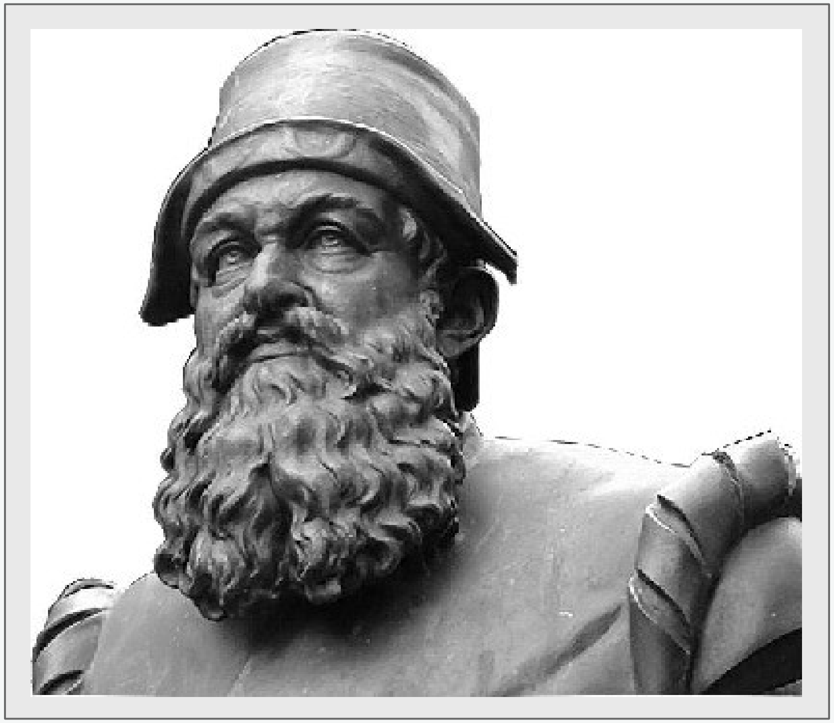
http://www.flickr.com/photos/riennevaplus/2478335916/

Bruchrechnung



Adam Ries (1492-1559), ein deutscher Rechenmeister

Adam Ries gilt allgemein als der "Vater des modernen Rechnens". Zur seiner Zeit galt die Bruchrechnung als etwas besonders schwieriges, das nur wenige Menschen beherrschen.

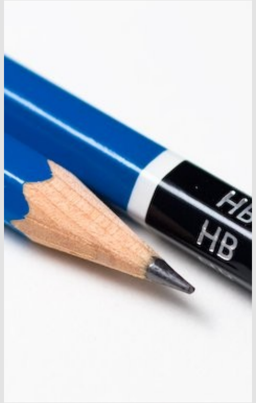
Beim Kürzen eines Bruches werden Zähler und Nenner des Bruches durch denselben, von Null verschiedenen Term dividiert.

Vor dem Kürzen zerlegt man Zähler und Nenner so weit, wie es möglich ist, in Faktoren. Diejenigen Faktoren, die in Zähler und Nenner gleichzeitig auftreten, dürfen gekürzt werden.

$$\frac{6\,x\,y}{3\,y} = \frac{2\,x \cdot 3\,y}{3\,y} = 2\,x$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a\,(a + b)} = \frac{(a - b)\,(a + b)}{a\,(a + b)} = \frac{a - b}{a}$$

Es ist zu beachten, dass ein Bruch in ungekürzter Form einen anderen Definitionsbereich haben kann als nach Kürzung. Im Beispiel ist die linke Seite für $a + b = 0$ nicht definiert im Gegensatz zur rechten Seite.



Die Brüche sind so weit wie möglich zu kürzen:

$a)\quad \dfrac{a^2\, b^3\, c}{a\, b^2\, c}$

$b)\quad \dfrac{3 + x}{9 - x^2}$

$c)\quad \dfrac{x\, y + x^2}{a\, x - x^3}$

$d)\quad \dfrac{a^2 + 2\, a\, b + b^2}{a\, c + b\, c}$

$e)\quad \dfrac{x\, y}{x^2 - 2\, x}$

$f)\quad \dfrac{a^2 + 2\, a\, b}{a\, b\, c}$

a) $\dfrac{a^2\, b^3\, c}{a\, b^2\, c} = a\, b$

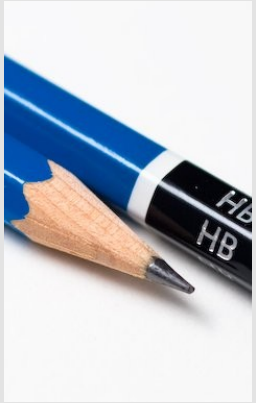
b) $\dfrac{3 + x}{9 - x^2} = \dfrac{3 + x}{(3 + x)\,(3 - x)} = \dfrac{1}{3 - x}$

c) $\dfrac{x\, y + x^2}{a\, x - x^3} = \dfrac{x\,(y + x)}{x\,(a - x^2)} = \dfrac{y + x}{a - x^2}$

d) $\dfrac{a^2 + 2\, a\, b + b^2}{a\, c + b\, c} = \dfrac{(a + b)^2}{c\,(a + b)} = \dfrac{a + b}{c}$

e) $\dfrac{x\, y}{x^2 - 2\, x} = \dfrac{y}{x - 2}$

f) $\dfrac{a^2 + 2\, a\, b}{a\, b\, c} = \dfrac{a + 2\, b}{b\, c}$



Die Brüche sind so weit wie möglich zu kürzen:

$$a)\quad \frac{x^2 - y^2}{y + x}$$

$$b)\quad \frac{(7\,x - 3\,y)^2}{49\,x^2 - 9\,y^2}$$

$$c)\quad \frac{7\,x^3 - x^2\,y}{7\,x\,y^2 - y^3}$$

$$d)\quad \frac{(x - y)^2}{7\,x\,y - 7\,x^2}$$

$$e)\quad \frac{x^2 - 6\,x + 9}{x^2 - 9}$$

$$f)\quad \frac{x^2 - 8\,x + 16}{2\,x^2 - 32}$$

$$a)\quad \frac{x^2 - y^2}{y + x} = x - y$$

$$b)\quad \frac{(7x - 3y)^2}{49x^2 - 9y^2} = \frac{(7x - 3y)^2}{(7x)^2 - (3y)^2} = \frac{7x - 3y}{7x + 3y}$$

$$c)\quad \frac{7x^3 - x^2 y}{7xy^2 - y^3} = \frac{x^2}{y^2}, \qquad d)\quad \frac{(x - y)^2}{7xy - 7x^2} = \frac{y - x}{7x}$$

$$c)\quad \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 3^2} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

$$f)\quad \frac{x^2 - 8x + 16}{2x^2 - 32} = \frac{(x - 4)^2}{2(x^2 - 16)} = \frac{(x - 4)^2}{2(x^2 - 4^2)} =$$

$$= \frac{(x - 4)^2}{2(x - 4)(x + 4)} = \frac{x - 4}{2(x + 4)}$$

Man multipliziert Brüche, indem man die Zähler und Nenner jeweils multipliziert

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

Man dividiert einen Bruch durch einen zweiten Bruch, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit demselben Term multipliziert.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{x\,y} + \frac{x}{x\,y} = \frac{x + y}{x\,y}$$

Kürzen und Erweitern verändern den Wert eines Bruches nicht!

Gleichnamige Brüche – das sind Brüche, die alle denselben Nenner haben – dürfen addiert bzw. subtrahiert werden, indem man die Summe bzw. Differenz ihrer Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren durch Erweitern gleichnamig gemacht werden. Der gemeinsame Nenner der Brüche heißt Hauptnenner.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{b\,c}{b\,d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$$

Als Hauptnenner wird das kleinste Vielfache der Einzelnenner verwendet.

$$\frac{5a+b}{5a-b} - \frac{20ab}{25a^2-b^2} - \frac{5a-b}{5a+b} = \rightarrow$$

Hauptnenner: $25a^2 - b^2 = (5a+b)(5a-b)$

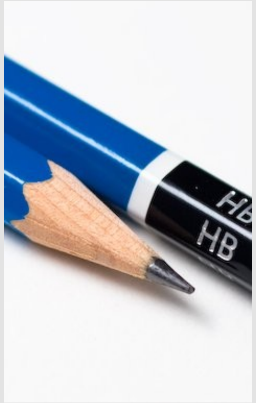
$5a+b$ ist ein Erweiterungsfaktor für den Bruch $\dfrac{5a+b}{5a-b}$

$5a-b$ ist ein Erweiterungsfaktor für den Bruch $\dfrac{5a-b}{5a+b}$

$$\rightarrow = \frac{(5a+b)^2}{(5a-b)(5a+b)} - \frac{20ab}{(5a+b)(5a-b)} - \frac{(5a-b)^2}{(5a+b)(5a-b)} =$$

Hauptnenner

$$= \frac{(5a+b)^2 - 20ab - (5a-b)^2}{(5a-b)(5a+b)} = \frac{0}{(5a-b)(5a+b)} = 0$$



Die Brüche sind zu addieren. Die Ergebnisse sollen so weit wie möglich zusammengefasst und vereinfacht werden

a) $\dfrac{a}{x} - \dfrac{a}{x - y}$

b) $\dfrac{x}{x + y} + \dfrac{y}{x - y}$

c) $\dfrac{x}{y - x} + \dfrac{2x}{x + y} + \dfrac{y}{x - y}$

d) $\dfrac{1}{y + 1} + \dfrac{1}{y + 2} + \dfrac{1}{y + 3}$

e) $\dfrac{x - y}{x + y} + \dfrac{x + y}{x - y}$

f) $\dfrac{1 - x}{1 + x} - \dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{4x}{1 - x^2}$

a) $$\frac{a}{x} - \frac{a}{x-y} = -\frac{a\,y}{x\,(x-y)}$$

b) $$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

c) $$\frac{x}{y-x} + \frac{2\,x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{x-y}{x+y}$$

d) $$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y+3} = \frac{3\,y^2+12\,y+11}{(y+1)(y+2)(y+3)}$$

e) $$\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{2\,(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$$

f) $$\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} + \frac{4\,x}{1-x^2} = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} + \frac{4\,x}{(1-x)\,(1+x)} =$$

$$= \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} + \frac{4\,x}{(1-x)\,(1+x)} =$$

$$= \frac{(1-x)^2-(1+x)^2+4\,x}{(1-x)\,(1+x)} = 0$$