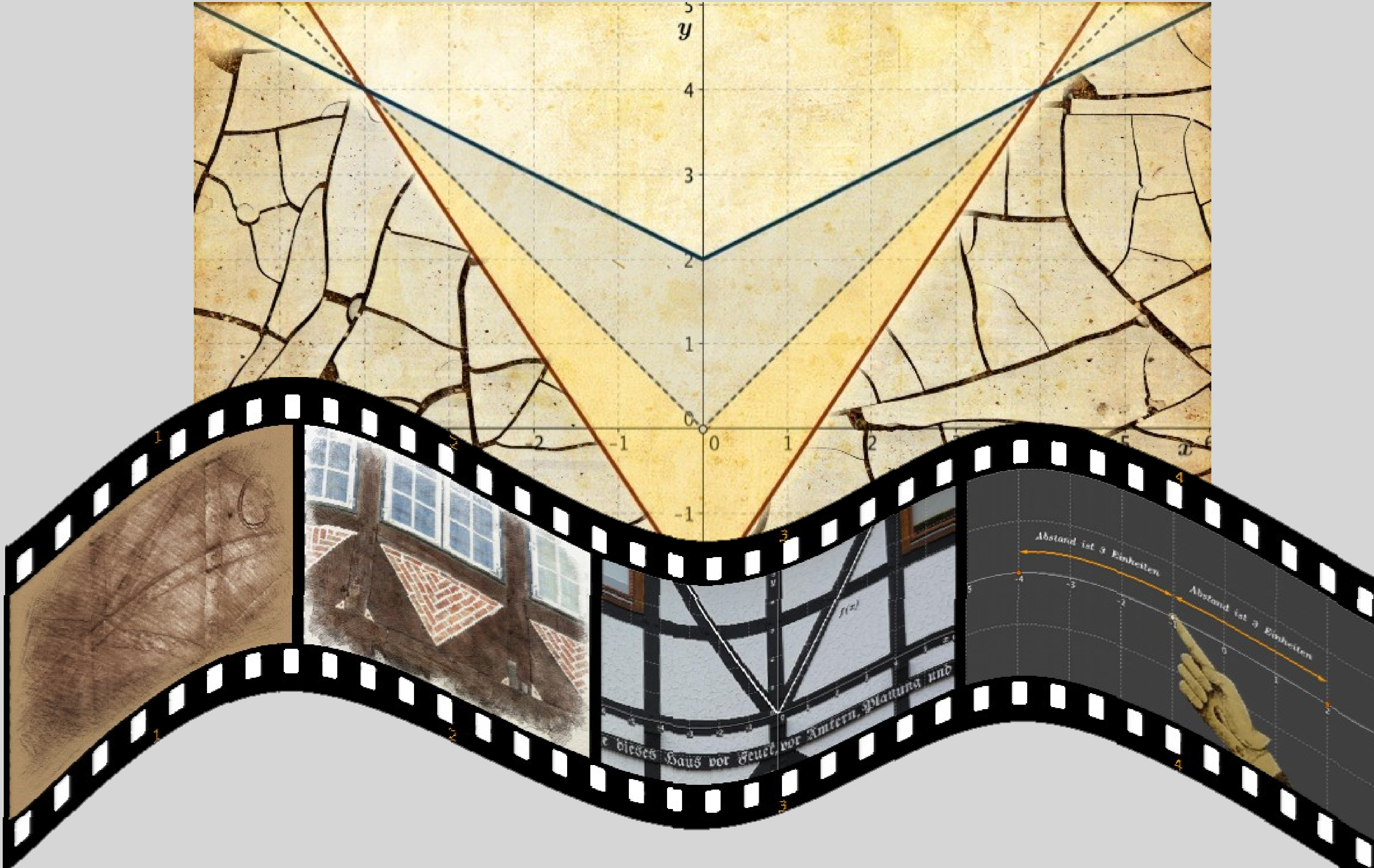
Celle

Betragsfunktion


Abstand ist 3 Einheiten
Abstand ist 3 Einheiten

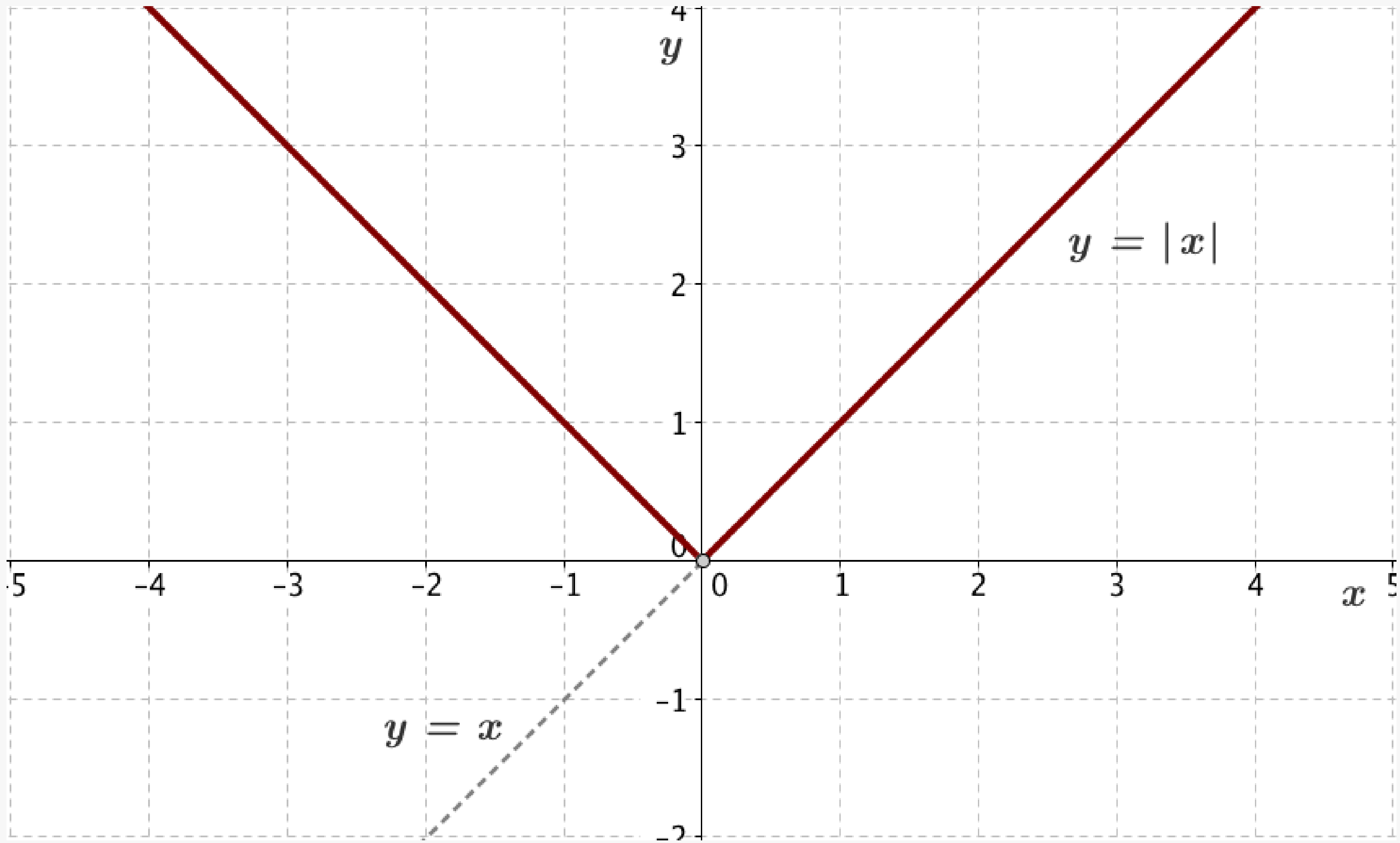


Abb. 1: Graph der Betragsfunktion $y = |x|$

Die Abb. 3-1 zeigt die Betragsfunktion $y = |x|$. Beschreiben Sie die Eigenschaften dieser Funktion: Definitionsbereich, Wertebereich, Monotonie, Schnittpunkte mit den x- und y-Achsen, Symmetrieachsen, Asymptoten, maximale und minimale Funktionswerte.

Die Betragsfunktion $y = |x|$

- ist für alle reelle Zahlen definiert: $D = \mathbb{R}$
- hat nur positive Funktionswerte: $W = [0, \infty)$
- ist monoton fallend für negative x und monoton wachsend für positive x,
- hat einen Schnittpunkt $(0, 0)$ mit der x-Achse, der auch Schnittpunkt mit der y-Achse ist,
- hat die y-Achse als vertikale Symmetrieachse und keine Asymptote,
- hat einen minimalen Funktionswert bei $x = 0$ und keinen maximalen Funktionswert. Diese Funktion ist von unten beschränkt.

Bemerkung zur graphischen Darstellung der Betragsfunktion $y = |x|$.

Das Schaubild der Betragsfunktion $y = |x|$ erhält man aus der Geraden $y = x$, indem man den unterhalb der x-Achse liegenden Teil der Geraden an der x-Achse spiegelt.

Aufgabe 2:

$a)$ Zeichnen Sie folgende Betragsfunktionen

$$f(x) = |x| - 1, \qquad g(x) = |x| + 2$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich dieser Funktionen.

$b)$ Wie wirkt sich der reelle Parameter a auf die Eigenschaften der Funktion $y = |x| + a$ aus?

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Wertebereiche folgender Betragsfunktionen:

$a)$ $f(x) = |x| - 2, \qquad D = [-3, 5],$

$b)$ $f(x) = |x| - 3, \qquad D = [-4, 4],$

$c)$ $f(x) = |x| - 2, \qquad D = [1, 4],$

$d)$ $f(x) = |x| - 1, \qquad D = [-4, 0].$

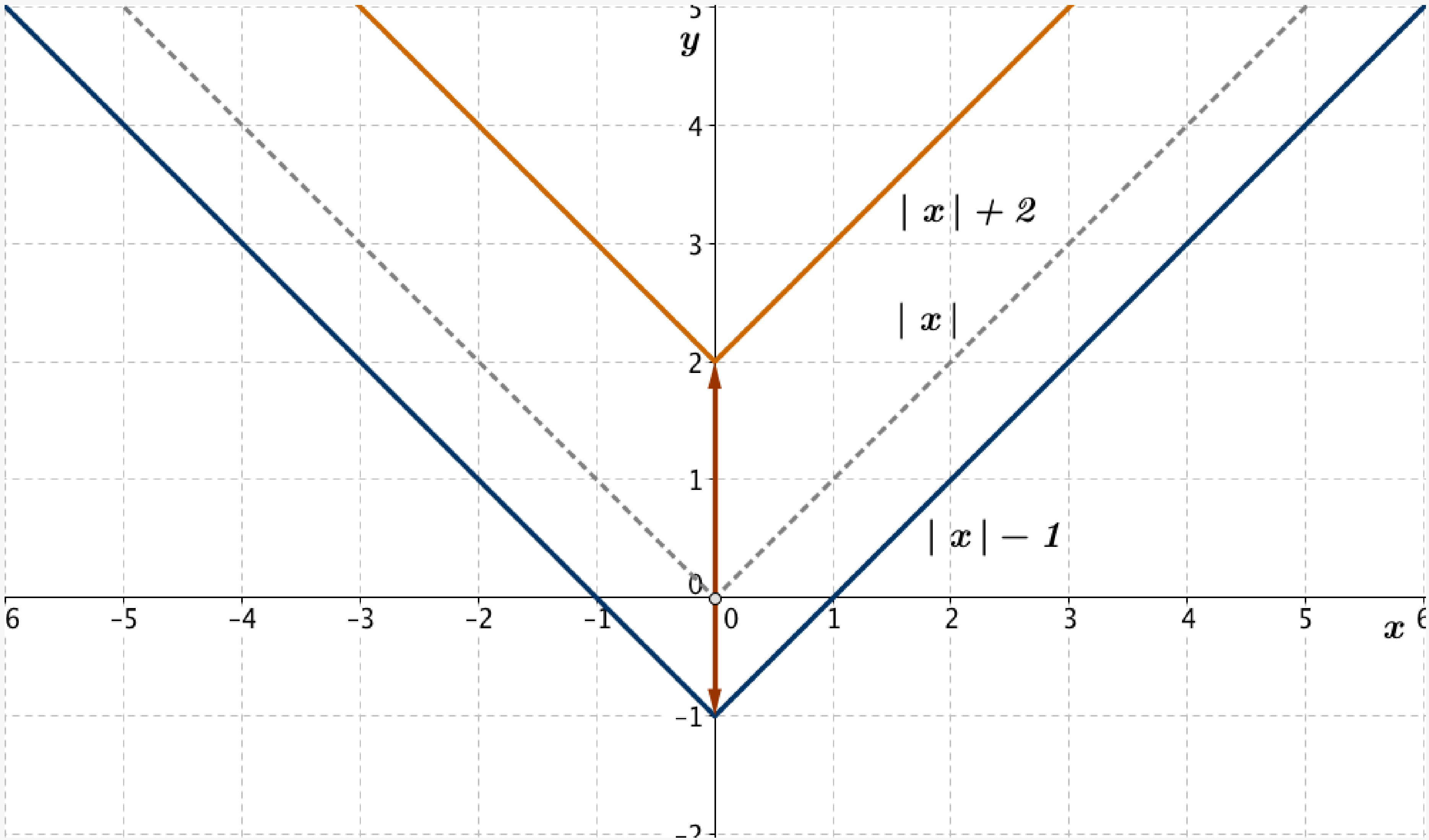


Abb. L-2a: Graph der Betragsfunktionen $y = |x|$ (grau), $y = |x| - 1$ (blau) und $y = |x| + 2$ (rot)

$$f(x) = |x| - 1, \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad W_f = [-1, \infty)$$

$$g(x) = |x| + 2, \qquad D_g = \mathbb{R}, \qquad W_g = [2, \infty)$$

Wie wirkt sich der reelle Parameter a auf die Eigenschaften der Funktion $y = |\, x \,| + a$ aus?

Die Betragsfunktion $y = |\, x \,| + a$

- ist für alle reelle Zahlen definiert: $D = \mathbb{R}$
- hat den Wertebereich: $W = [\, a \,,\ \infty \,)$
- ist monoton fallend für negative x und monoton wachsend für positive x,
- hat einen Schnittpunkt $(0, a)$ mit der y-Achse,
- hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, wenn a positiv ist, und zwei Schnittpunkte $(-a, 0)$ und $(a, 0)$, wenn a negativ ist,
- hat die y-Achse als vertikale Symmetrieachse und keine Asymptote,
- hat den minimalen Funktionswert a bei $x = 0$ und keinen maximalen Funktionswert. Diese Funktion ist von unten beschränkt.

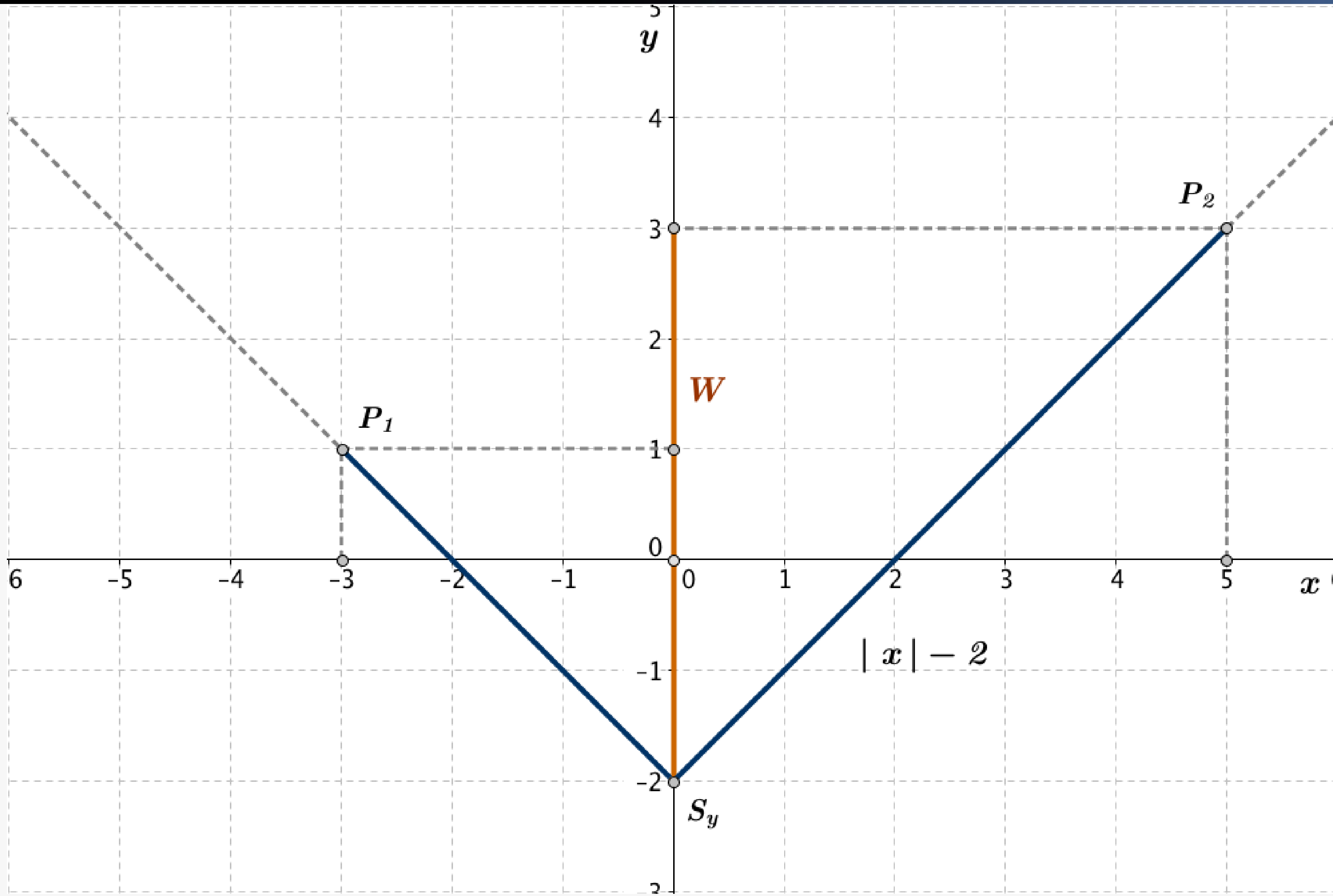


Abb. L-3a: Graph der Betragsfunktion y = | x | - 2 mit Definitionsbereich [-3, 5]

$$f\,(x) = |\,x\,| - 2, \qquad D = [-3,\,5], \qquad W = [-2,\,3]$$

Die Betragsfunktion $y = |x| - 2$ ist im abgeschlossenen Intervall von -3 bis 5 definiert. Wir bestimmen zuerst die Funktionswerte in den Randstellen -3 und 5.

$$D = [-3,\ 5]$$

$$f(-3) = |-3| - 2 = 3 - 2 = 1,$$

$$f(5) = |5| - 2 = 5 - 2 = 3 = f_{max}.$$

Die Punkte $P_1 = (-3,\ 1)$, $P_2 = (5,\ 3)$ sind die Randpunkte der Betragsfunktion $y = |x| - 2$. Aber nur die Randstelle $x = 5$ entspricht dem maximalen Funktionswert. Der Minimalwert der Funktion ist bei $x = 0$:

$$f(0) = |0| - 2 = -2 = f_{min}.$$

Der Wertebereich der Funktion $y = |x| - 2$ im Intervall $x = [-3,\ 5]$ ist das Intervall:

$$W = [f_{min},\ f_{max}] = [-2,\ 3]$$

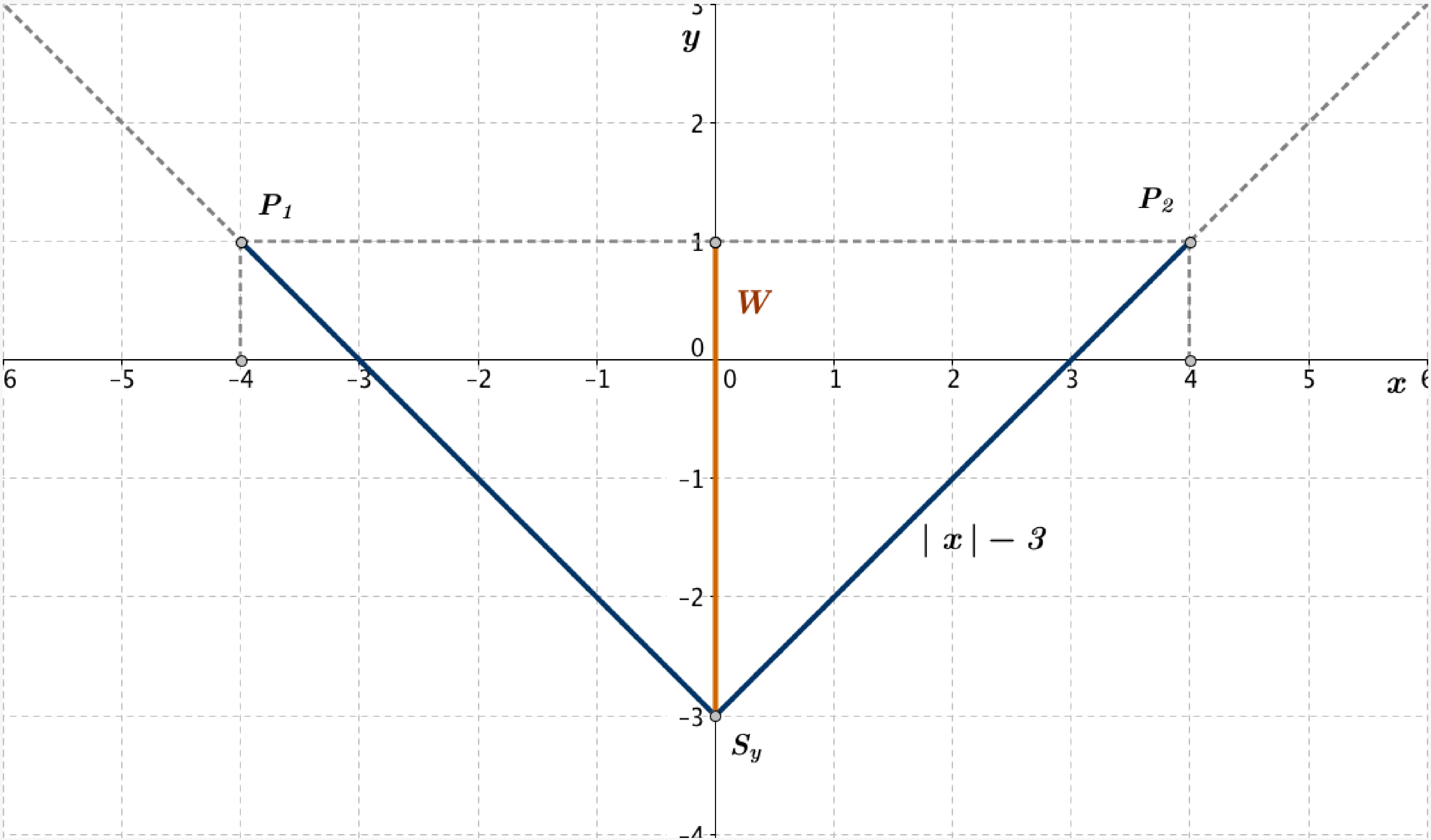


Abb. L-3b: Graph der Betragsfunktion $y = | x | - 3$ *mit Definitionsbereich* [-4, 4]

$$f\left(x\right) = | \, x \, | - 3, \qquad D = [-4, \, 4], \qquad W = [-3, \, 1]$$

Die Betragsfunktion $y = |x| - 3$ ist im abgeschlossenen Intervall von -4 bis 4 definiert. Es ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Für eine Betragsfunktion $y = |x| - a$, a eine reelle Zahl, sind die Funktionswerte in den symmetrischen x-Werten gleich:

$$D = [-4,\ 4]$$

$$f(-4) = f(4) = |-4| - 4 = 4 - 3 = 1,$$

Da die Funktion im negativen x-Bereich streng monoton fallend und im positiven x-Bereich streng monoton wachsend ist, entspricht der Funktionswert bei $x = -4$ und $x = 4$ dem maximalen Wert. Der Punkt mit $x = 0$, in dem die Funktion ihre Monotonieeigenschaft ändert, ist der Tiefpunkt, die Funktion hat bei $x = 0$ ihren minimalen Wert.

$$f(0) = |0| - 3 = -3 = f_{min}.$$

Der Wertebereich der Funktion $y = |x| - 3$ im Intervall $x = [-4,\ 4]$ ist das Intervall:

$$W = [f_{min},\ f_{max}] = [-3,\ 1]$$

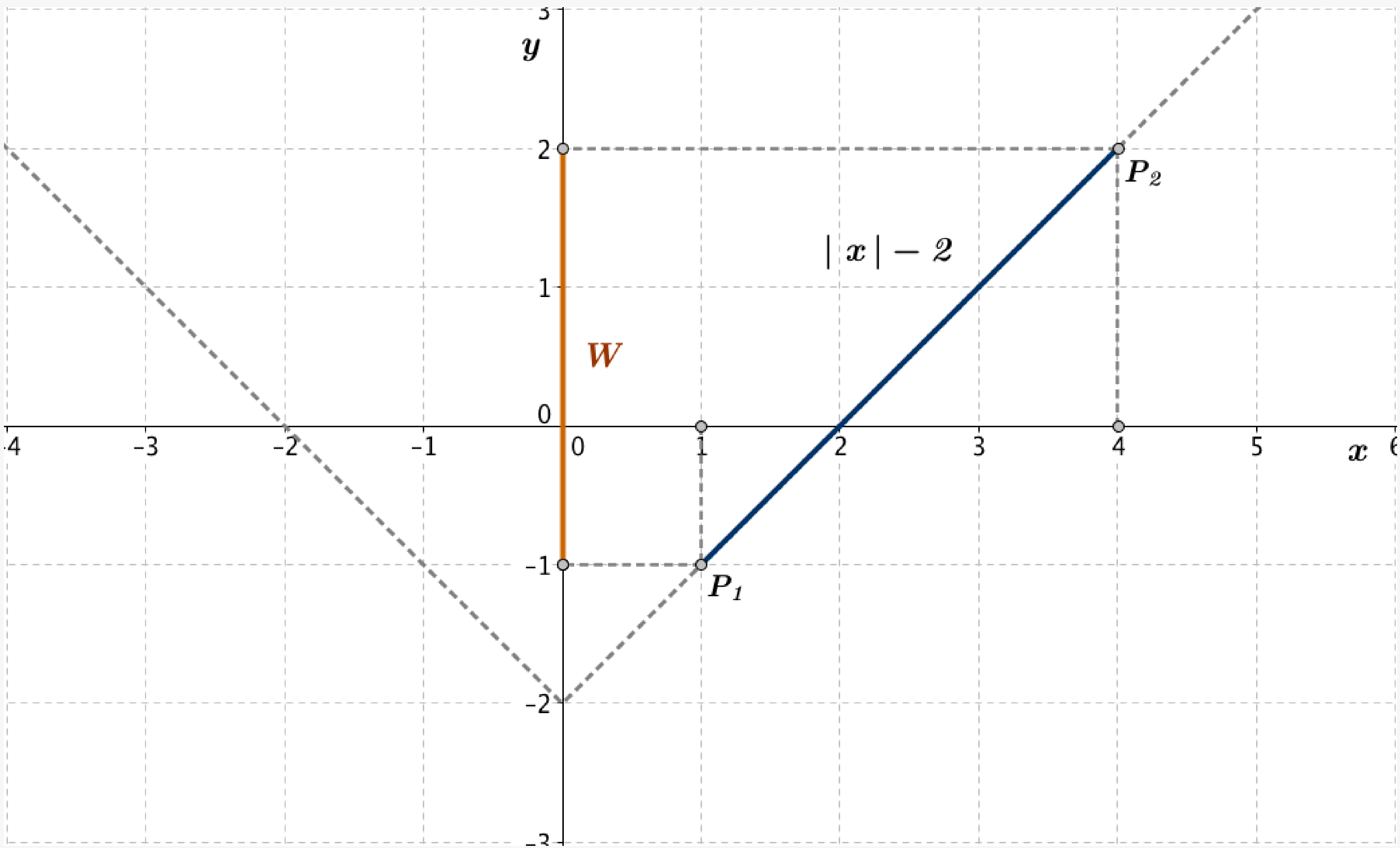


Abb. L-3c: Graph der Betragsfunktion $y = |x| - 2$ mit Definitionsbereich $[1, 4]$

$$f(x) = |x| - 2, \qquad D = [1, 4], \qquad W = [-1, 2]$$

Die Betragsfunktion $y = |x| - 2$ ist im Intervall von $x = [1, 4]$ monoton wachsend. Die Randstelle $x = 1$ entspricht dem minimalen Funktionswert, die Randstelle $x = 4$ entspricht dem maximalen Funktionswert.

$$f(1) = 1 - 2 = -1 = f_{min},$$

$$f(4) = 4 - 2 = 2 = f_{max}.$$

Der Wertebereich der Funktion $y = |x| - 2$ im Intervall $x = [1, 4]$ ist das Intervall:

$$W = [f_{min}, \; f_{max}] = [-1, 2].$$

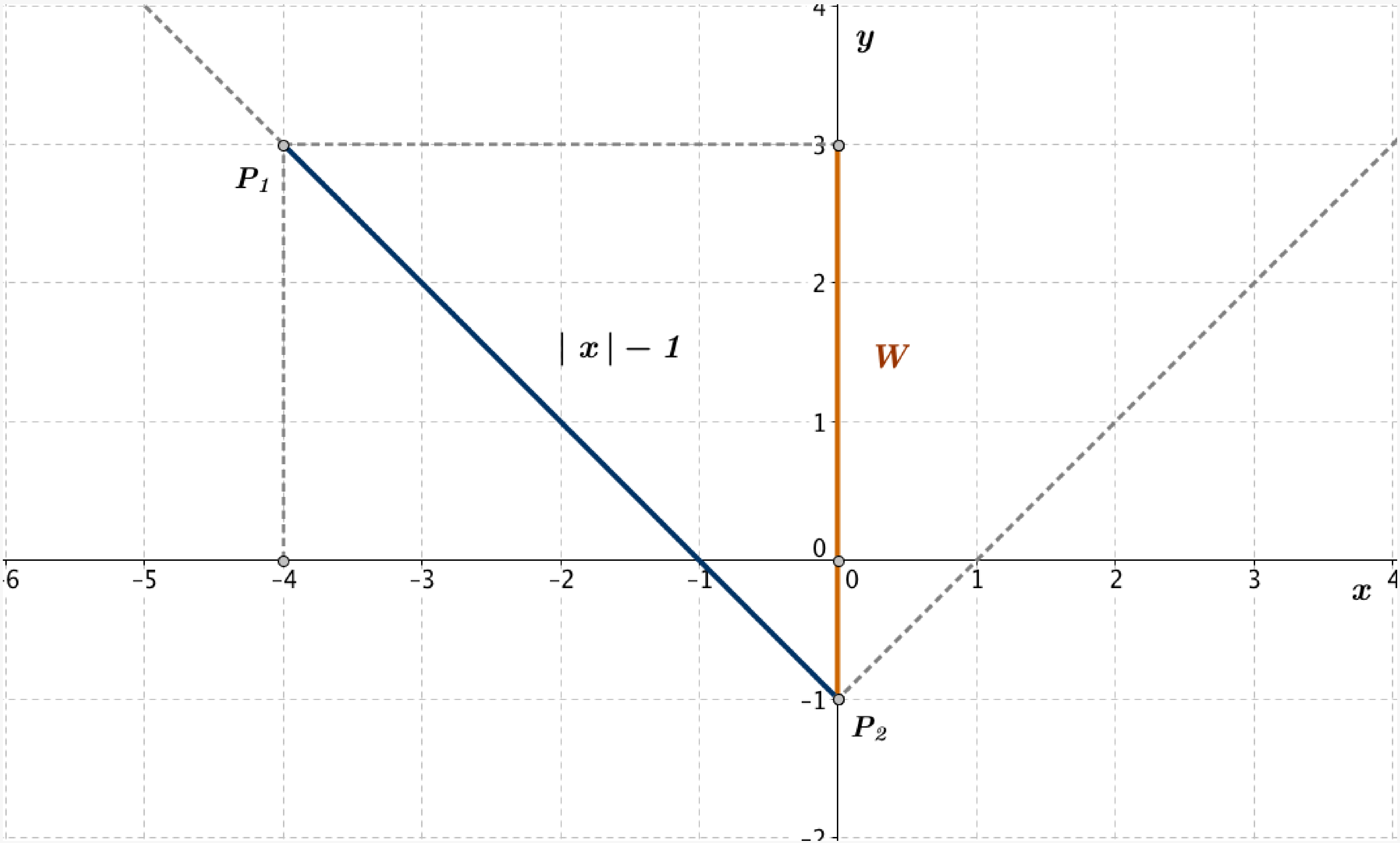


Abb. L-3d: Graph der Betragsfunktion $y = |\, x \,| - 1$ *mit Definitionsbereich* [-4, 0]

$$f(x) = |\, x \,| - 1, \qquad D = [-4,\ 0], \qquad W = [-1,\ 3]$$

Die Betragsfunktion $y = |x| - 1$ ist im Intervall von $x = [-4, 0]$ monoton fallend. Die Randstelle $x = -4$ entspricht dem maximalen Funktionswert, die Randstelle $x = 0$ entspricht dem minimalen Funktionswert.

$$f(-4) = |-4| - 1 = 4 - 1 = 3 = f_{max},$$

$$f(0) = |0| - 1 = -1 = f_{min}.$$

Der Wertebereich der Funktion $y = |x| - 1$ im Intervall $x = [-4, 0]$ ist das Intervall:

$$W = [f_{min}, \; f_{max}] = [-1, 3].$$

Aufgabe 4:

a) Zeichnen Sie folgende Betragsfunktionen und bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich dieser Funktionen:

$$f(x) = 2|x|, \qquad g(x) = \frac{|x|}{2}$$

b) Wie wirkt sich der positive reelle Parameter a auf die Eigenschaften der Funktion $y = a\,|x|$ aus ?

Aufgabe 5:

Zeichnen Sie folgende Betragsfunktionen und bestimmen Sie ihren Definitions- und Wertebereich:

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + 2, \qquad g(x) = \frac{3}{2}\,|x| - 2$$

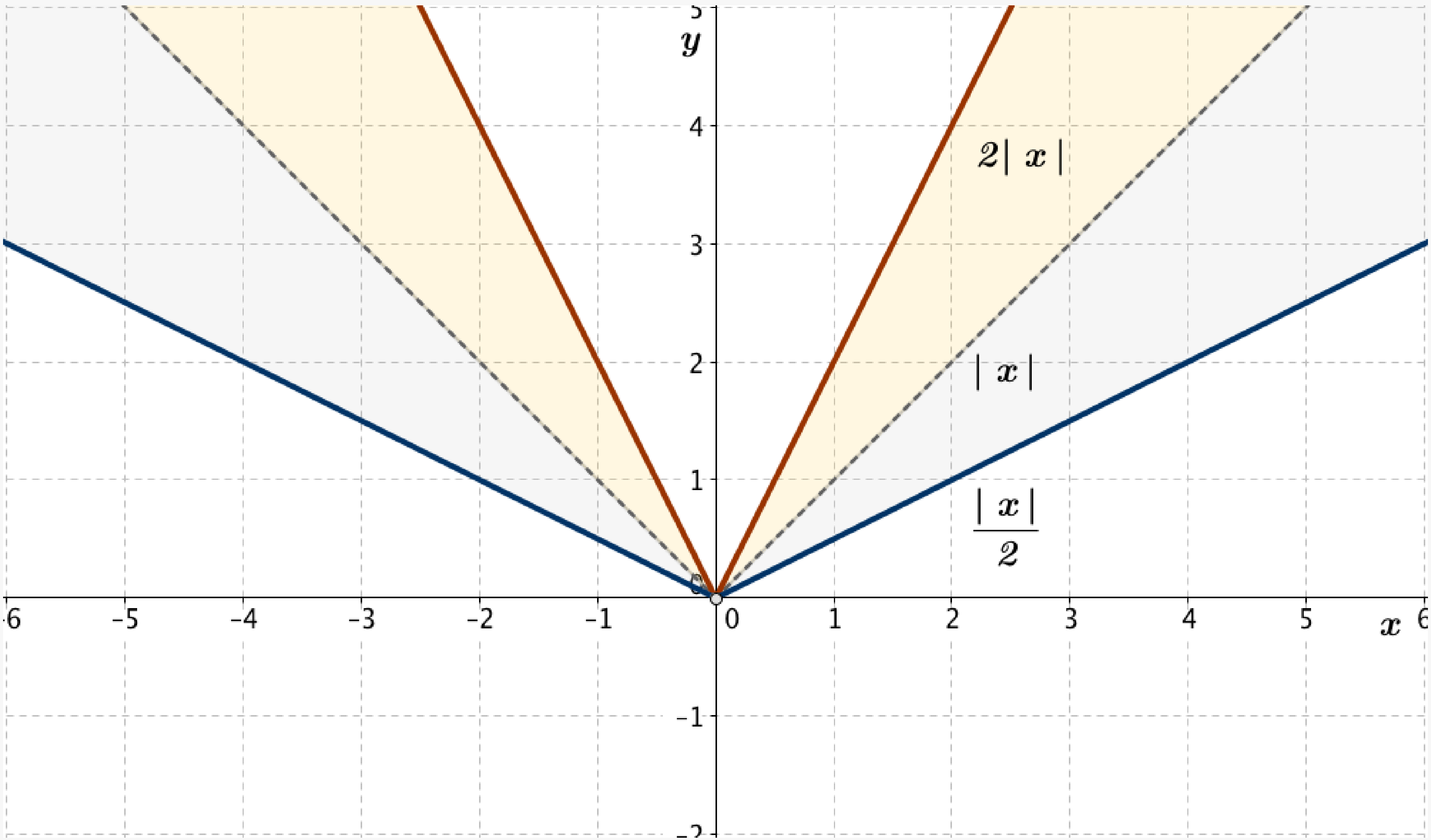


Abb. L-4a: Graphen der Betragsfunktionen $y = |\, x\,|$ (grau gestrichelt), $f(x) = 2|\, x\,|$ (rot) und $g(x) = |\, x\,|/\,2$ (blau)

$$f(x) = 2\,|\,x\,|, \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad W_f = [\,0,\,\infty\,)$$

$$g(x) = \frac{|\,x\,|}{2}, \qquad D_g = \mathbb{R}, \qquad W_g = [\,0,\,\infty\,)$$

Wie wirkt sich der reelle Parameter a auf die Eigenschaften der Funktion $y = a\,|\,x\,|$, $a > 0$ aus?

Die Betragsfunktion $y = a\,|\,x\,|$ $(a > 0)$

- ist für alle reelle Zahlen definiert: $D = \mathbb{R}$
- hat den Wertebereich: $W = [\,0, \infty\,)$
- ist monoton fallend für negative x und monoton wachsend für positive x,
- hat einen Schnittpunkt (0, 0) mit der y-Achse, der auch der Schnittpunkt mit der y-Achse ist,
- hat die y-Achse als vertikale Symmetrieachse und keine Asymptote,
- hat den minimalen Funktionswert 0 bei $x = 0$ und keinen maximalen Funktionswert. Diese Funktion ist von unten beschränkt,
- ist bei $a > 1$ im Vergleich zu $y = |\,x\,|$ um den Faktor a vertikal gestreckt,
- ist bei $0 < a < 1$ im Vergleich zu $y = |\,x\,|$ um den Faktor a vertikal gestaucht.

Eine positive multiplikative Konstante a in der Funktionsgleichung $y = a\,|\,x\,|$ hat die geometrische Bedeutung einer vertikalen Skalierung. Ist $a > 1$, wird der Graph der Funktion $y = |\,x\,|$ um den Faktor a gestreckt, bei $a < 1$ − um den Faktor a gestaucht.

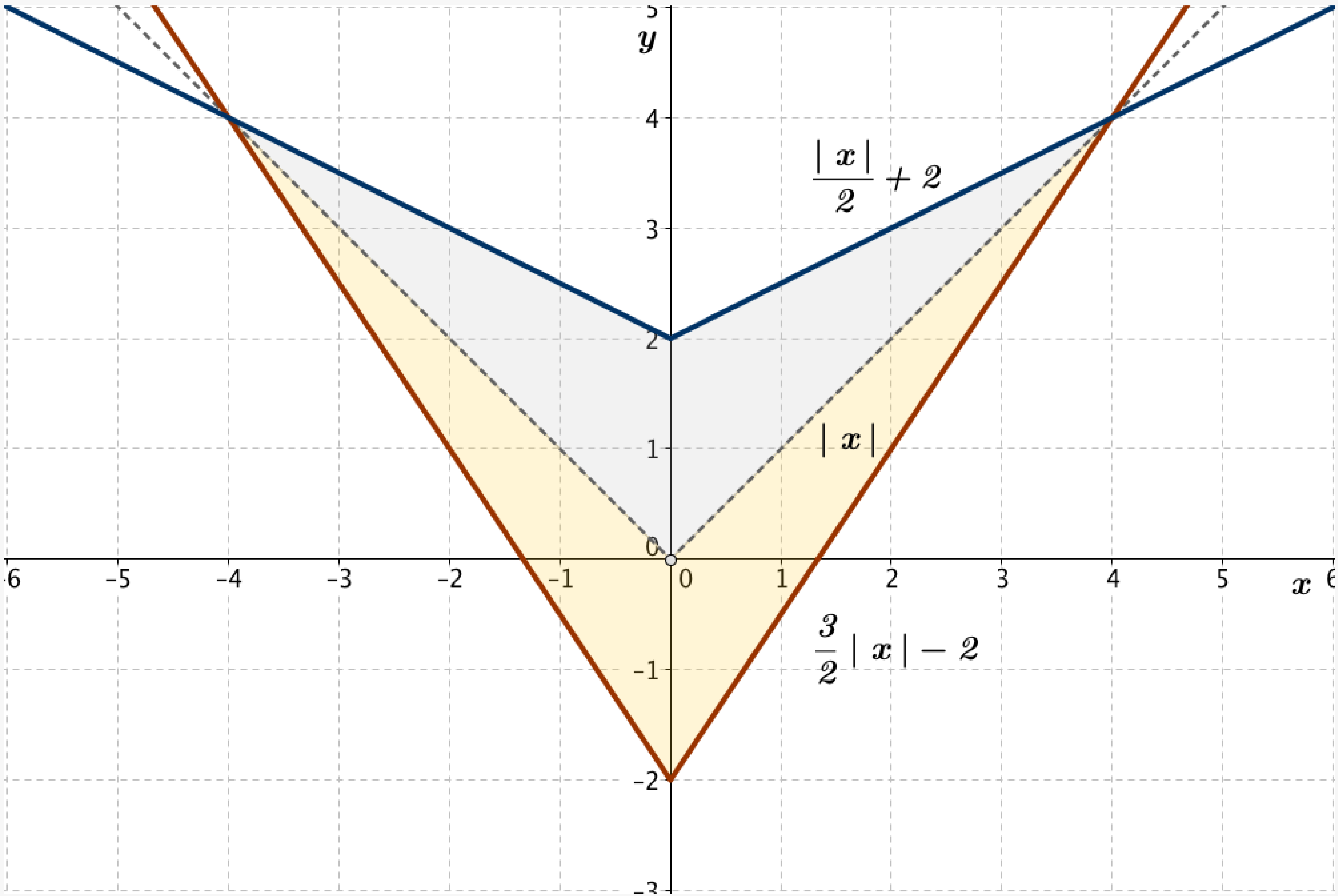
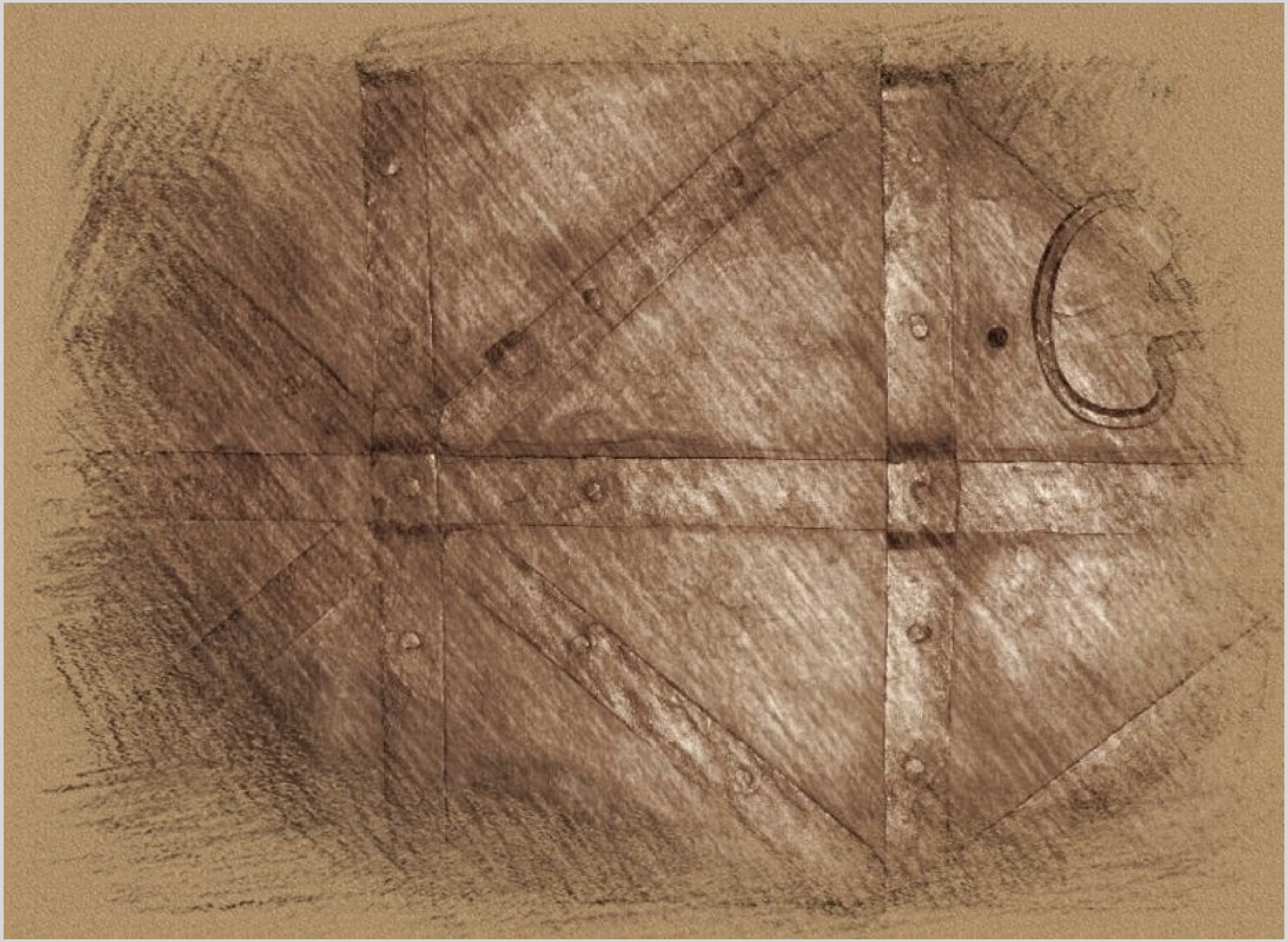


Abb. L-5b: Graphen der Betragsfunktionen y = | x | (grau gestrichelt), g(x) = 3| x |/2 - 2 (rot) und f(x) = | x |/ 2 + 2 (blau)

$$f(x) = \frac{|x|}{2} + 2, \qquad D_f = \mathbb{R}, \quad W_f = [2, \infty)$$

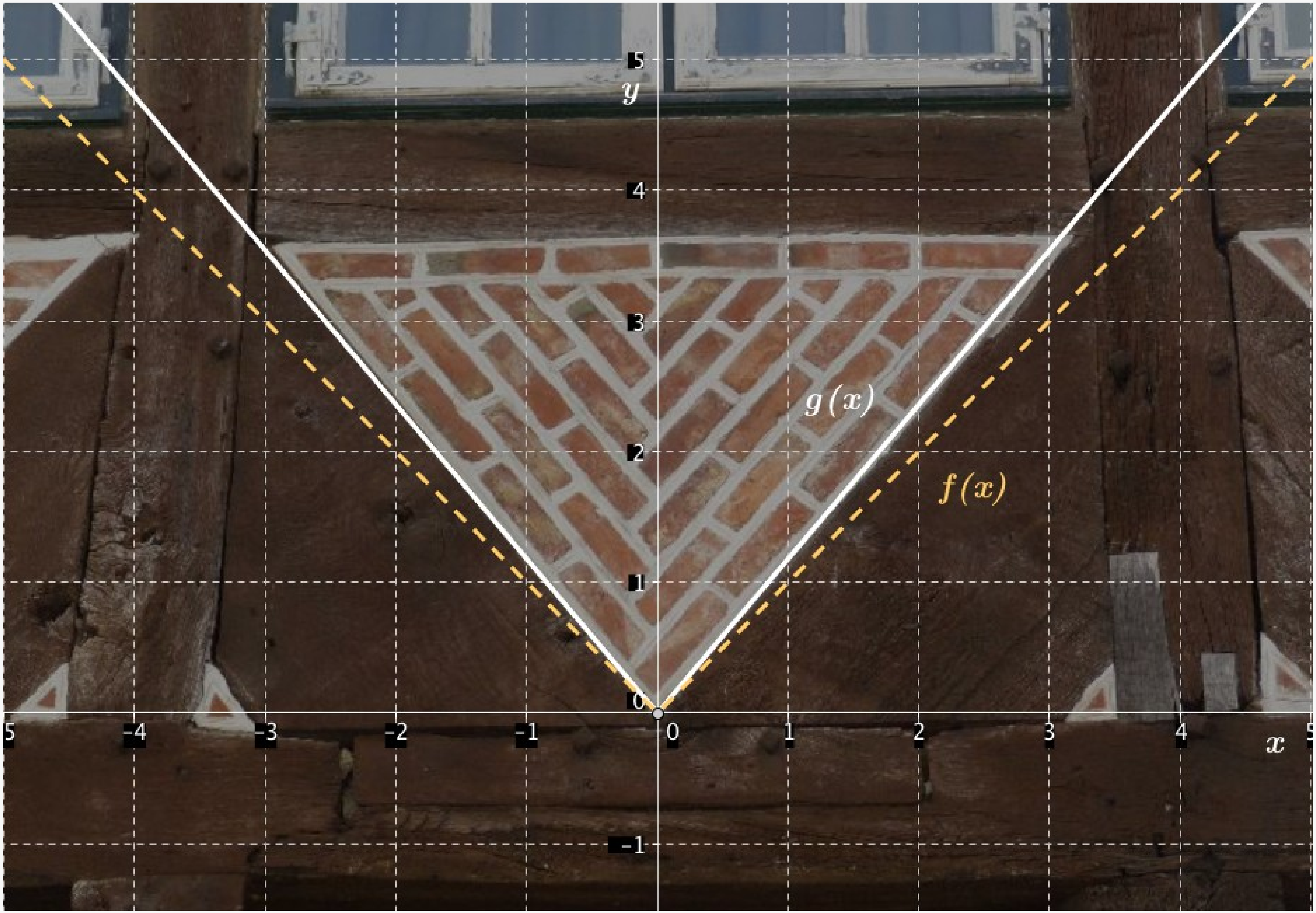
$$g(x) = \frac{3}{2}|x| - 2, \qquad D_g = \mathbb{R}, \quad W_g = [-2, \infty)$$



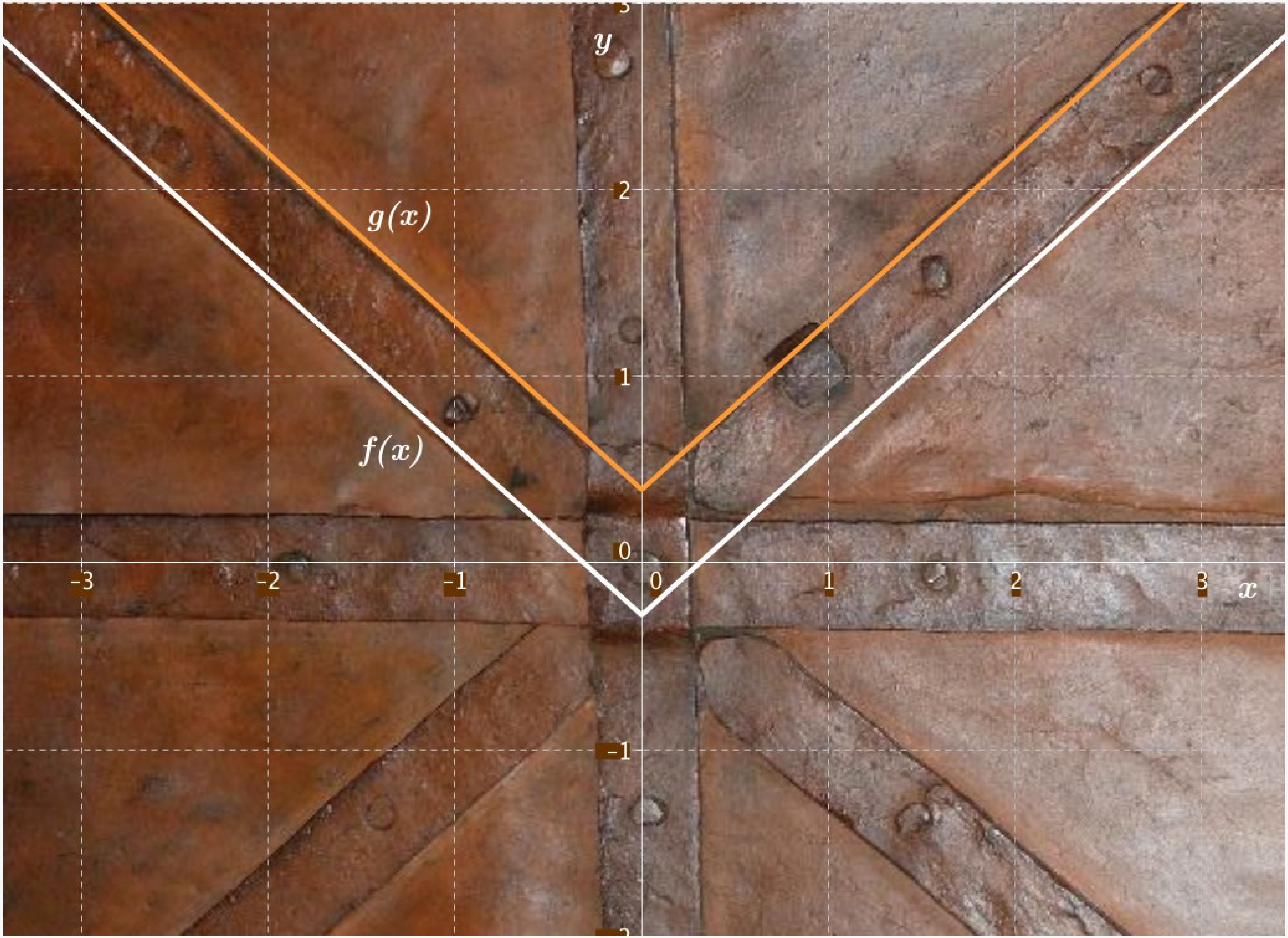
Einige Beispiele von Betragsfunktionen

y
f(x)
x
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
ütze dieses Haus vor Feuer, vor Ämtern, Planung und vo

$$f(x) = 1.6\,|x|$$



$$f(x) = |\,x\,|, \qquad g(x) = 1.18\,|\,x\,|$$



$$f(x) = 0.9\,|\,x\,| - 0.3, \qquad g(x) = 0.9\,|\,x\,| + 0.4$$