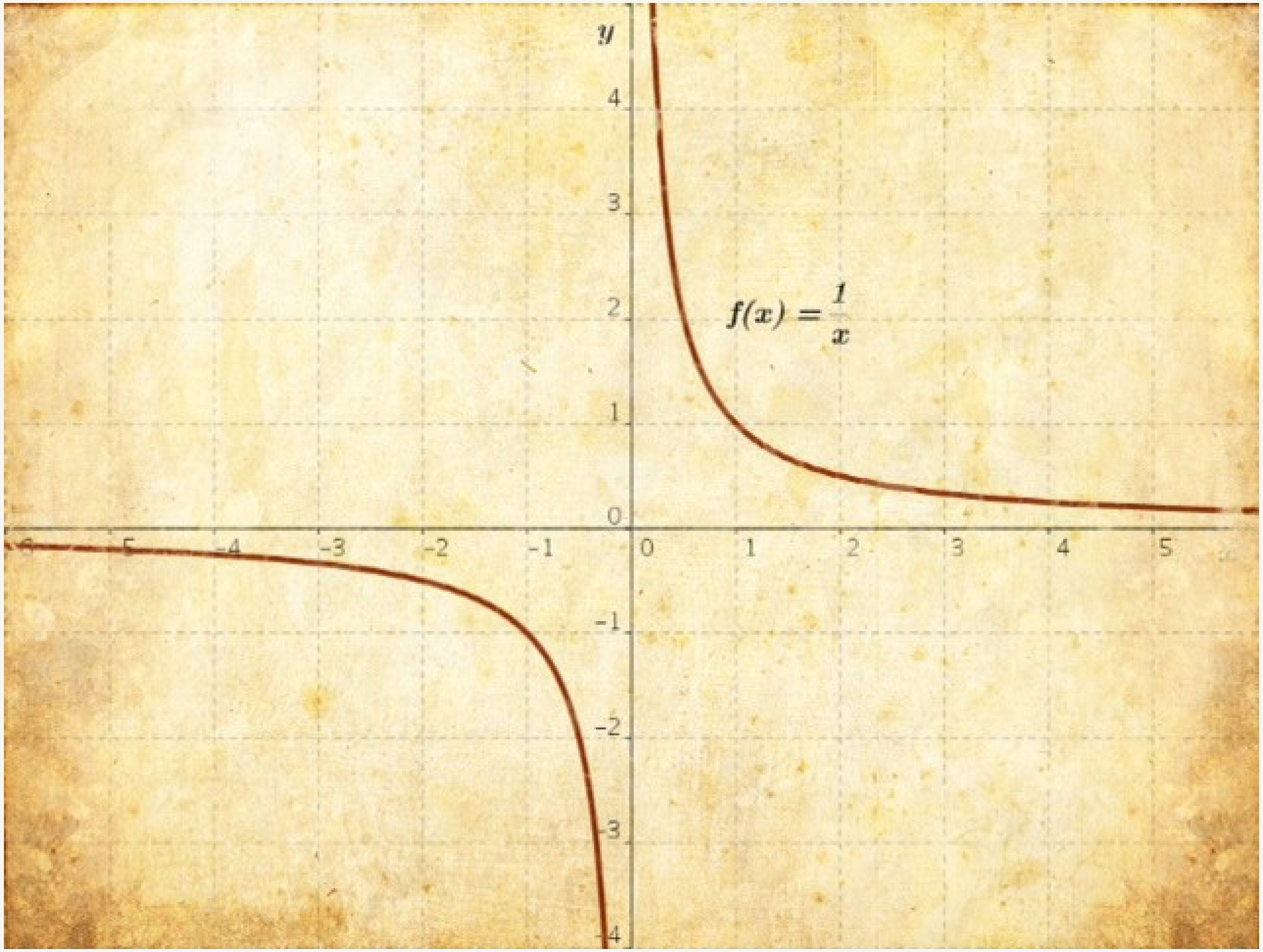
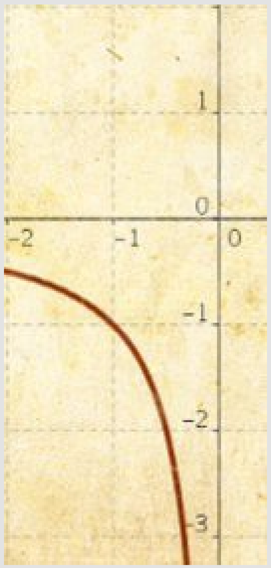



*Bruchgleichungen*




## Definition:

Eine Gleichung aus rationalen Funktionen, bei der die Variable mindestens einmal im Nenner vorkommt, nennt man Bruchgleichung.

Welche der folgenden Gleichungen sind Bruchgleichungen?

$$a)\quad \frac{2+x}{7} = 2$$

$$b)\quad \frac{2+x}{7+x} = 2$$

$$c)\quad \frac{1-x^2}{1-x} = 2x$$

$a)\quad \dfrac{2 + x}{7} = 2$ – Dies ist keine Bruchgleichung, denn die Variable kommt nur im Zähler vor.

$b)\quad \dfrac{2 + x}{7 + x} = 2$ – Dies ist eine Bruchgleichung.

$c)\quad \dfrac{1 - x^2}{1 - x} = 2\,x$ – Dies ist eine Bruchgleichung.

## Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Bruchgleichungen

$$a)\quad \frac{3}{x - 2} = 1$$

$$b)\quad x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$c)\quad \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

a ) $$\frac{3}{x-2} = 1, \qquad \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$$

$$\frac{3}{x-2} = 1 \quad | \quad \times \ (x-2)$$

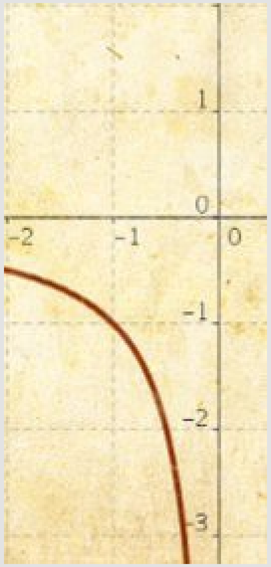
$$3 = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

b ) $$x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0, \qquad \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

Diese Bruchgleichung hat keine Lösung, weil $x = 0$ nicht zum Definitionsbereich der Gleichung gehört.

c ) $$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}, \qquad \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$$

Diese Bruchgleichung hat keine Lösung, weil $x = 1$ nicht zum Definitionsbereich der Gleichung gehört.




## Typische Aufgabenstellungen:

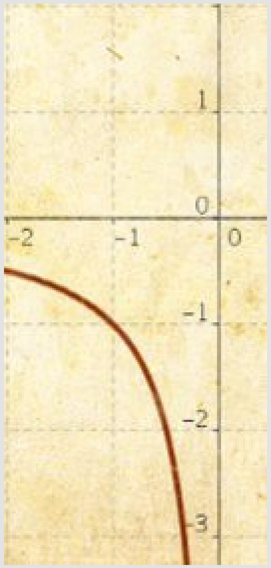
- Bestimmung des Definitionsbereiches einer Bruchgleichung
- Lösung einer Bruchgleichung und Ausschluss von Scheinlösungen

## Lösen von Bruchgleichungen:

Man multipliziert die Bruchgleichung zunächst mit dem Hauptnenner aller vorkommenden Brüche.
Die resultierende Gleichung, die keine Variable mehr im Nenner enthält, löst man je nach Typ mit den bekannten Verfahren.

Anschließend prüft man, ob die erhaltenen Lösungen der umgeformten Gleichung Nullstellen eines Nenners der Bruchgleichung sind. Ist dies der Fall, so ist der betreffende Wert keine Lösung der Bruchgleichung, gehört also nicht zur Lösungsmenge.

# Bruchgleichungen: Aufgaben 2-4




Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Bruchgleichungen

Aufgabe 2: $$x + \frac{2}{x} = 3$$

Aufgabe 3: $$\frac{x - 1}{x + 3} = \frac{2x}{2x - 1}$$

Aufgabe 4: $$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2x$$

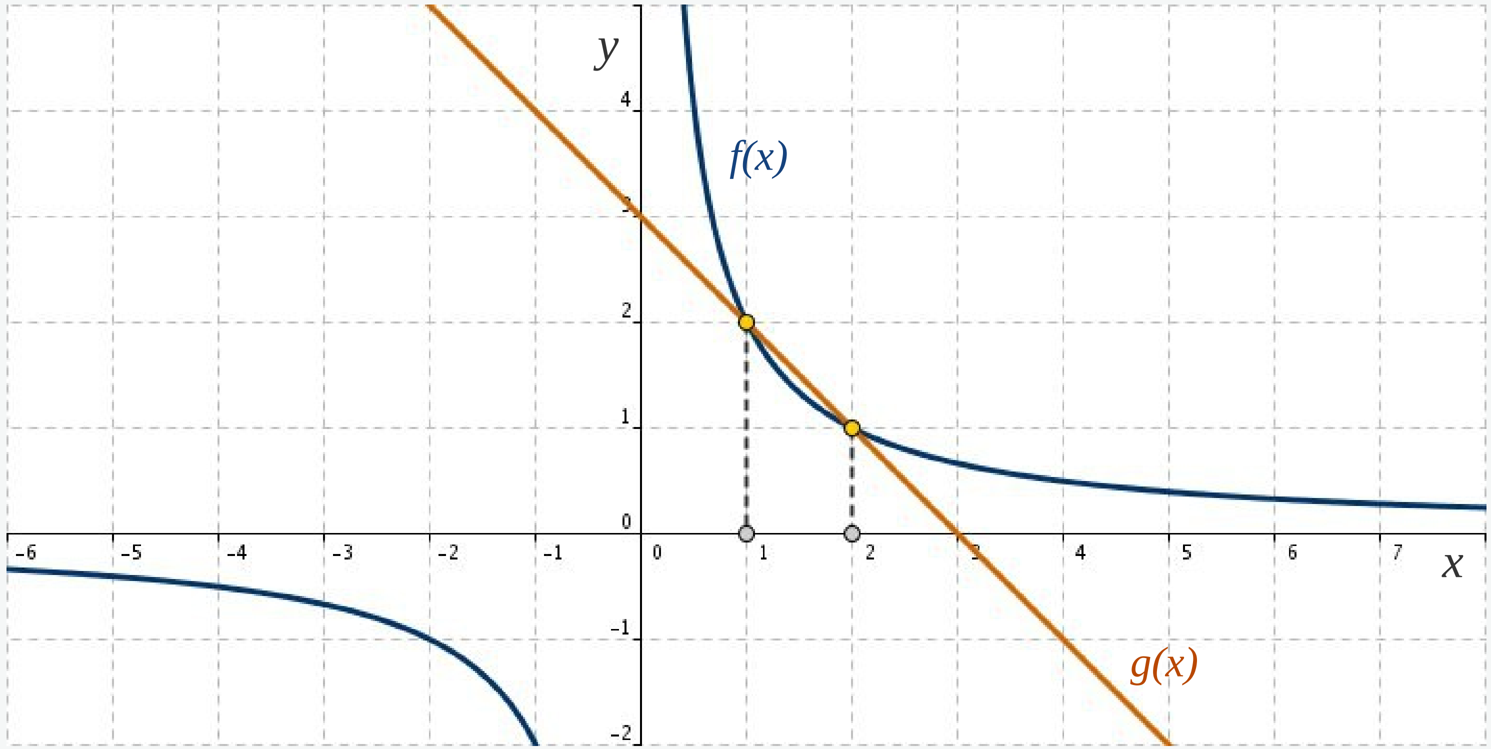



*Abb. 1: Funktionen f (x) = 2/x und g (x) = 3 - x*

$$\mathbb{R} \setminus \{ 0 \} : \quad x + \frac{2}{x} = 3 \quad | \quad ( \times \quad x )$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$\frac{x - 1}{x + 3} = \frac{2\,x}{2\,x - 1}\,, \qquad \mathbb{R} \setminus \left\{ -3,\ \frac{1}{2} \right\}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x + 3)\,(2\,x - 1)$

liefert die Gleichung

$$(x - 1)\,(2\,x - 1) = 2\,x\,(x + 3)$$

Ausmultiplizieren und Sortieren ergibt eine lineare Gleichung mit der Lösung

$$x = \frac{1}{9} \in D(G)$$

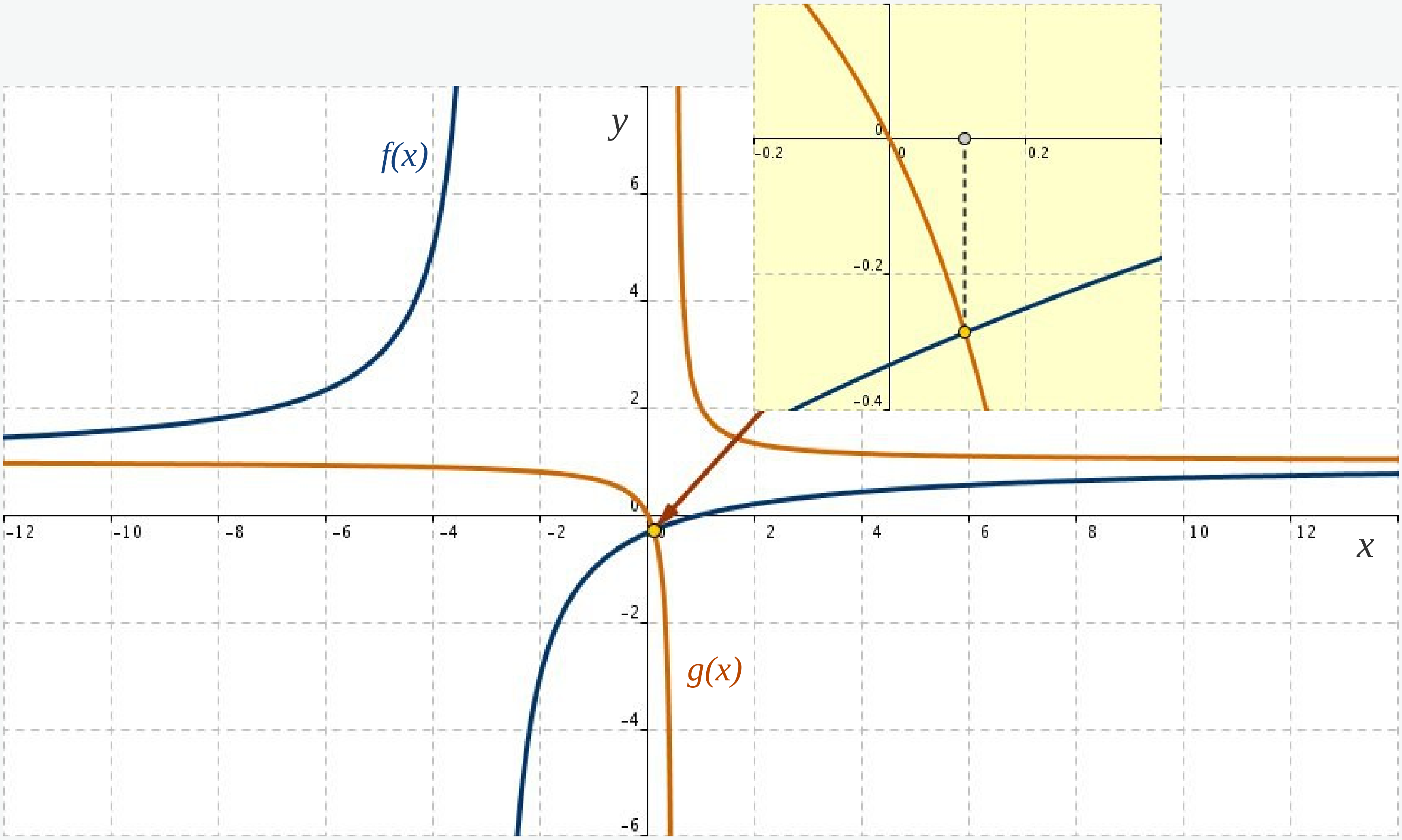



*Abb. 2: Funktionen f (x) und g (x)*

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}, \qquad g(x) = \frac{2x}{2x - 1}$$

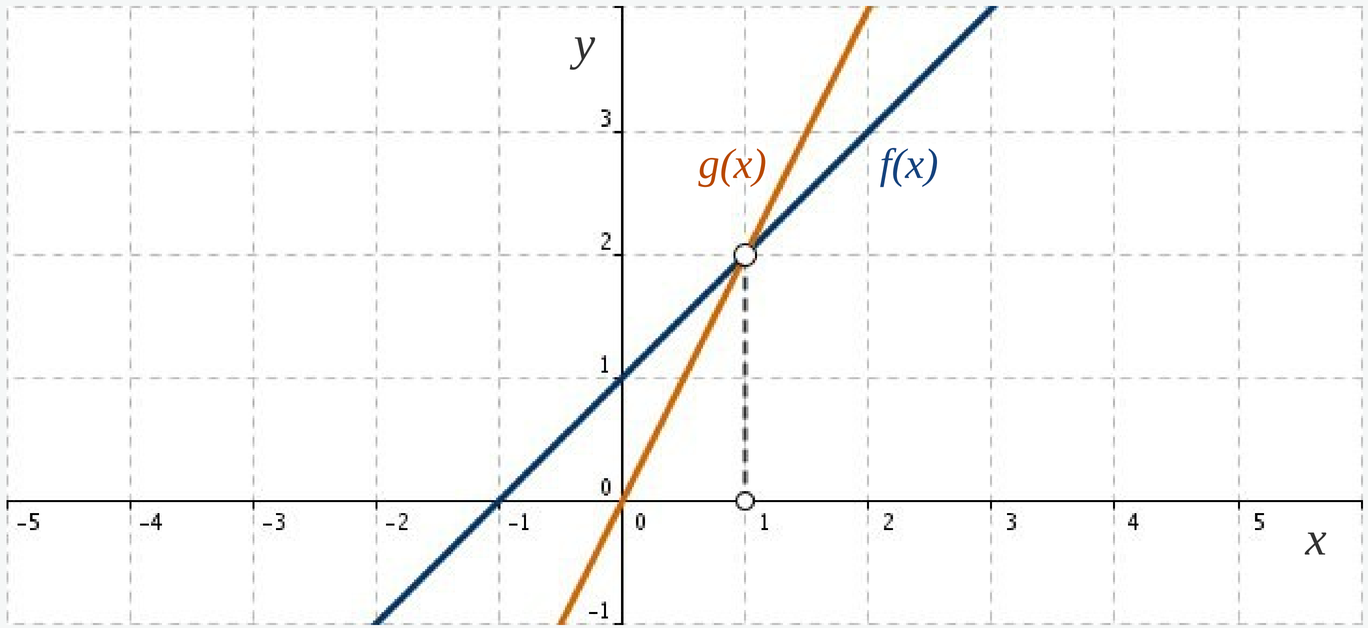


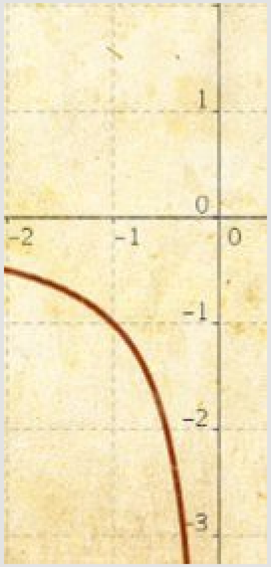

Abb. 3: Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$f(x) = x + 1 \quad (x = 1 \notin \mathbb{R}), \qquad g(x) = 2x$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2x, \qquad \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2x, \qquad x + 1 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Die Bruchgleichung hat keine Lösung, weil $x = 1$ nicht zum Definitionsbereich der Gleichung gehört.




Aufgabe 5: $$\frac{3}{x-2} + 5\left(x+1\right) = \frac{x+1}{x-2}$$

Aufgabe 6: $$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+2} = \frac{12}{x^2-4}$$

Aufgabe 7: $$\frac{12\,x}{x^2+x-6} - 2 = \frac{x+1}{x-2}$$

1. $G: \quad \dfrac{3}{x-2} + 5\,(x+1) = \dfrac{x+1}{x-2}$

2. Definitionsbereich der Gleichung $D(G) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

3. Lösen durch Multiplikation mit dem Term: $x - 2$

   Nichtäquivalente Unformung:

4. $\tilde{G}: \quad 3 + 5(x+1)(x-2) = x + 1$

5. $D(\tilde{G}) = \mathbb{R}, \quad D(G) \neq D(\tilde{G}), \quad D(G) \subset D(\tilde{G})$

6. $5x^2 - 6x - 8 = 0$ (nach der äquivalenten Unformung)

7. Lösung einer quadratischen Gleichung $a x^2 + b x + c = 0$

   $x_1 = 2, \quad x_2 = -\dfrac{4}{5} \qquad L(\tilde{G}) = \left\{ -\dfrac{4}{5},\, 2 \right\}$

8. Prüfen, ob $L(\tilde{G}) = \left\{ -\dfrac{4}{5},\, 2 \right\} \in D(G) \qquad 2 \notin D(G)$

9. $L(G) = \left\{ -\dfrac{4}{5} \right\}$

1. $G: \quad \dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{12}{x^2-4} \quad \Leftrightarrow$

   $$\dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{12}{(x-2)(x+2)}$$

2. Definitionsbereich $\quad D(G) = \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 2\}$

3. Hauptnenner $\quad (x-2)(x+2)$

4. Lösen durch Multiplikation mit dem Hauptnenner

   Nichtäquivalente Unformung

   $\tilde{G}: \quad (x+1)(x+2) - (x-3)(x-2) = 12 \quad \Leftrightarrow$

   $8x - 4 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

5. $x = 2 \notin D(G)$

   Die Gleichung besitzt keine Lösung

1. $G: \quad \dfrac{12\,x}{x^2 + x - 6} - 2 = \dfrac{x+1}{x-2}$

2. Definitionsbereich der Gleichung

$$x^2 + x - 6 = (x+3)\,(x-2) \neq 0$$

$$\frac{12\,x}{x^2 + x - 6} - 2 = \frac{x+1}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12\,x}{(x+3)(x-2)} - 2 = \frac{x+1}{x-2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3,\ 2\}$$

3. Lösen durch Multiplikation mit dem Term: $(x+3)\,(x-2)$

$$12\,x - 2\,(x^2 + x - 6) = (x+1)\,(x+3) \quad \Leftrightarrow$$

$$3\,x^2 - 6\,x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2\,x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2, \qquad x_1 = 3, \quad x_2 = -1$$

4. Probe – nichtäquivalente Umformung!

$$x_1: \quad \frac{36}{6} - 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 4\,, \qquad x_2: \quad \frac{-12}{-6} - 2 = \frac{0}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

5. Die Lösungsmenge $L = \{-1,\ 3\}$