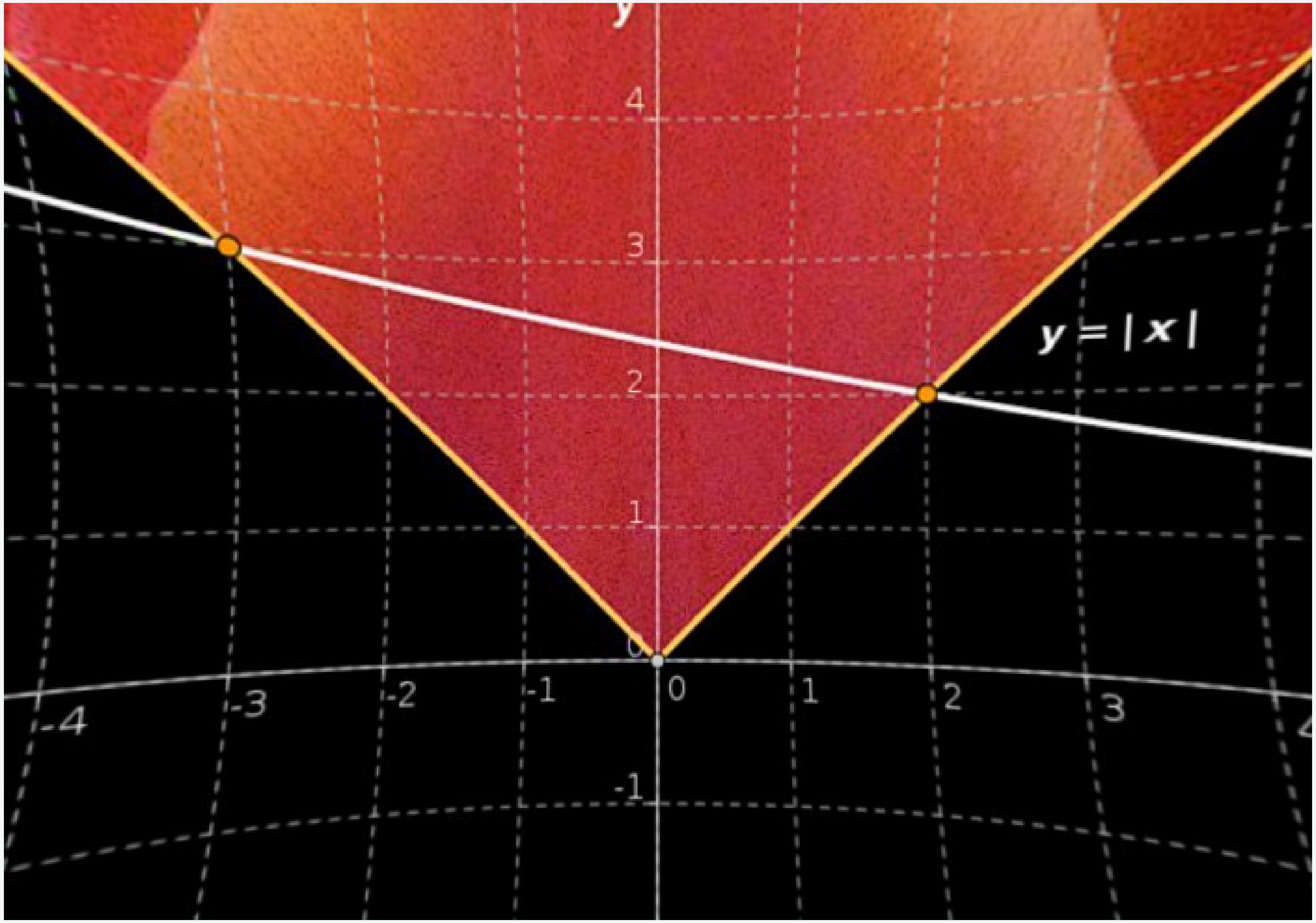


Lineare Gleichungen mit absoluten Beträgen

Gleichungen, bei denen von der Variablen direkt oder indirekt der absolute Betrag angegeben ist, sind weder der Gruppe der algebraischen Gleichungen noch der Gruppe der transzendenten Gleichungen zuzuordnen.

$$|x| = a \quad \begin{cases} a > 0, & x_1 = a, \quad x_2 = -a \\ a = 0, & x = 0 \\ a < 0 & \text{keine Lösung} \end{cases}$$

Wir betrachten als lineare Gleichungen mit absoluten Beträgen die Gleichungen des Typs

$$|a x + b| = c$$

Beim Lösen sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1 Fall: $a x + b = c$

2 Fall: $a x + b = - c$

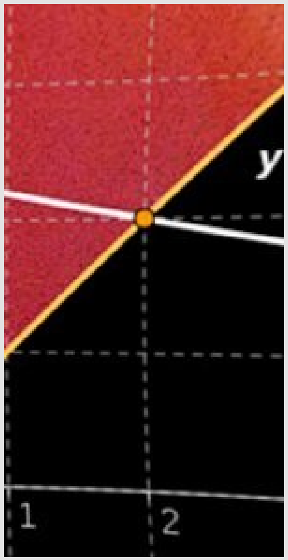
1 Fall: $a\,x + b = c\,, \qquad c > 0, \qquad x = \dfrac{c - b}{a}$

2 Fall: $a\,x + b = -\,c\,, \qquad c > 0, \qquad x = -\,\dfrac{b + c}{a}$

Es ist zu betonen, dass die Gleichung $|\,a\,x + b\,| = c$

nur dann eine Lösung hat, wenn die Konstante c größer als Null ist.

Betragsfunktion: Aufgaben 1-7



Bestimmen Sie die Lösungen folgender Betragsgleichungen

Aufgabe 1: $|2x + 3| = 4$

Aufgabe 2: $|3x - 2| = -x + 6$

Aufgabe 3: $|x + 1| = 2$

Aufgabe 4: $|x + 1| = x$

Aufgabe 5: $|x + 1| = -x$

Aufgabe 6: $2|x - 1| = |x + 4|$

Aufgabe 7: $|x - 1| = |x + 3|$

Wir bestimmen die Lösung folgender linearen Betragsgleichung

$$|2x + 3| = 4$$

<u>1. Fall:</u> $2x + 3 \geqslant 0, \qquad x \geqslant -\frac{3}{2}$

$$|2x + 3| = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 \in [-\frac{3}{2}, \infty)$$

<u>2. Fall:</u> $2x + 3 < 0, \qquad x < -\frac{3}{2}$

$$|2x + 3| = 4 \quad \Rightarrow \quad -2x - 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad -2x = 7 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_2 \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

$$L_G = \left\{-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

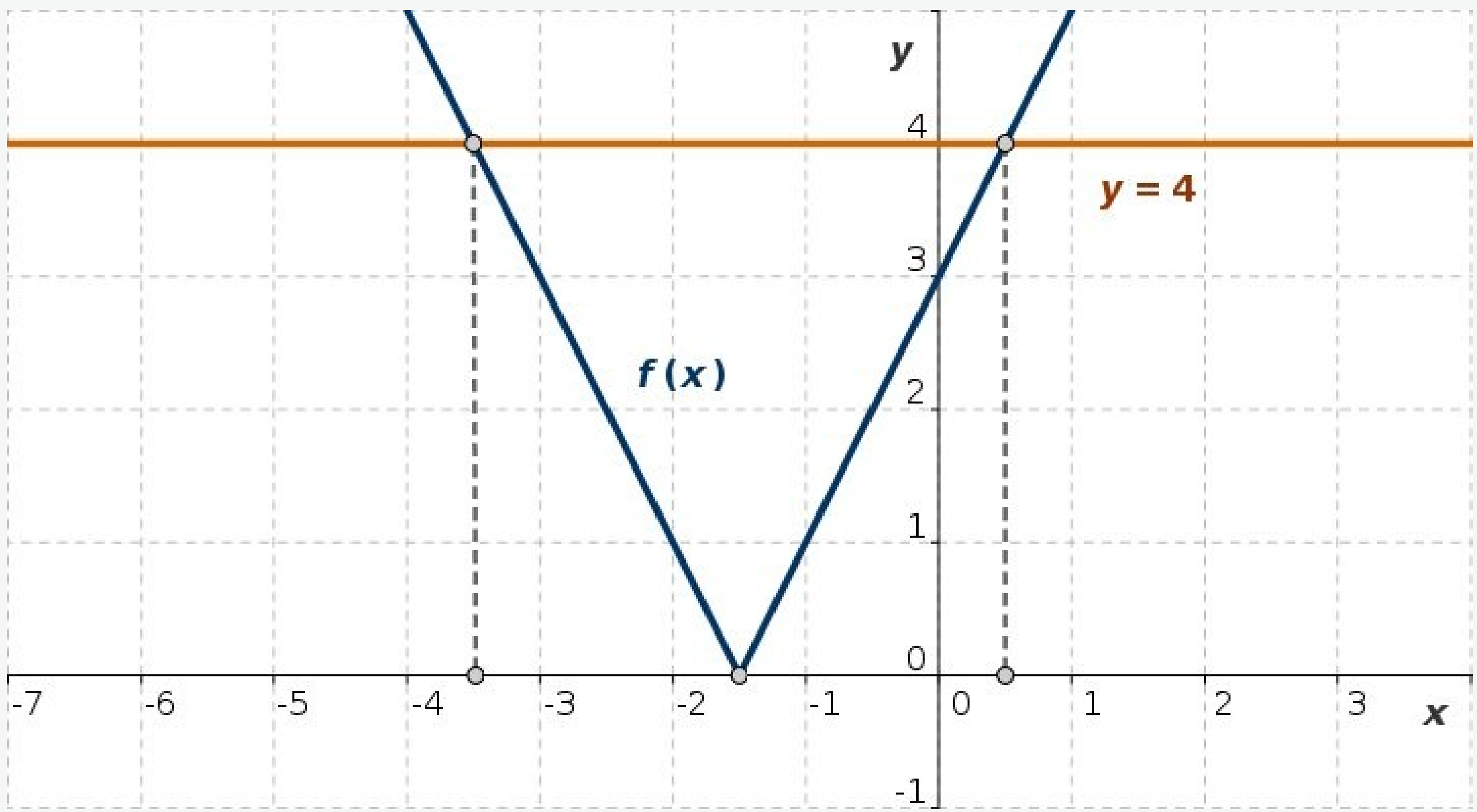


Abb. L1: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung $| 2x + 3 | = 4$; $f(x) = | 2x + 3 |$

Wir bestimmen die Lösung folgender linearen Betragsgleichung

$$|3x - 2| = -x + 6$$

1. Fall:

$$3x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{2}{3}$$

$$|3x - 2| \quad \rightarrow \quad 3x - 2$$

$$3x - 2 = -x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \qquad x_1 \in [\frac{2}{3}, \infty)$$

2. Fall:

$$3x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}$$

$$|3x - 2| \quad \rightarrow \quad -3x + 2$$

$$-3x + 2 = -x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \qquad x_2 \in (-\infty, \frac{2}{3})$$

$$L_G = \{-2, 2\}$$

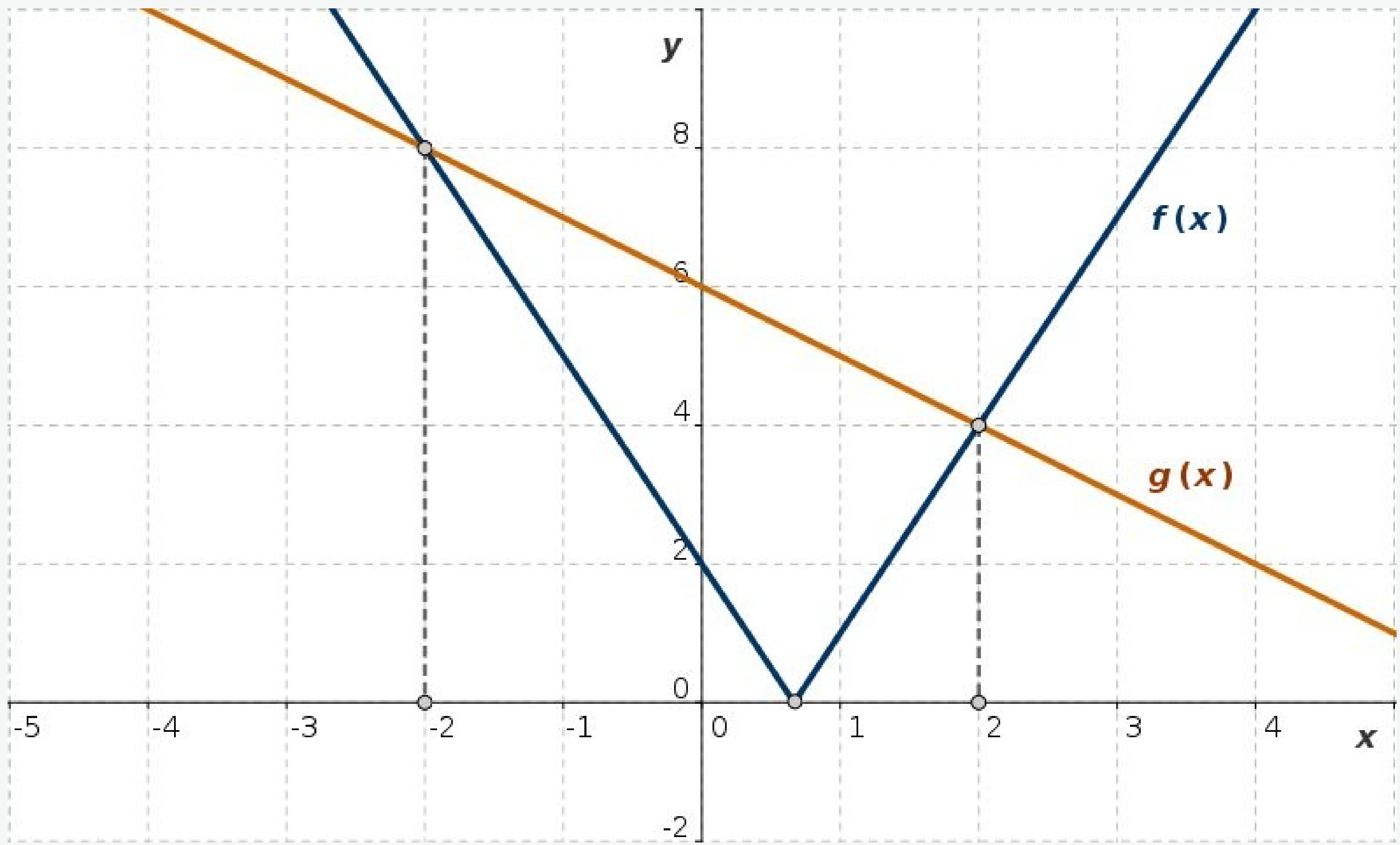


Abb. L2: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung | 3 x - 2 | = 6 - x

$$f\,(x) = |\,3\,x - 2\,|\,, \qquad g\,(x) = -\,x + 6$$

$$|x + 1| = 2$$

<u>1. Fall:</u> $x + 1 \geqslant 0$

$$|x + 1| = 2 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

<u>2. Fall:</u> $x + 1 < 0$

$$|x + 1| = 2 \quad \Rightarrow \quad -x - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad -x = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3$$

$$L_G = \{-3, 1\}$$

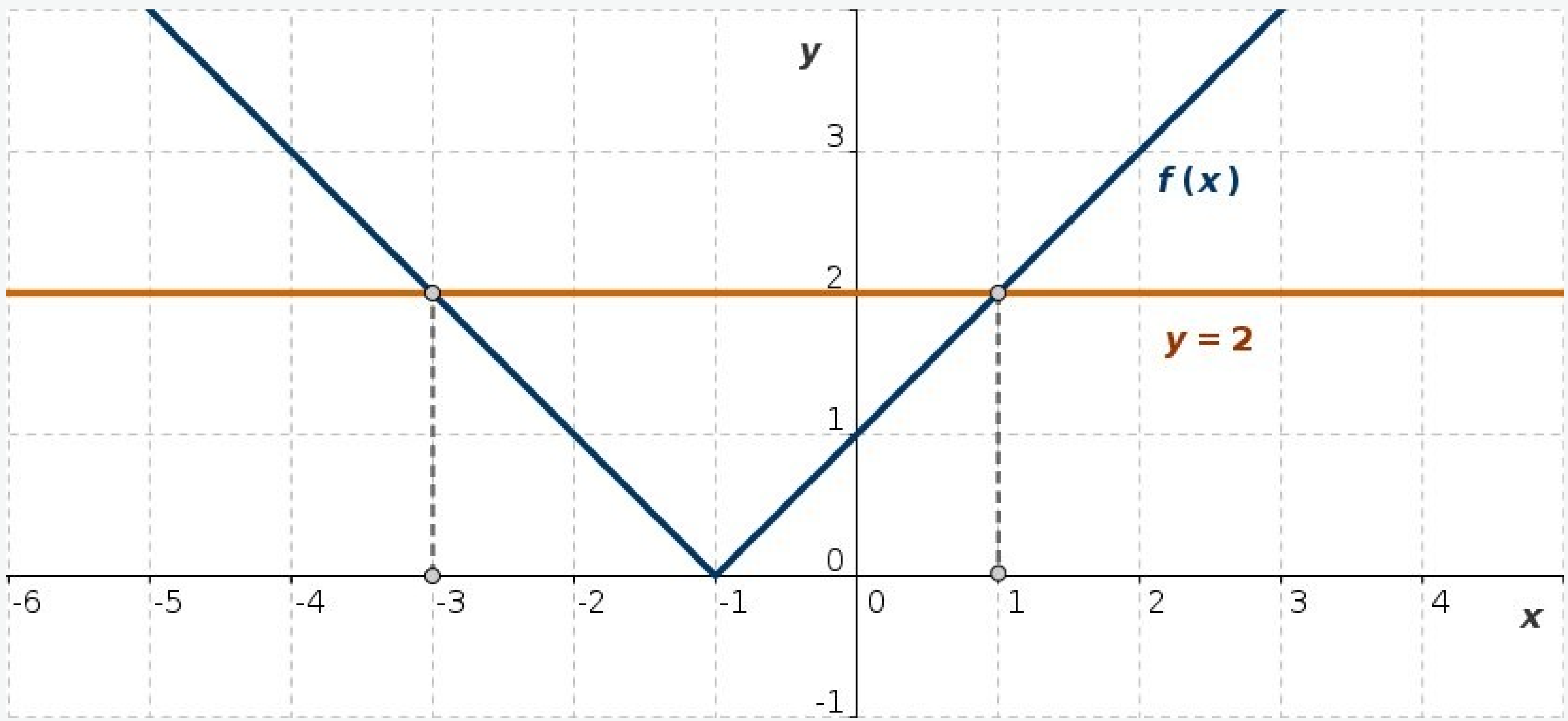


Abb. L3: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung $| x + 1 | = 2$

$$f(x) = | x + 1 |$$

$$|x + 1| = x$$

1. Fall:

$x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1$

$|x + 1| = x \quad \Rightarrow \quad x + 1 = x \quad \Rightarrow \quad 1 = 0$

falsche Aussage

2. Fall:

$x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$

$-(x + 1) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -1, \quad x_2 = -0.5, \quad x_2 \notin (-\infty, -1)$

$$L = \{ \emptyset \}$$

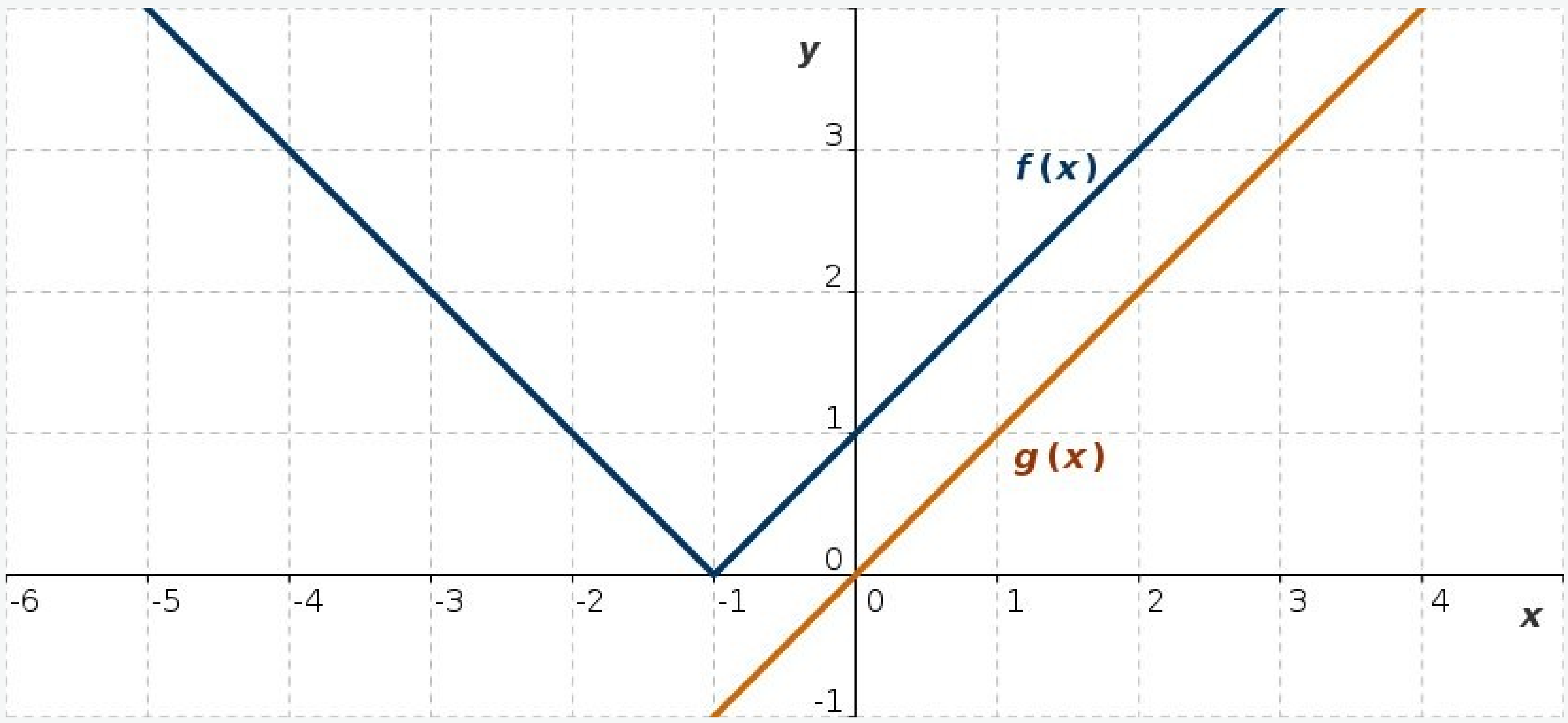


Abb. L4: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung $|x + 1| = x$

$$f(x) = |x + 1|, \qquad g(x) = x$$

$$|x + 1| = -x$$

1. Fall:

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1$$

$$|x + 1| = -x \quad \Rightarrow \quad x + 1 = -x \quad \Rightarrow \quad 1 = -2x, \quad x = -\frac{1}{2}$$

2. Fall:

$$x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$$

$$-(x + 1) = -x \quad \Leftrightarrow \quad -x - 1 = -x, \quad -1 = 0 \quad \text{falsche Aussage}$$

$$L = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

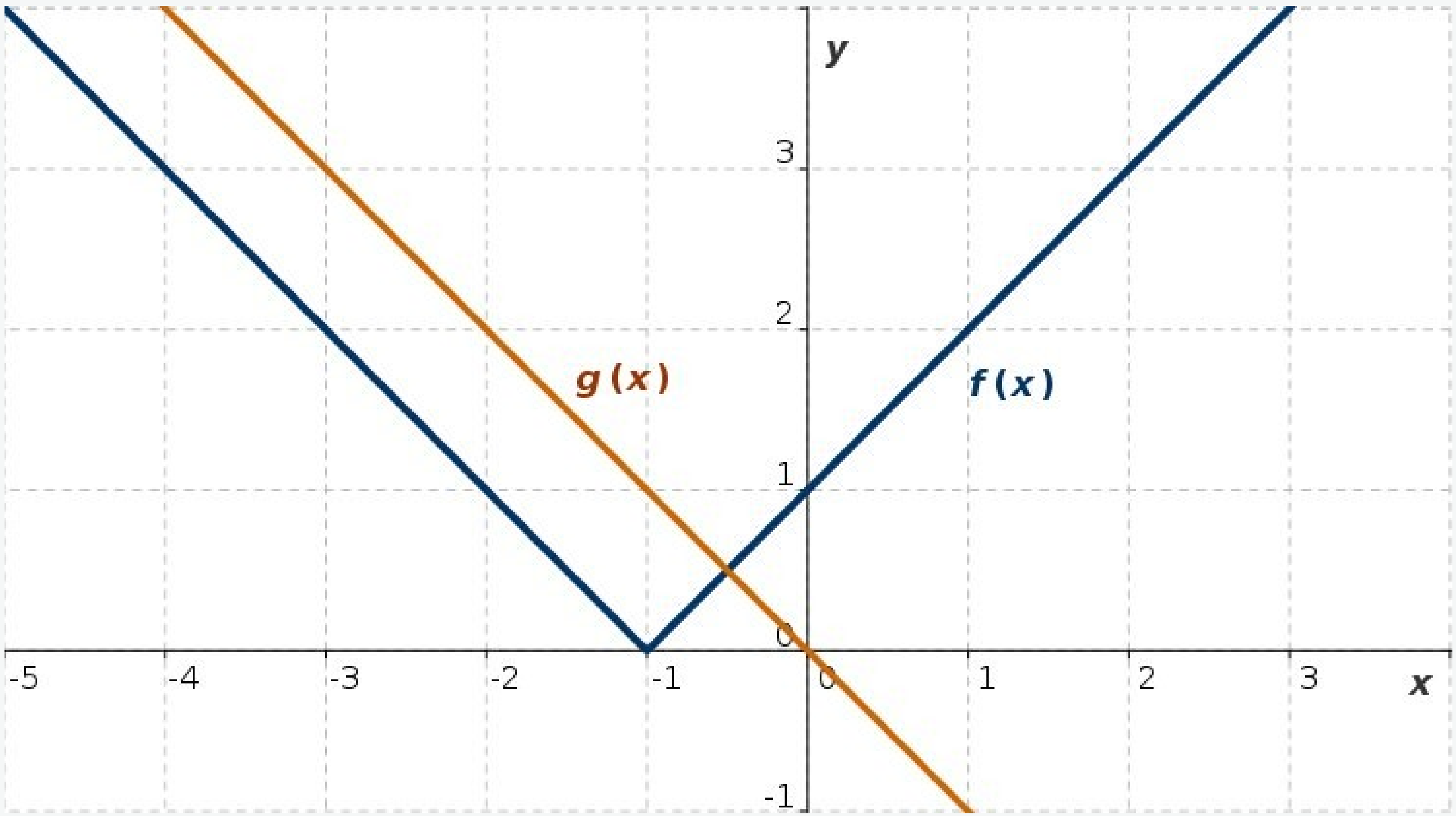


Abb. L5: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung $| x + 1 | = - x$

$$f(x) = | x + 1 |, \qquad g(x) = -x$$

$$2\,|\,x - 1\,| = |\,x + 4\,|$$

Zum Lösen der Gleichung werden die in der Gleichung auftretende Beträge in betragsfreie Ausdrücke umgeformt:

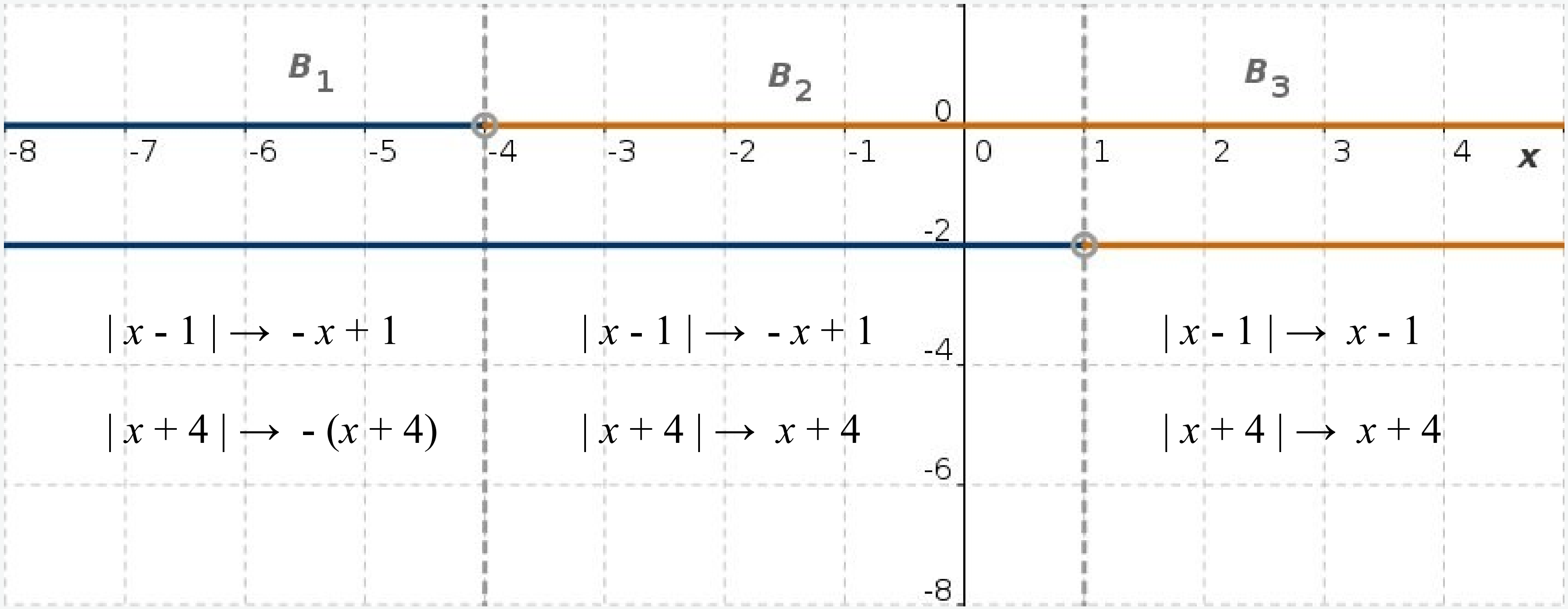
$$|\,x - 1\,| = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

$$|\,x + 4\,| = \begin{cases} x + 4, & x \geqslant -4 \\ -(x + 4), & x < -4 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, dass der Definitionsbereich der Gleichung in drei Teilbereiche zu untergliedern ist:

$$1\text{B} \quad : x < -4\,, \qquad 2\text{B} \quad : -4 \leqslant x < 1\,, \qquad 3\text{B} \quad : x \geqslant 1$$

Lineare Betragsgleichungen: Lösung 6



Für diese Teilbereiche erhält man dann folgende Gleichungen:

1B. $\quad x < -4: \qquad -2\,(x-1) = -(x+4) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6$

2B. $\quad -4 \leqslant x < 1: \qquad -2\,(x-1) = x+4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\dfrac{2}{3}$

3B. $\quad x \geqslant 1: \qquad 2\,(x-1) = x+4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 6$

$$L = \left\{ -\frac{2}{3}, \ 6 \right\}$$

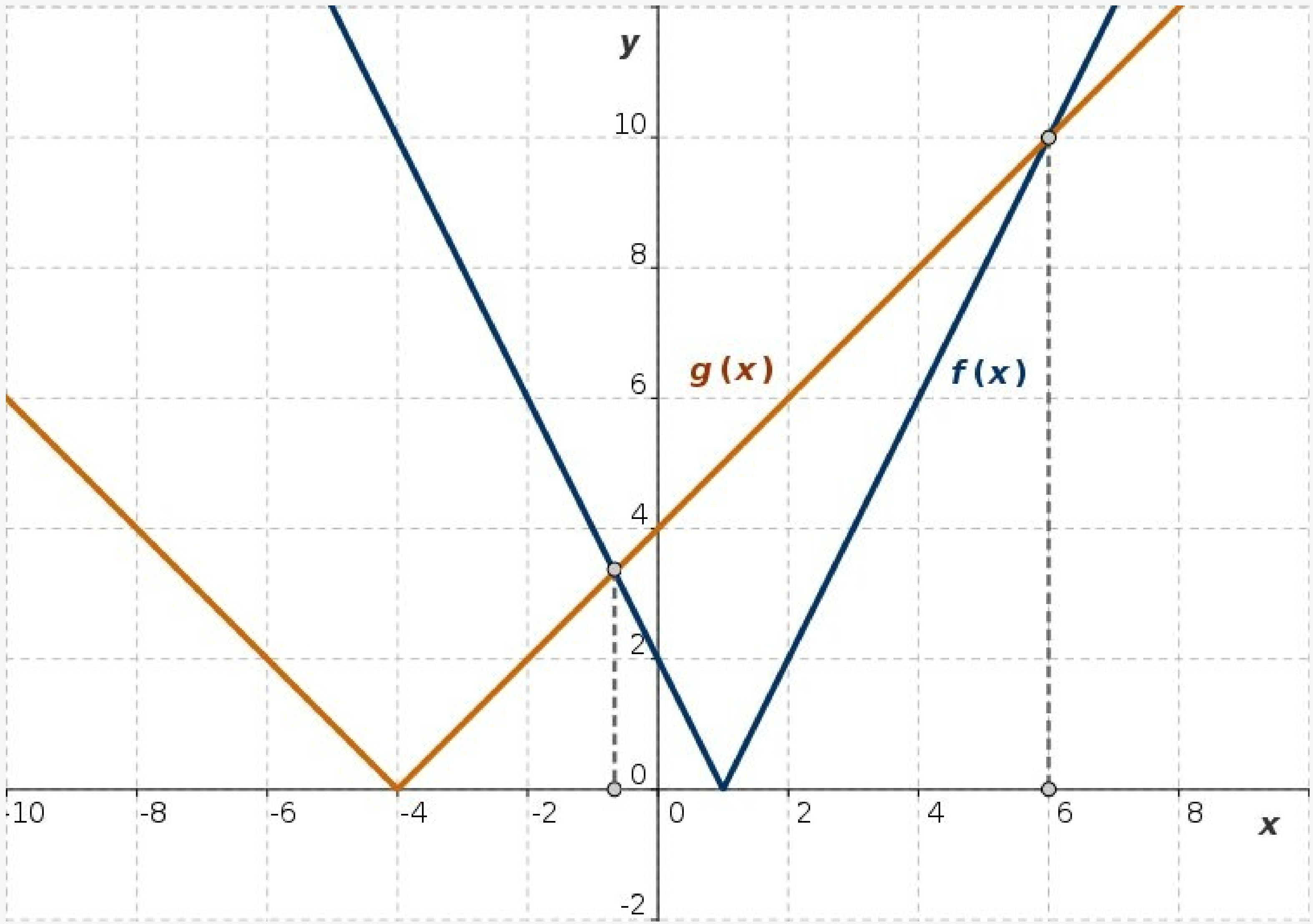


Abb. L6: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung 2 | x - 1 | = | x + 4 |

$$f(x) = 2\,|\,x - 1\,|, \qquad g(x) = |\,x + 4\,|$$

$$|x - 1| = |x + 3|$$

Zum Lösen der Gleichung werden die in der Gleichung auftretend Beträge in betragsfreie Ausdrücke umgeformt:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3, & x \geqslant -3 \\ -(x + 3), & x < -3 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, dass der Definitionsbereich der Gleichung in drei Teilbereiche zu untergliedern ist:

$$1\text{B} \quad : x < -3\,, \qquad 2\text{B} \quad : -3 \leqslant x < 1\,, \qquad 3\text{B} \quad : x \geqslant 1$$

1B. $x < -3: \quad -(x-1) = -(x+3) \quad \Rightarrow \quad 1 = -3 \quad L_1 = \{ \emptyset \}$

2B. $-3 \leqslant x < 1: \quad -(x-1) = x+3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad L_2 = \{ -1 \}$

3B. $x \geqslant 1: \quad x - 1 = x + 3 \quad \Rightarrow \quad -1 = 3 \quad L_3 = \{ \emptyset \}$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{ -1 \}$$

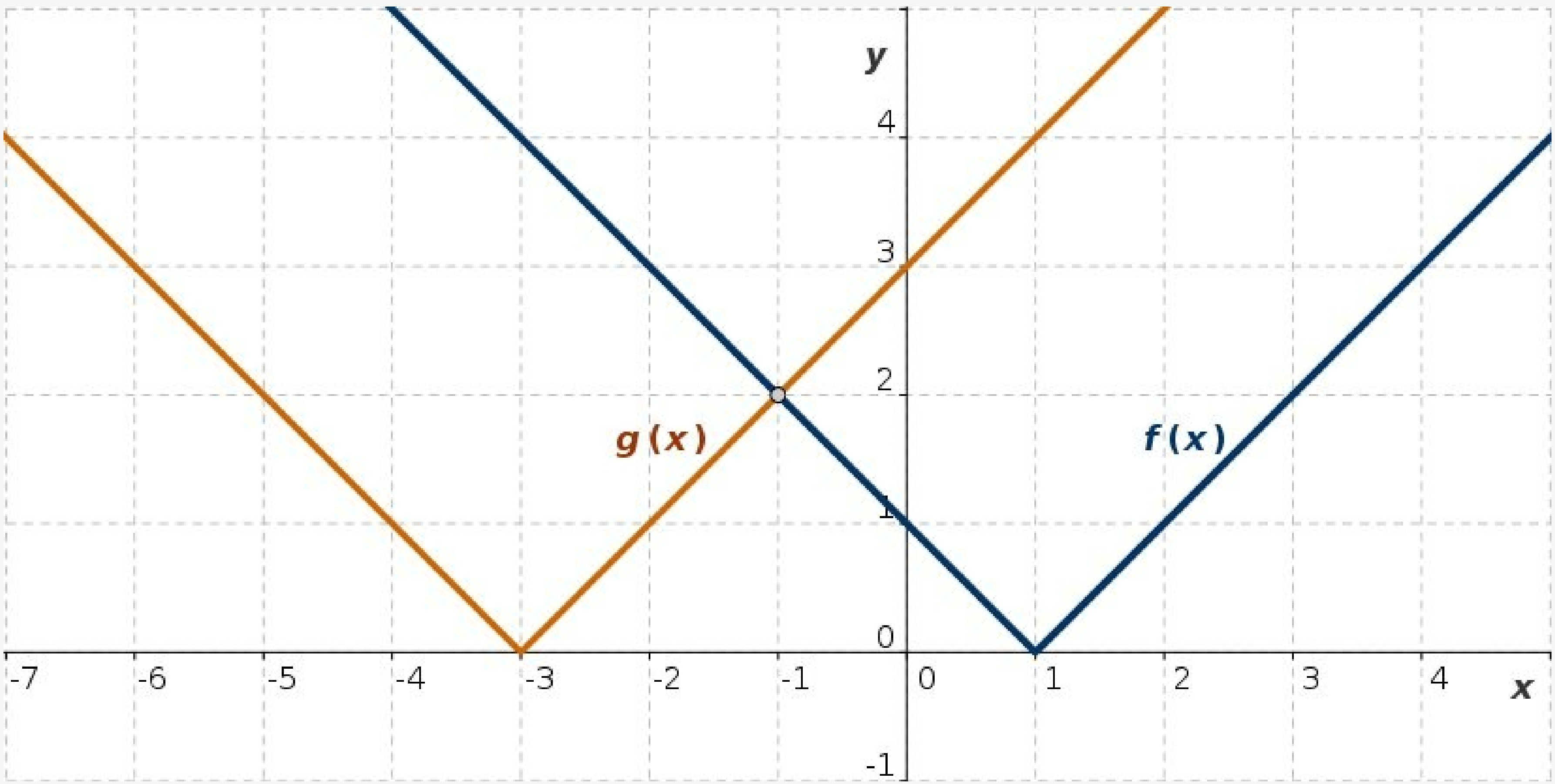


Abb. L7: Zur graphischen Lösung der Betragsgleichung | x - 1 | = | x + 3|

$$f(x) = |\, x - 1 \,|, \qquad g(x) = |\, x + 3 \,|$$