\dfrac{a+2b}{3}$

L.4 a) $\dfrac{(a+b)^2}{2(a+1)}$, b) $\dfrac{2}{3}$

L.5 a) $\dfrac{1}{(x^2-y^2)^4}$, b) $\dfrac{1}{a^2bx}$

L.6 a) $\dfrac{a+b}{ab+a+b+1}$, b) $\dfrac{-3b^3-27b}{18a+2ab^2}$

L.7 $x = \dfrac{10 \cdot a(b-c)}{c(b-a)}$

L.8 $c = \dfrac{U_d F A}{(U_b - U_a)A + U_c F}$

L.9 $U = \dfrac{I(Rj\omega C + 1)^2}{(j\omega C)^2}$

L.10 $R_1 = \dfrac{R_2(U_1 - U_2)}{U_2 + R_2 I}$

L.11 *Kiloohm*, *Milliampere*, *Gigavolt*, *Mikroampere*, *Nanovolt*, *Megaohm*

L.12 $0,55\,A$, $100\,\Omega$, $2300\,V$, $4,5\,\Omega$, $0,024\,V$, $0,001\,V$, $760.000\,\Omega$

L.13 $65\,k\Omega$, $0,043\,mA$, $0,3\,MV$, $76\,\mu A$, $660\,nA$, $0,05\,G\Omega$

2 Die Grundgrößen im elektrischen Stromkreis

Die Stromstärke I

Die Bewegung von Ladungsträgern (z.B. Elektronen) in einem Leiter (z.B. ein Kupferdraht) wird als Strom bzw. Stromstärke I bezeichnet. Je mehr Elekronen durch den Leiter fließen oder je schneller sich diese bewegen, desto größer ist die Stromstärke. Die Einheit der Stromstärke ist Ampere:

$$[I]^1 = 1\,Ampere = 1\,A$$

Die Spannung U

Damit ein Strom fließen kann, ist eine Spannung notwendig. Unter der elektrischen Spannung U versteht man die treibende Kraft, die die Ladungsbewegung verursacht. Die Einheit der Spannung ist Volt:

$$[U] = 1\,Volt = 1\,V$$

Der Widerstand R

Der Widerstand R ist der „Gegenspieler“ zur Spannung und übt eine entgegengesetzt gerichtete Kraft auf die bewegten Ladungsträger aus. Das heißt, dass an jedem Widerstand Spannung abfällt. Die Größe des Widerstandes gibt an, wie stark dieser den Stromfluss beeinflusst. Denn je größer der Widerstand ist, desto kleiner ist der fließende Strom. Die Einheit des Widerstandes ist Ohm:

$$[R] = 1\,Ohm = 1\,\Omega$$

Die Abbildung 1 zeigt den Aufbau eines Grundstromkreises. Zu sehen ist die Stromstärke I, der Widerstand R und die am Widerstand anliegende Spannung U.

[1] Die Einheit einer Größe wird mit eckigen Klammern [ ] gekennzeichnet.

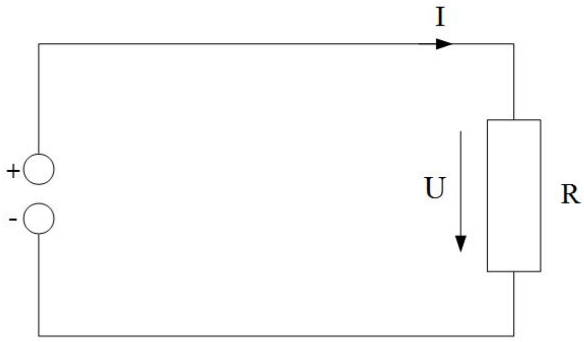


Abbildung 1: Der einfache Stromkreis

3 Das Ohmsche Gesetz

Das Ohmsche Gesetz lautet

$$U = R \cdot I \tag{10}$$

und beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen der Spannung U und der Stromstärke I. Um die Stromstärke bzw. den Widerstand mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes berechnen zu können, muss diese Gleichung (10) nach der entsprechenden Größe umgestellt werden:

$$I = \frac{U}{R}, \qquad R = \frac{U}{I} \tag{11}$$

Der Quotient aus der Spannungsdifferenz ΔU und der Stromstärkendifferenz ΔI ist konstant und wird als Widerstand R bezeichnet. In Abbildung 2 lässt sich dieser Wert als Steigung des Graphen erkennen.

$$U \sim I, \qquad \frac{\Delta U}{\Delta I} = konst. = R$$

Das Zeichen $\sim$ kennzeichnet die Proportinalität zwischen U und I.

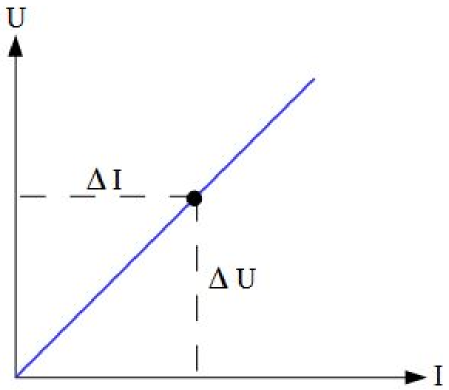


Abbildung 2: Das Spannungs-Strom-Diagramm

B.33 Gegeben sei ein Strom von 2 Ampere und ein Widerstand von 10 Ohm.
Mit Hilfe des Ohmschen Gesetz lässt sich die an dem Widerstand anliegende Spannung U berechnen. Die Abbildung 1 zeigt den passenden symbolischen Schaltkreis. Man setzt die Werte für den Strom I und den Widerstand R in die Gleichung (10) ein und berechnet somit die Spannung U.

Lösung: $U = R \cdot I = 10\,\Omega \cdot 2\,A = 20\,\Omega A = 20\,V$

B.34 Im folgenden Beispiel ist der Widerstand $R = 100\,\Omega$ und die Spannung $U = 230\,V$ gegeben. Es soll nun die Stromstärke bzw. der Strom I berechnet werden.

Lösung: $I = \frac{U}{R} = \frac{230\,V}{100\,\Omega} = 2,3\,\frac{V}{\Omega} = 2,3\,A$

B.35 Es soll nun der Widerstand R berechnet werden, sodass bei einer Spannung von $U = 24\,V$ ein Strom von $I = 4\,A$ fließt.

Lösung: $R = \frac{U}{I} = \frac{24\,V}{4\,A} = 6\,\frac{V}{A} = 6\,\Omega$

B.36 Durch den Widerstand $R = 100\ k\Omega$ fließt ein Strom mit der Stärke $I = 24\ \mu A$. Die an dem Widerstand anliegende Spannung U kann man mit dem Ohmschen Gesetz berechnen.

Lösung:

$$U = R \cdot I = 100\ k\Omega \cdot 24\ \mu A = 100 \cdot 10^3 \cdot \Omega \cdot 24 \cdot 10^{-6} \cdot A = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 24}{10^6}\ \Omega A$$

$$U = \frac{10^5 \cdot 24}{10^6}\ V = \frac{24}{10}\ V = 2,4\ V$$

3.1 Aufgaben

Berechnen Sie die fehlenden Werte für die Spannung U, die Stromstärke I und den Widerstand R mit Hilfe des Ohmschen Gesetz und geben Sie das Ergebnis in möglichst kompakter Form an.

A.14 Berechnen Sie aus den angegebenen Werten die Spannung U:

a) $I = 6\ A, \quad R = 50\ \Omega,$ b) $I = 0,5\ A, \quad R = 200\ \Omega,$

c) $I = \frac{2}{3}\ A, \quad R = \frac{3}{4}\ \Omega,$ d) $I = 0,73\ mA, \quad R = 5,6\ M\Omega,$

e) $I = 1,2\ mA, \quad R = 2,7\ M\Omega,$ f) $I = 25\ \mu A, \quad R = 30\ k\Omega.$

A.15 Berechnen Sie aus den angegebenen Werten die Stromstärke I:

a) $R = 23\ n\Omega, \quad U = 0,5\ mV,$ b) $R = 2,2\ M\Omega, \quad U = 66\ V,$

c) $R = 1,5\ k\Omega, \quad U = 75\ mV,$ d) $R = 0,3\ k\Omega, \quad U = 24\ V.$

A.16 Berechnen Sie aus den angegebenen Werten den Widerstand R:

a) $U = 150\ V, \quad I = 20\ \mu A,$ b) $U = \frac{3}{7}\ V, \quad I = \frac{9}{28}\ mA,$

c) $U = 0,065\ V, \quad I = 5\ mA,$ d) $U = 280\ mV, \quad I = 7\ \mu A,$

e) $U = 352\ V, \quad I = 160\ \mu A.$

3.2 Lösungen

L.14 a) $300\ V,$ b) $100\ V,$ c) $0,5\ V,$ d) $4088\ V,$ e) $3,24\ kV,$ f) $750\ mV$

L.15 a) $\frac{1}{46}\ MA,$ b) $30\ \mu A,$ c) $50\ \mu A,$ d) $80\ mA$

L.16 a) $7,5\ M\Omega,$ b) $\frac{4}{9}\ k\Omega,$ c) $13\ \Omega,$ d) $40\ k\Omega,$ e) $2,2\ M\Omega$

4 Zusammenfassung von Widerständen

Die meisten Stromkreise liegen nicht in Form des Grundstromkreises (vgl. Abbildung 1) vor, sondern bestehen aus Aneinanderreihungen oder/und Verzweigungen von Widerständen. Diese komplex aussehenden Schaltungen können jedoch in die Form des Grundstromkreises überführt werden. Wie man solche Widerstandsschaltungen berechnet, wird in den folgenden Abschnitten verdeutlicht.

4.1 Die Reihen- bzw. Serienschaltung von Widerständen

Sind mehrere Widerstände hintereinander und ohne Verzweigung angeordnet, so spricht man von einer Reihen- bzw. Serienschaltung.
Die Abbildung 3 veranschaulicht solch einen Aufbau.

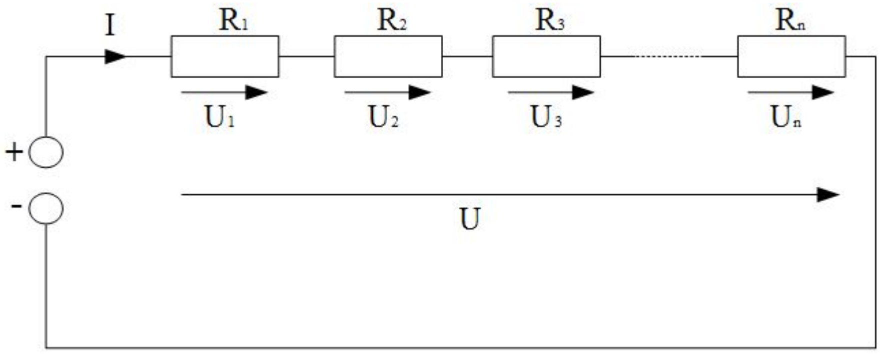


Abbildung 3: Die Reihenschaltung von Widerständen

In einer Reihenschaltung ist die Stromstärke I im gesamten Stromkreis gleich. Die an den einzelnen Widerständen $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$ anliegenden Spannungen $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ergeben in Summe die Gesamtspannung U in dem Stromkreis.
Die Einzelwiderstände lassen sich zu einem Gesamtwiderstand zusammenfassen. Dieses Ersatzschaltbild ist in Abbildung 4 veranschaulicht.

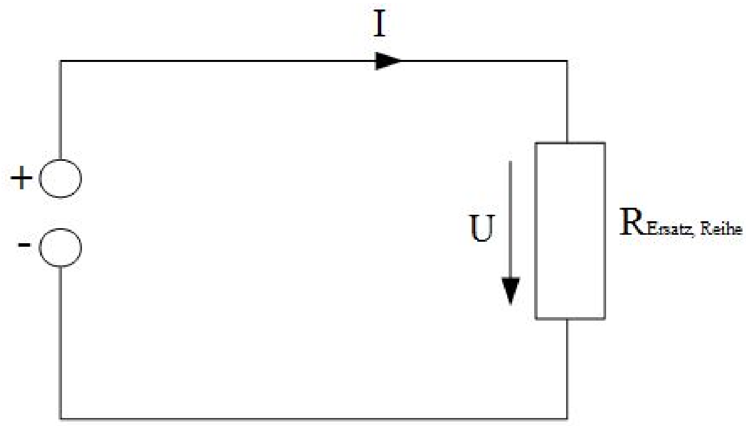


Abbildung 4: Ersatzstromkreis der Reihenschaltung

Der Gesamtwiderstand $R_{Ersatz,Reihe}$ berechnet sich aus der Summe der Einzelwiderstände $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$:

$$R_{Ersatz,Reihe} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad (12)$$

B.37 Die drei Widerstände R_1, R_2 und R_3 sind in Reihe geschaltet. Der Gesamtwiderstand dieser Schaltung ergibt sich aus der Summe aller drei Widerstände (Gleichung (12)).

$R_1 = 200\Omega,\ R_2 = 75\Omega,\ R_3 = 300\Omega,$

$R_{Ersatz} = R_1 + R_2 + R_3 = 200\Omega + 75\Omega + 300\Omega = 575\Omega.$

B.38 $R_1 = 1000\Omega, R_2 = 0,2k\Omega, R_3 = 25\Omega.$

$$\begin{aligned} R_{Ersatz} &= R_1 + R_2 + R_3 = 1000\Omega + 0,2k\Omega + 25\Omega = 1000\Omega + 0,2 \cdot 10^3 \cdot \Omega + 25\Omega \\ &= 1000\Omega + 200 \cdot \Omega + 25\Omega = 1225\Omega. \end{aligned}$$

4.2 Die Parallelschaltung von Widerständen

Sind die Widerstände wie in Abbildung 5 angeordnet, so spricht man von einer Parallelschaltung. Solch ein Stromkreis wird auch als verzweigter Stromkreis bezeichnet. In einer Parallelschaltung teilt sich die Stromstärke an den Verzweigungspunkten der

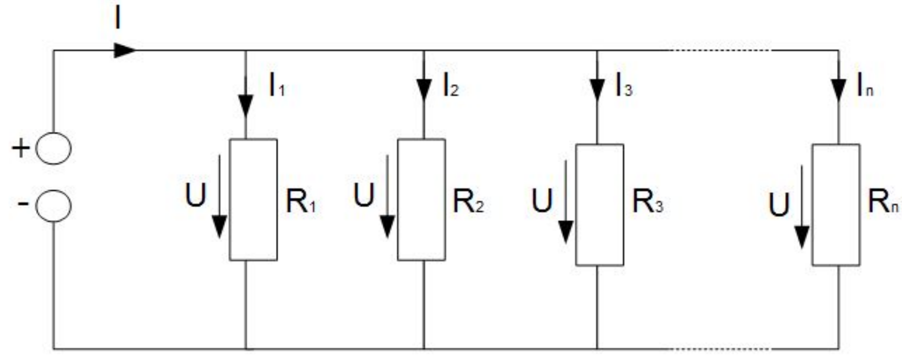


Abbildung 5: Die Parallelschaltung von Widerständen

Widerstände $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$ in mehrere Teilströme $I_1, I_2, I_3, ..., I_n$ auf. Die an den einzelnen Widerständen anliegenden Spannungen $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ sind alle so groß wie die Gesamtspannung.
Die Einzelwiderstände lassen sich zu einem Gesamtwiderstand zusammenfassen. Dieses Ersatzschaltbild ist in Abbildung 6 veranschaulicht.

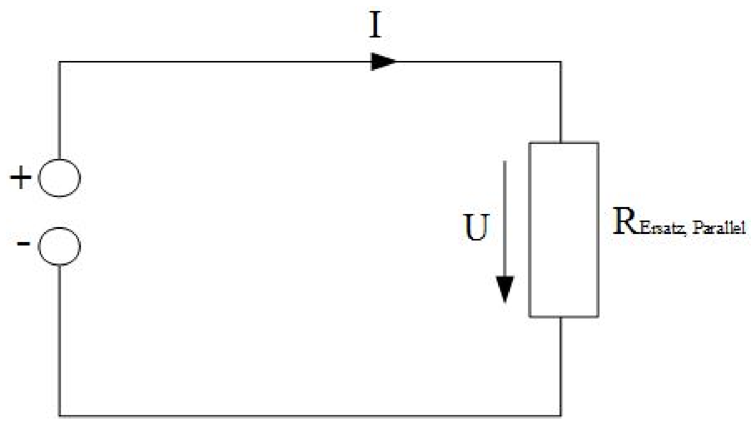


Abbildung 6: Ersatzstromkreis der Parallelschaltung

Der Kehrwert des Gesamtwiderstandes $\mathrm{R}_{\mathrm{Ersatz,Reihe}}$ berechnet sich aus der Summe der

Kehrwerte der Einzelwiderstände $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$:

$$\frac{1}{R_{Ersatz,Parallel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}. \tag{13}$$

Der Gesamtwiderstand ist somit kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

B.39 Zwei Widerstände R_1 und R_2 sind parallel geschaltet. Mit Hilfe von Gleichung (13) kann man den Gesamtwiderstand berechnen.

$$R_{Ersatz,Parallel} = R_1 \mid\mid R_2$$ [2]

$$\frac{1}{R_{Ersatz,Parallel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1 \cdot R_2} + \frac{R_1}{R_1 \cdot R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1\ R_2}$$

$$R_{Ersatz,Parallel} = \frac{R_1\ R_2}{R_2 + R_1} \tag{14}$$

B.40 Die zwei Widerstände $R_1 = 200\ \Omega$ und $R_2 = 50\ \Omega$ sind parallel geschaltet. Der Gesamtwiderstand dieser Schaltung lässt sich mit Hilfe von Gleichung (14) berechnen.

$$R_{Ersatz,Parallel} = \frac{R_1\ R_2}{R_2 + R_1} = \frac{200\ \Omega\ \cdot\ 50\ \Omega}{50\ \Omega + 200\ \Omega} = \frac{10000\ \Omega^2}{250\ \Omega} = 40\ \Omega$$

B.41 Drei Widerstände R_1, R_2 und R_3 sind parallel geschaltet. Mit Hilfe von Gleichung (13) kann man den Gesamtwiderstand berechnen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{Ersatz,Parallel}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} \\ &= \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}\end{aligned}$$

$$R_{Ersatz,Parallel} = \frac{R_1\ R_2\ R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} \tag{15}$$

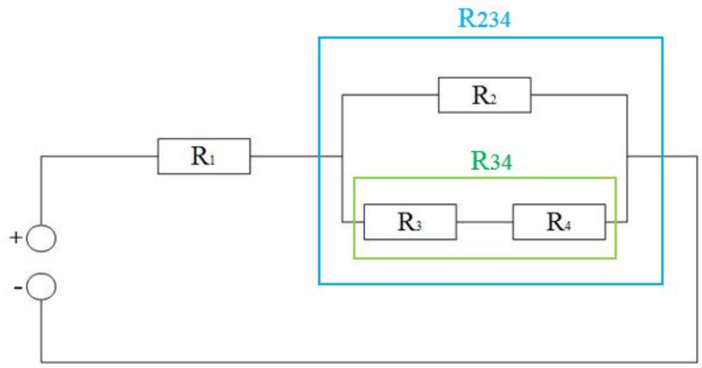
[2] Die zwei senkrechten Striche || verwendet man, um symbolisch darzustellen, dass zwei Widerstände parallel zueinander geschaltet sind.

B.42 Drei Widerstände $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 75\ \Omega$ und $R_3 = 300\ \Omega$ sind parallel geschaltet. Mit Hilfe von Gleichung (15) kann man den Gesamtwiderstand berechnen.

$$
\begin{aligned}
R_{Ersatz,Parallel} &= \frac{R_1\ R_2\ R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} \\
&= \frac{200\ \Omega\ \cdot\ 75\ \Omega\ \cdot\ 300\ \Omega}{75\ \Omega\ \cdot\ 300\ \Omega + 200\ \Omega\ \cdot\ 300\ \Omega + 200\ \Omega\ \cdot\ 75\ \Omega} \\
&= \frac{4500000\ \Omega^3}{97500\ \Omega^2} = \frac{600}{13}\ \Omega\ = 46\frac{2}{13}\ \Omega
\end{aligned}
\tag{16}
$$

4.3 Berechnung von Widerstandsnetzwerken

In den folgenden zwei Beispielen sollen die Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Man betrachtet das Netzwerk dabei von „innen" nach „außen" und berechnet sogenannte Teilwiderstände.



B.43

Abbildung 7: Schaltbild zu Beispiel B.46

Man beginnt zunächst die Widerstände zusammen zufassen, die möglichst weit innerhalb der Schaltung liegen. In diesem Fall ist es die Reihenschaltung von R_3 und R_4.

$$R_{34} = R_3 + R_4$$

Als nächstes fasst man die Parallelschaltung von R_{34} und R_2 zusammen.

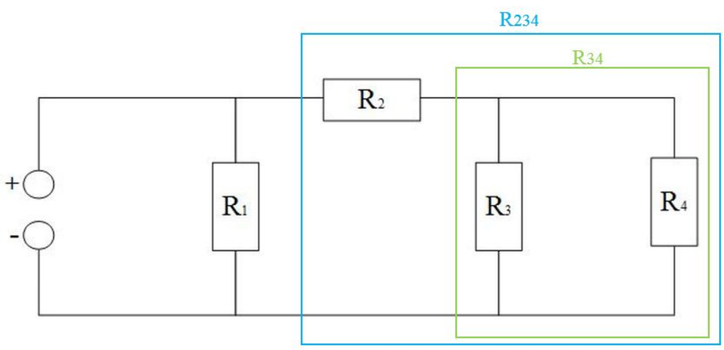
$$
\begin{aligned}
R_{234} &= R_2\ ||\ R_{34} = R_2\ ||\ (R_3 + R_4) \\
&= \frac{R_2\ \cdot\ R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{R_2\ \cdot\ (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}
\end{aligned}
$$

Der Gesamtwiderstand ergibt sich nun aus der Reihenschaltung von R_1 und R_{234}.

$$\begin{aligned}
R_{Ersatz} &= R_1 + R_{234} = R_1 + (R_2 \parallel R_{34}) = R_1 + [R_2 \parallel (R_3 + R_4)] \\
&= R_1 + \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \\
&= \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}.
\end{aligned}$$

Für $R_1 = 24\,\Omega, R_2 = 160\,\Omega, R_3 = 40\,\Omega$ und $R_4 = 200\,\Omega$ ergibt sich dann folgender Gesamtwiderstand R_{Ersatz}:

$$R_{Ersatz} = \frac{12000\,\Omega^2}{100\,\Omega} = 120\,\Omega.$$



B.44

Abbildung 8: Schaltbild zu Beispiel B.47

Zuerst wird die Parallelschaltung von R_3 und R_4 zusammengefasst.

$$R_{34} = R_3 \parallel R_4 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}.$$

Darauf folgt die Reihenschaltung von R_2 und R_{34} (blauer Kasten).

$$\begin{aligned}
R_{234} &= R_2 + R_{34} = R_2 + (R_3 \parallel R_4) = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \\
&= \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4) + R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}.
\end{aligned}$$

Der Gesamtwiderstand ergibt sich schließlich aus der Parallelschaltung von R_1 und R_{234}.

$$\begin{aligned}
R_{Ersatz} &= R_1 \,||\, R_{234} = R_1 \,||\, [R_2 + (R_3 \,||\, R_4)] \\
&= R_1 \,||\, (\frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4) + R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}) \\
&= \frac{R_1 \cdot (\frac{R_2 \cdot (R_3+R_4)+R_3 \cdot R_4}{R_3+R_4})}{R_1 + (\frac{R_2 \cdot (R_3+R_4)+R_3 \cdot R_4}{R_3+R_4})} = \frac{\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot (R_3+R_4)+R_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_3+R_4}}{\frac{R_1 \cdot (R_3+R_4)+R_2 \cdot (R_3+R_4)+R_3 \cdot R_4}{R_3+R_4}} \\
&= \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_1R_3R_4}{R_3 + R_4} : \frac{R_1(R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4}{R_3 + R_4} \\
&= \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_1R_3R_4}{\cancel{R_3 + R_4}} \cdot \frac{\cancel{R_3 + R_4}}{R_1(R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4} \\
&= \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_1R_3R_4}{R_1(R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4} \\
&= \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_1R_3R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2) + R_3R_4}
\end{aligned}$$

Für $R_1 = 200\ \Omega, R_2 = 250\ \Omega, R_3 = 400\ \Omega$ und $R_4 = 600\ \Omega$ ergibt sich dann folgender Gesamtwiderstand:

$$R_{Ersatz} = \frac{9800\ \Omega^3}{69\ \Omega^2} = \frac{9800}{69}\ \Omega$$

In Beispiel B.44 erkennt man, dass bei zunehmendem Schaltungsaufwand die Brüche größer und unübersichtlicher werden. Somit steigt auch die Fehleranfälligkeit. Aus diesem Grund empfiehlt es sich die Teilwiderstände als Zwischenergebnis anzugeben und mit diesen Werten fortzufahren (Achtung: keine gerundeten Ergebnisse sondern exakte Werte bzw. Brüche verwenden!).

$$\begin{aligned}
R_{34} &= R_3 \,||\, R_4 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{400\ \Omega \cdot 600\ \Omega}{400\ \Omega + 1600\ \Omega} = \frac{240000\Omega^2}{1000\ \Omega} = 240\ \Omega, \\
R_{234} &= R_2 + R_{34} = 250\ \Omega + 240\ \Omega = 490\ \Omega, \\
R_{Ersatz} &= R_1 \,||\, R_{234} = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 \cdot R_{234}} = \frac{200\ \Omega \cdot 490\ \Omega}{200\ \Omega + 490\ \Omega} = \frac{9800\Omega^2}{69\ \Omega} = \frac{9800}{69}\ \Omega.
\end{aligned}$$

4.4 Aufgaben

In den folgenden Aufgaben sollen die Gesamtwiderstände der einzelnen Netzwerke berechnet werden. Die Berechnungsvorschrift ist bereit angegeben. Ermitteln Sie zunächst eine

allgemeine Berechnungsformel für den jeweiligen Gesamtwiderstand und setzen im Anschluss die Zahlenwerte ein, um den Gesamtwiderstand zu berechnen. Es ist zu beachten, dass die Parallelschaltung bei solchen Berechnungen Vorrang gegenüber der Reihenschaltung hat (vgl. Addition und Multiplikation; „Punkt-vor-Strich“).
Zusätzlich können Sie Ihr Ergebnis kontrollieren, indem Sie den Gesamtwiderstand schrittweise mit Hilfe von Zwischenergebnissen (vgl. Beispiel B.44)

A.36 $R_{\text{Ersatz}} = R_4 \mid\mid [R_3 + (R_1 \mid\mid R_2)]$

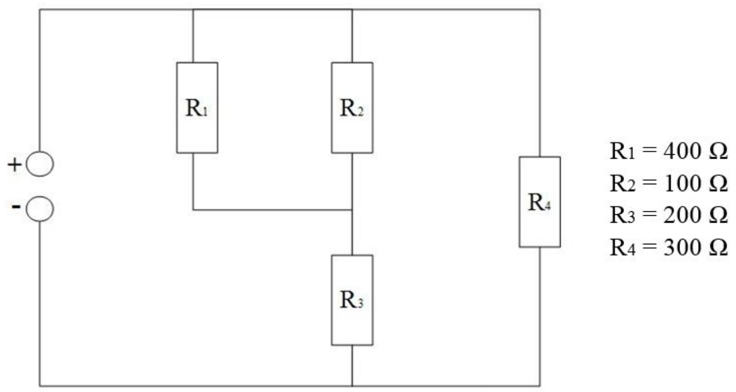


Abbildung 9: Schaltbild zu Aufgabe A.36

A.37 $R_{Ersatz} = [R_1 + (R_2 \mid\mid R_3)] \mid\mid [R_4 \mid\mid (R_5 + R_6)]$

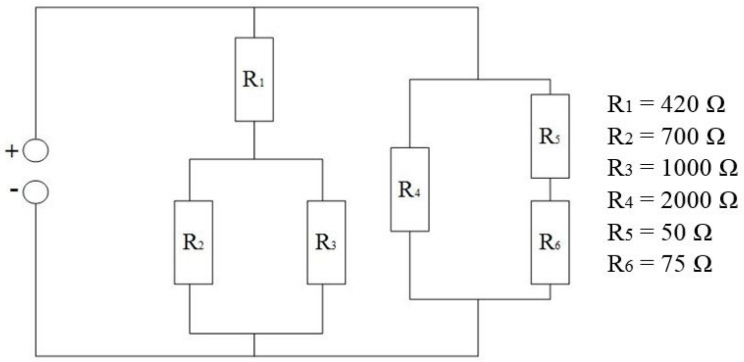


Abbildung 10: Schaltbild zu Aufgabe A.37

A.38 $R_{Ersatz} = R_1 \mid\mid \{R_2 + [R_3 \mid\mid (R_4 + R_5)]\}$

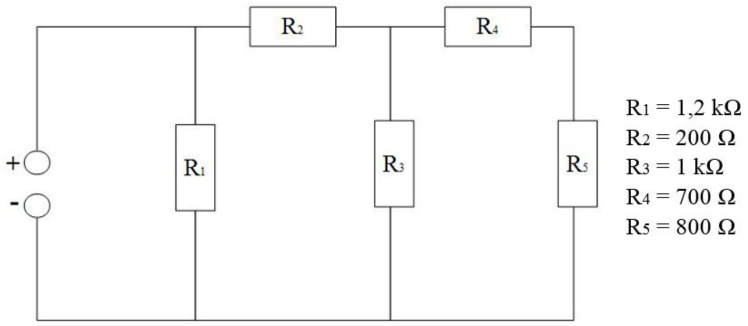


Abbildung 11: Schaltbild zu Aufgabe A.38

In den folgenden Aufgaben soll der Gesamtwiderstand schrittweise mit Hilfe von Zwischenergebnissen berechnet werden (vgl. Beispiel B.44).

A.39 $R_{Ersatz} = R_1 \mid\mid \langle R_2 + \{R_3 \mid\mid [R_5 + (R_6 \mid\mid R_7)]\} + R_4 \rangle$

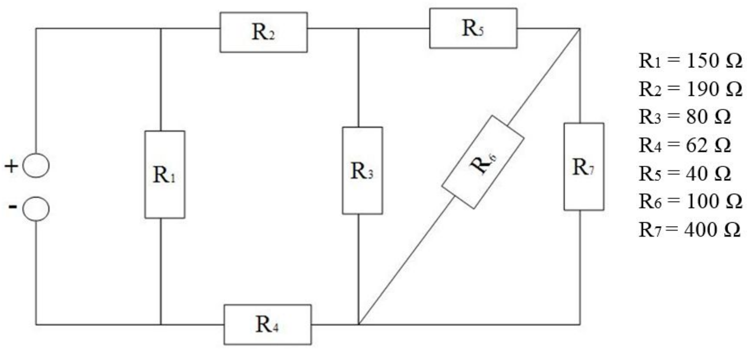


Abbildung 12: Schaltbild zu Aufgabe A.39

A.40 $R_{Ersatz} = [R_6 \mid\mid (R_4 + R_5)] \mid\mid [R_1 + (R_2 \mid\mid R_3)]$

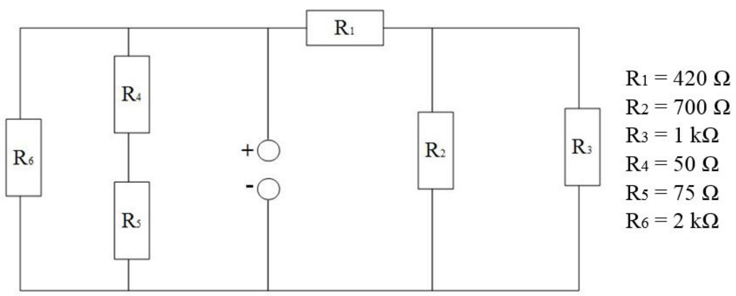


Abbildung 13: Schaltbild zu Aufgabe A.40

A.41 $R_{Ersatz} = [R_3 \mid\mid (R_1 + R_2)] + R_5 + \langle R_7 \mid\mid \{R_6 + [R_8 \mid\mid (R_9 + R_10)]\}\rangle$

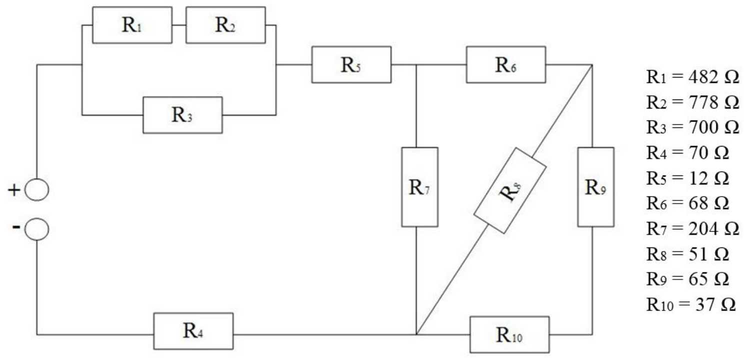


Abbildung 14: Schaltbild zu Aufgabe A.41

A.42 Berechnen Sie den Gesamtwiderstand, indem Sie den folgenden Bruch zunächst vereinfachen und anschließend die Werte einsetzen.

$$R_{Ersatz} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_5}} \qquad (R_{1 \ldots 6} = 10\ k\Omega)$$

4.5 Lösungen

L.36 $R_{Ersatz} = \frac{R_4 R_3 (R_1 + R_2) + R_4 R_1 R_2}{R_4 (R_1 + R_2) + R_3 (R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{4200}{29}\ \Omega\ (\approx 144{,}83\ \Omega)$

L.37 $R_{Ersatz} = \frac{R_4 (R_5 + R_6)\ \cdot\ [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]}{R_4 (R_5 + R_6 9 (R_2 + R_3) + [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3](R_4 + R_5 + R_6)}$

$R_{Ersatz} = \frac{1414000}{13719}\ \Omega\ (\approx 103{,}07\ \Omega)$

L.38 $R_{Ersatz} = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4 R_5) + R_1 R_3 (R_4 + R_5)}{R_1 (R_3 + R_4 + R_5 + R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_3 (R_4 + R_5)}$

$R_{Ersatz} = 480\ \Omega$

L.39

$$\begin{aligned}
R_{567} &= R_5 + (R_6 \mid\mid R_7) = R_5 + \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = 120\,\Omega \\
R_{3567} &= R_3 \mid\mid R_{567} = \frac{R_3 R_{567}}{R_3 + R_{567}} = 48\,\Omega \\
R_{234567} &= R_2 + R_{3567} + R_4 = 110\,\Omega \\
R_{Ersatz} &= R_1 \mid\mid R_{234567} = \frac{R_1 R_{234567}}{R_1 + R_{234567}} = 100\,\Omega
\end{aligned}$$

L.40

$$\begin{aligned}
R_{123} &= R_1 + (R_2 \mid\mid R_3) = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{14140}{17}\,\Omega \\
R_{456} &= R_6 + (R_4 \mid\mid R_5) = R_6 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{2000}{17}\,\Omega \\
R_{Ersatz} &= R_{456} \mid\mid R_{123} = \frac{R_{456} R_{123}}{R_{456} + R_{123}} = \frac{1414000}{13719}\,\Omega\ (\approx 103,07\,\Omega)
\end{aligned}$$

L.41

$$\begin{aligned}
R_{123} &= R_3 \mid\mid (R_1 + R_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} = 450\,\Omega \\
R_{8910} &= R_8 \mid\mid (R_9 + R_10) = \frac{R_8(R_9 + R_10)}{R_8 + R_9 + R_10} = 34\,\Omega \\
R_{68910} &= R_6 + R_{8910} = 102\,\Omega \\
R_{678910} &= R_7 \mid\mid R_{68910} = \frac{R_7 R_{68910}}{R_7 + R_{68910}} = 68\,\Omega \\
R_{Ersatz} &= R_{123} + R_5 + R_{678910} + R_4 = 600\,\Omega
\end{aligned}$$

L.42

$$\begin{aligned}
R_{Ersatz} &= \frac{(R_1R_2 + R_1R_2 + R_2R_3)(R_5 + R_6)R_4}{R_4(R_1 + R_2)(R_5 + R_6) + (R_1R_2 + R_1R_2 + R_2R_3)(R_4 + R_5 + R_6)} \\
&= \frac{6}{13}R = \frac{6}{13} \cdot 10\,k\Omega = \frac{60}{13}\,k\Omega \approx 4,615\,k\Omega
\end{aligned}$$

5 Literaturverzeichnis

Vorkurs Mathematik, Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen
Erhard Cramer und Johanna Neslehová, 5. Auflage 2012, Springer Verlag

Kompaktkurs Elementarmathematik für Studienanfänger technischer und Informatik-Studiengänge, Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin Universität of Appllied Science, Stand 13.09.2016

Grundlagen der Elektrotechnik, Teil 1 Grundlagen und Gleichstromnetzwerke
FG Grundlagen de Elektrotechnik Fachbereich Elektrotechnik Hochschule Fulda
Prof. Dr. Ing. E. Baum
Oktober 2014