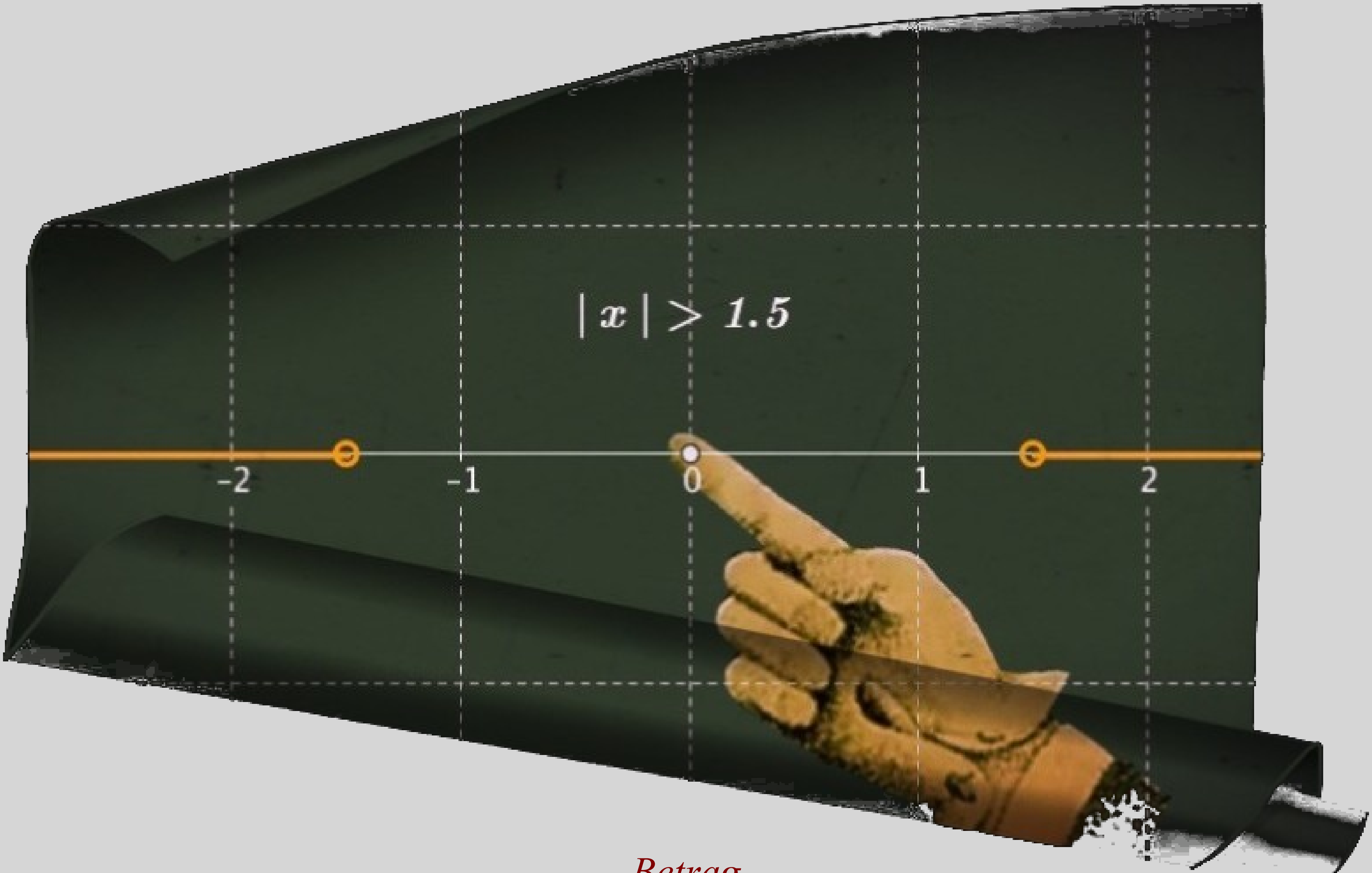

Betrag

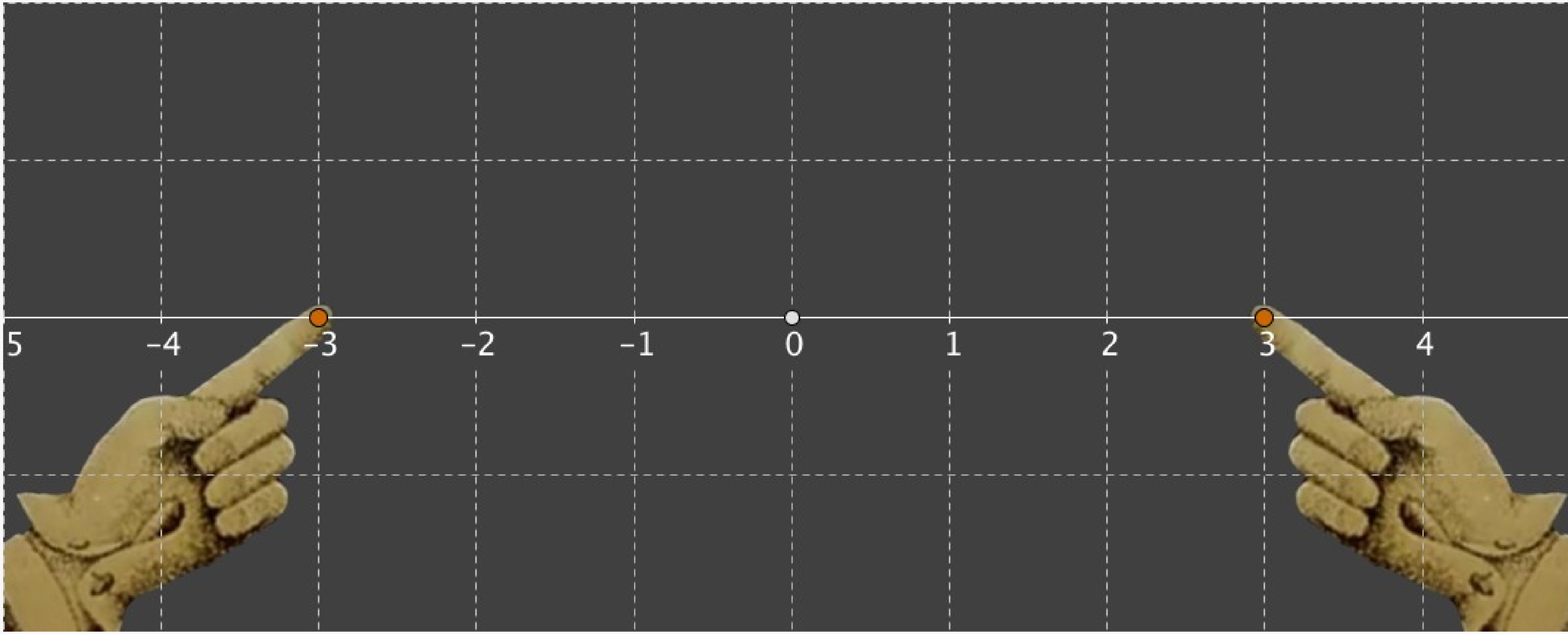

Abb. 1-1a: Graphische Bestimmung der Punkte auf der Zahlengerade, deren Abstand von Null gleich 3 ist.

Stellen wir uns folgende Aufgabe vor: Es soll eine Zahl oder mehrere Zahlen auf der Zahlengerade bestimmt werden, deren Abstand von Null gleich 3 ist. Da es zwei Bereiche auf der Zahlengerade gibt, links und rechts von Null, können wir zwei Punkte, 3 und - 3, einzeichnen, die beide den Abstand 3 von 0 haben.

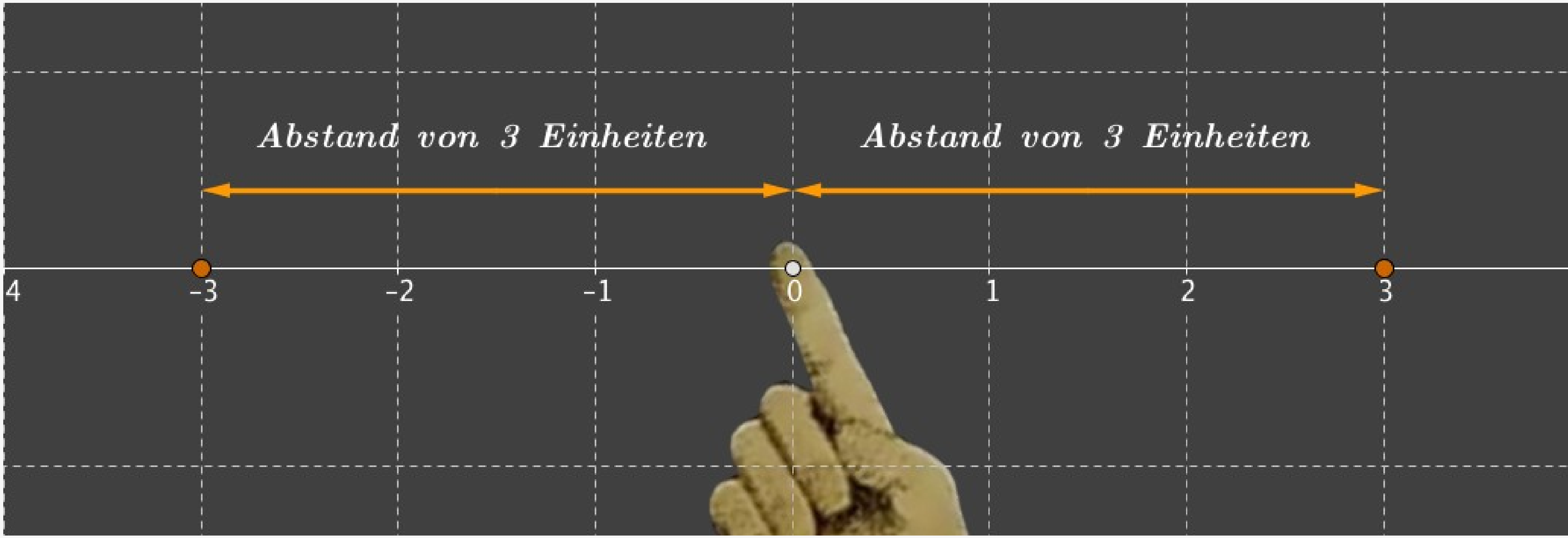

Abb. 1-1b: Die Punkte - 3 und 3 haben den Abstand 3 vom Punkt Null

Wichtig! Abstände sind immer positive Größen! Obwohl sich die beiden Punkte in verschiedenen Richtungen von 0 befinden, haben beide den Abstand +3 vom Ursprung 0.

Abstände sind immer positiv!

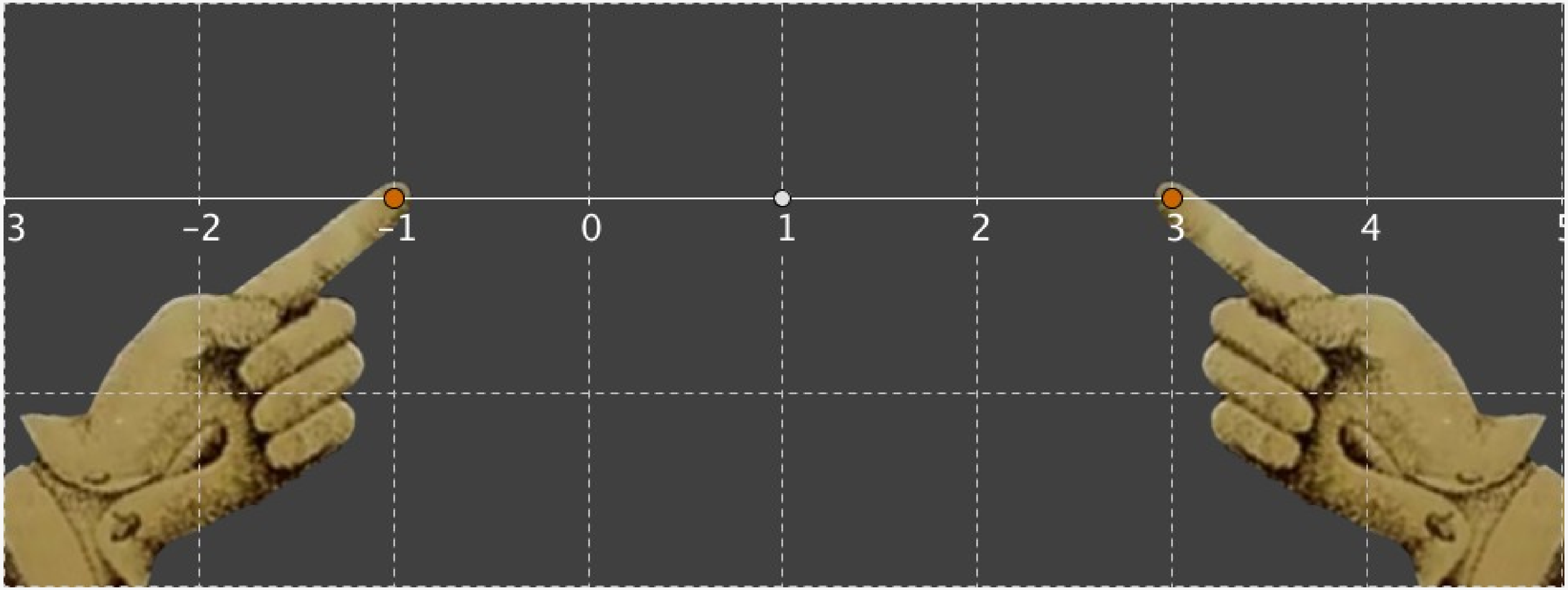

Abb. 1-2a: Graphische Bestimmung der Punkte auf der Zahlengerade, deren Abstand von 1 gleich 2 ist.

Stellen wir uns eine andere Aufgabe vor: Es sollen Zahlen auf der Zahlengerade bestimmt werden, deren Abstand von der Zahl 1 gleich 2 ist.

Wir finden die Punkte - 1 und 3, die beide den Abstand 2 vom Punkt 1 haben.

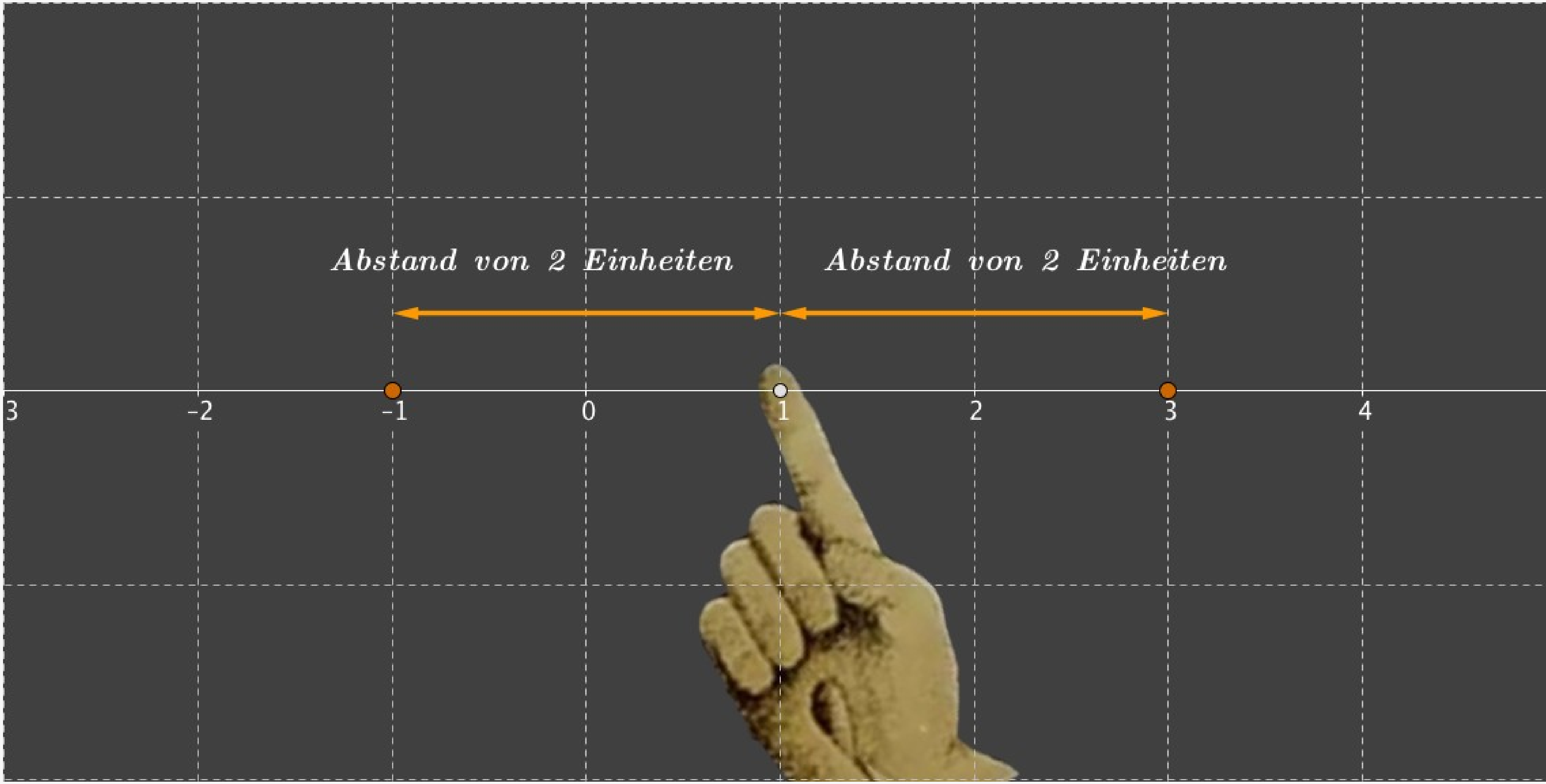

Abb. 1-2b: Die Punkte - 1 und 3 haben den Abstand 2 vom Punkt 1

Wie kann man Abstandsaufgaben wie z.B.

“Bestimmen Sie die Zahlen (oder alle x), deren Abstand von der Zahl a gleich d ist”.

algebraisch beschreiben? Solche Aufgaben lassen sich folgendermaßen formulieren:

$$|x - a| = d$$

Die Aufgabe der Seite 1-1 kann man algebraisch so schreiben:

$$|x - 0| = 3 \quad \text{oder} \quad |x| = 3$$

Die Aufgabe auf der Seite 1-3 wird entsprechend so formuliert: $|x - 1| = 2$

Dabei können die x-Werte, die diese Gleichungen erfüllen positiv oder negativ sein. Der Abstand $|x - a|$ ist aber immer positiv. Die Zeichen, zwischen denen $x - a$ steht, nennt man “Betragszeichen” und die Große $|x - a|$ “Betrag von $x - a$”. Die Gleichungen und ihre Lösungen schreibt man in der Form:

$$|x| = 3, \qquad x_1 = -3, \quad x_2 = 3$$

$$|x - 1| = 2, \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

Geometrisch gesehen ist der Betrag einer reellen Zahl x, also $|x|$, ihr Abstand von Null.

Definition:

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x wird folgendermaßen definiert:

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{für} \quad x \geqslant 0 \\ -x\,, & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Der Betrag von x kann auch als Wurzel aus x^2 definiert werden:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Der Betrag einer negativen Zahl ist also eine positive Zahl, genauso wie der einer positiven Zahl.

$$|x-a| = \begin{cases} x-a\,, & \text{für} \quad x \geqslant a \\ -(x-a)\,, & \text{für} \quad x < a \end{cases}$$

$$|x-1| = 2, \qquad x-1 = 0, \quad x = 1$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{für} \quad x \geqslant 1 \\ -(x-1)\,, & \text{für} \quad x < 1 \end{cases}$$

$a)$ $x \geqslant 1, \qquad x-1 = 2, \quad x_1 = 3$

$b)$ $x < 1, \qquad -(x-1) = 2, \quad -x+1 = 2, \quad x_2 = -1$

Aufgabe 1:

Lösen Sie graphisch folgende Betragsgleichungen

$a)\ |x| = 4,$ $\qquad b)\ |x - 2| = 1,$

$c)\ |x + 1| = 3,$ $\qquad d)\ |x + 2| = 4,$

$e)\ |x - 5| = -2.$

Aufgabe 2:

Lösen Sie folgende Betragsgleichungen (siehe die Seite 1-7)

$a)\ |x - 11| = 5,$ $\qquad b)\ |x + 6| = 9,$ $\qquad c)\ |x - 2.5| = 1.5$

$d)\ |x - 0.3| = 1.2,$ $\qquad e)\ |x + 0.2| = 0.5,$ $\qquad f)\ |x - 1.6| = 2.4$

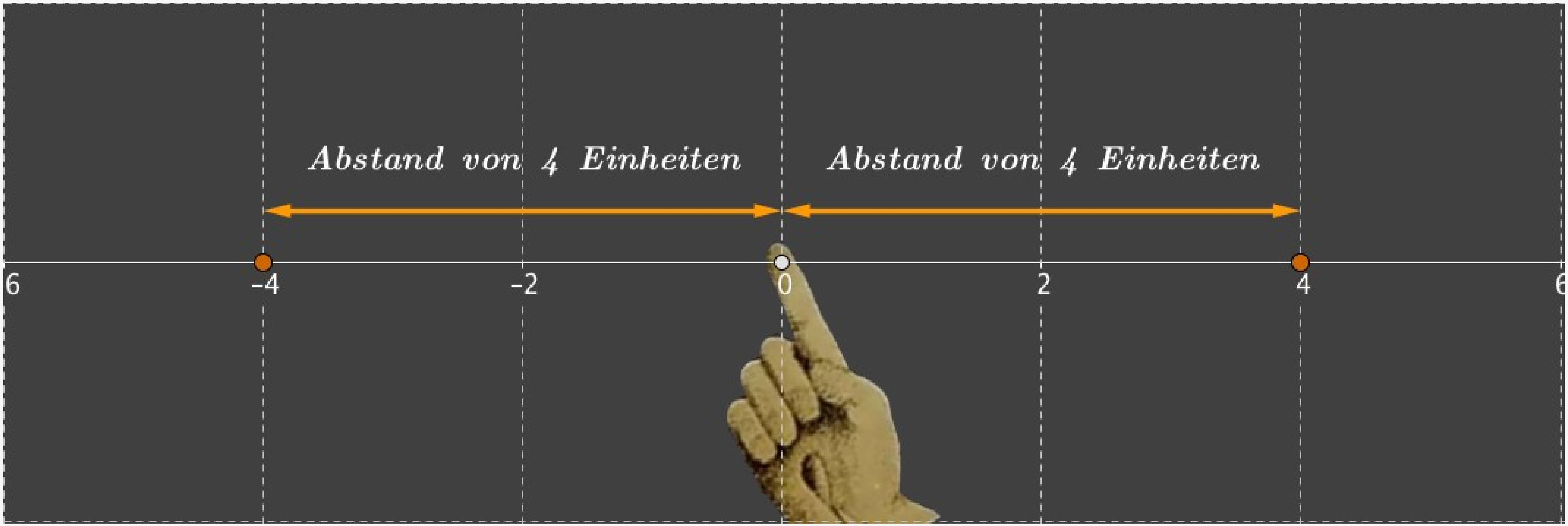

Abb. A-1a: Graphische Lösung der Gleichung | x | = 4. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen -4 und 4, die dem Abstand von der Zahl 0 auf der Zahlengerade entsprechen

$$|\,x\,| = 4, \qquad x_1 = -4, \qquad x_2 = 4$$

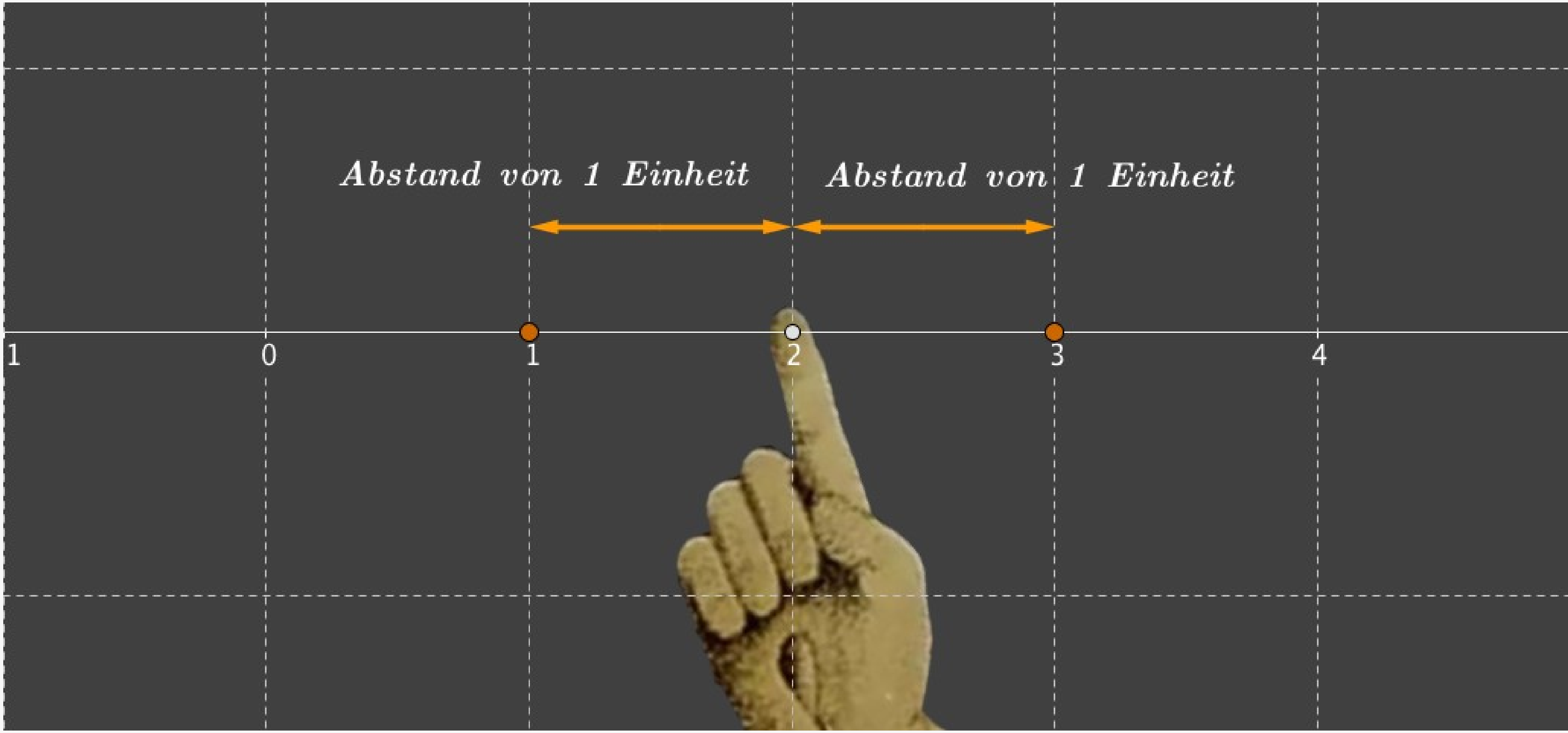

Abb. A-1b: Graphische Lösung der Gleichung $|x-2| = 1$. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen 1 und 3, die dem Abstand 1 von der Zahl 2 entsprechen.

$$|x-2| = 1, \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = 3$$

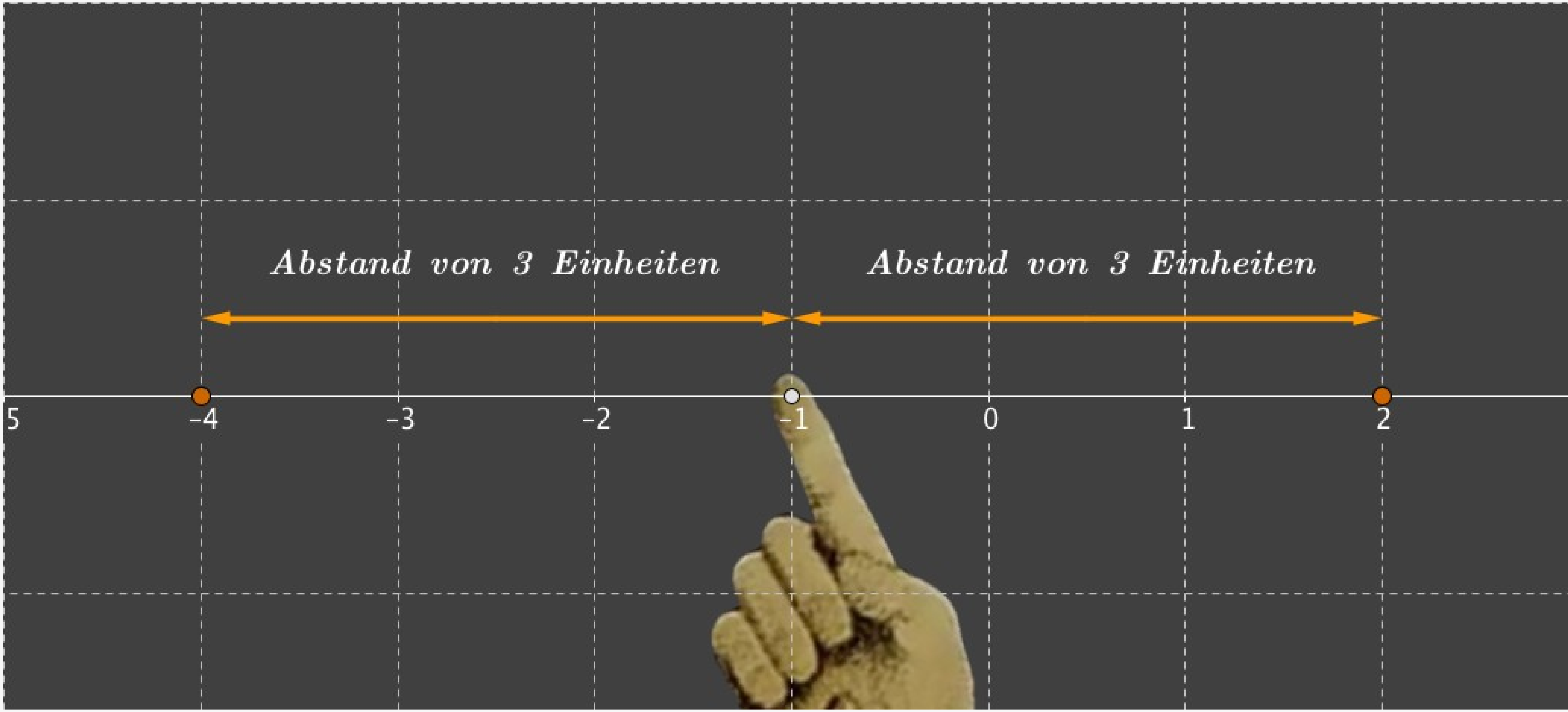

Abb. A-1c: Graphische Lösung der Gleichung $|x+1| = 3$*. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen -4 und 2, die dem Abstand 3 von der Zahl -1 entsprechen.*

$$|x+1| = |x-(-1)| = 3, \qquad x_1 = -4, \qquad x_2 = 2$$

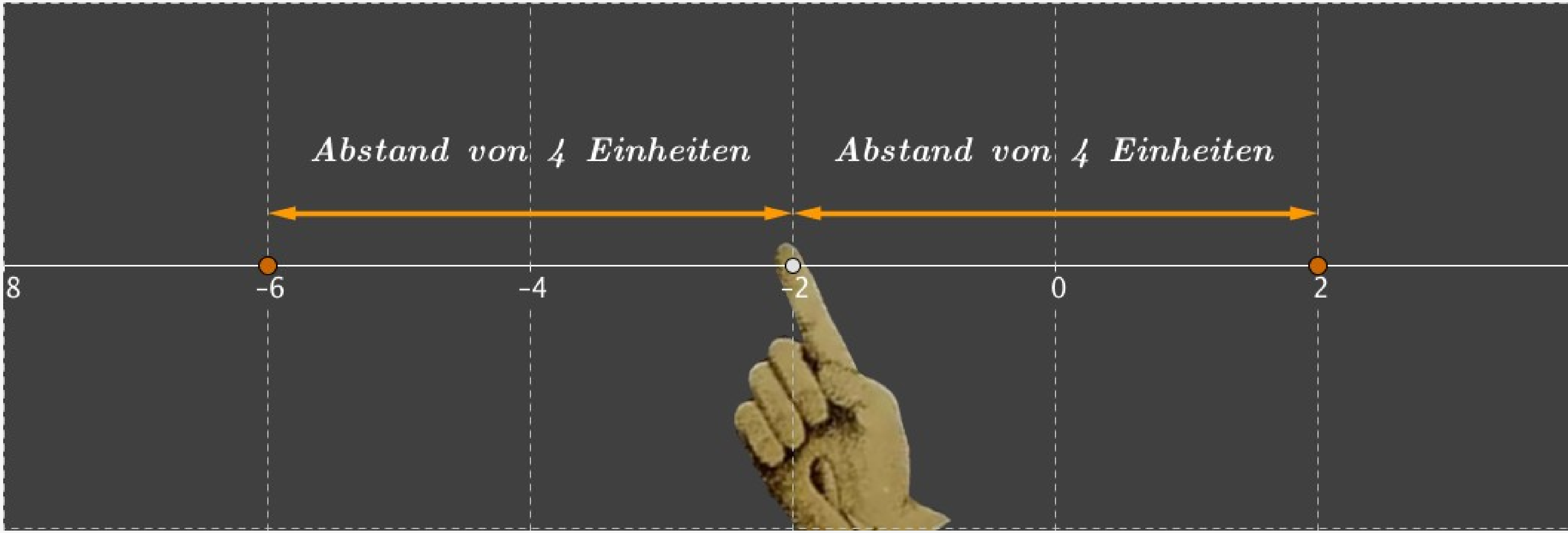

Abb. A-1d: Graphische Lösung der Gleichung | x + 2 | = 4. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen -6 und 2, die dem Abstand 4 von der Zahl -2 entsprechen.

$$d)\quad |x+2| = |x-(-2)| = 4, \qquad x_1 = -6, \qquad x_2 = 2$$

$$e)\quad |x-5| = -2$$

Die Betragsgleichung $|x - 5| = -2$ hat keine Lösung, da der Betrag nicht negativ sein kann.

$a)\ \ |x-11| = 5, \qquad x_1 = 6, \quad x_2 = 16$

$b)\ \ |x+6| = 9, \qquad x_1 = -15, \quad x_2 = 3$

$c)\ \ |x-2.5| = 1.5, \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$

$d)\ \ |x-0.3| = 1.2, \qquad x_1 = -0.9, \quad x_2 = 1.5$

$e)\ \ |x+0.2| = 0.5, \qquad x_1 = -0.7, \quad x_2 = 0.3$

$f)\ \ |x-1.6| = 2.4, \qquad x_1 = -0.8, \quad x_2 = 4$

Beschreiben Sie den Abstand der Punkte A und B vom Punkt P durch eine Betragsgleichung der Form $|x - a| = d$. Bestimmen Sie die reellen Größen a und d für die Abbildungen Abb. 3a, 3b und 3c.

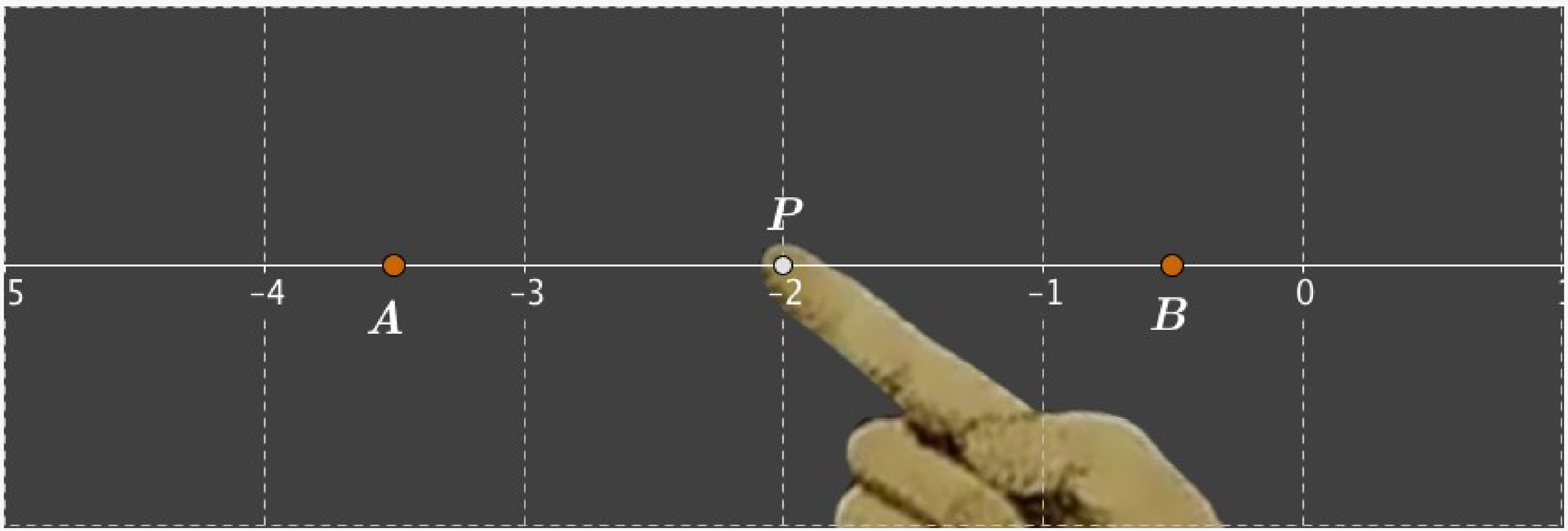

Abb. A-3a: Graphische Darstellung der Aufgabe 3a).

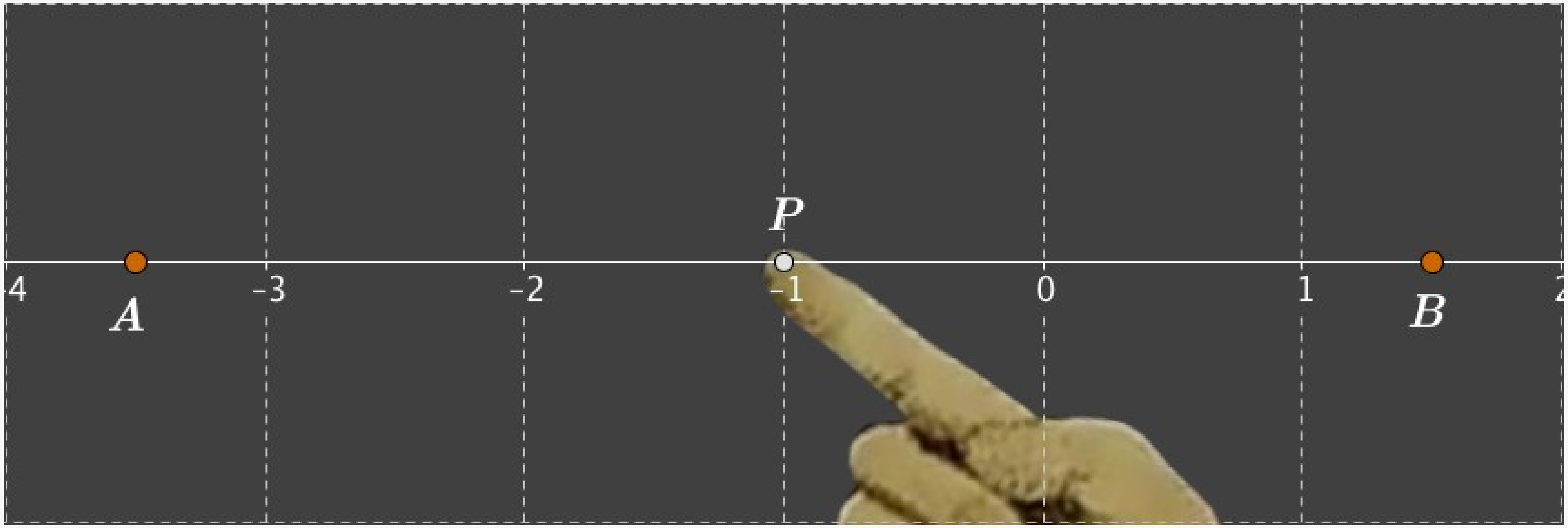

Abb. A-3b: Graphische Darstellung der Aufgabe 3b). Der Abstand des Punktes P zu den Punkten A und B ist zu bestimmen und in Form einer Betragsgleichung aufzuschreiben

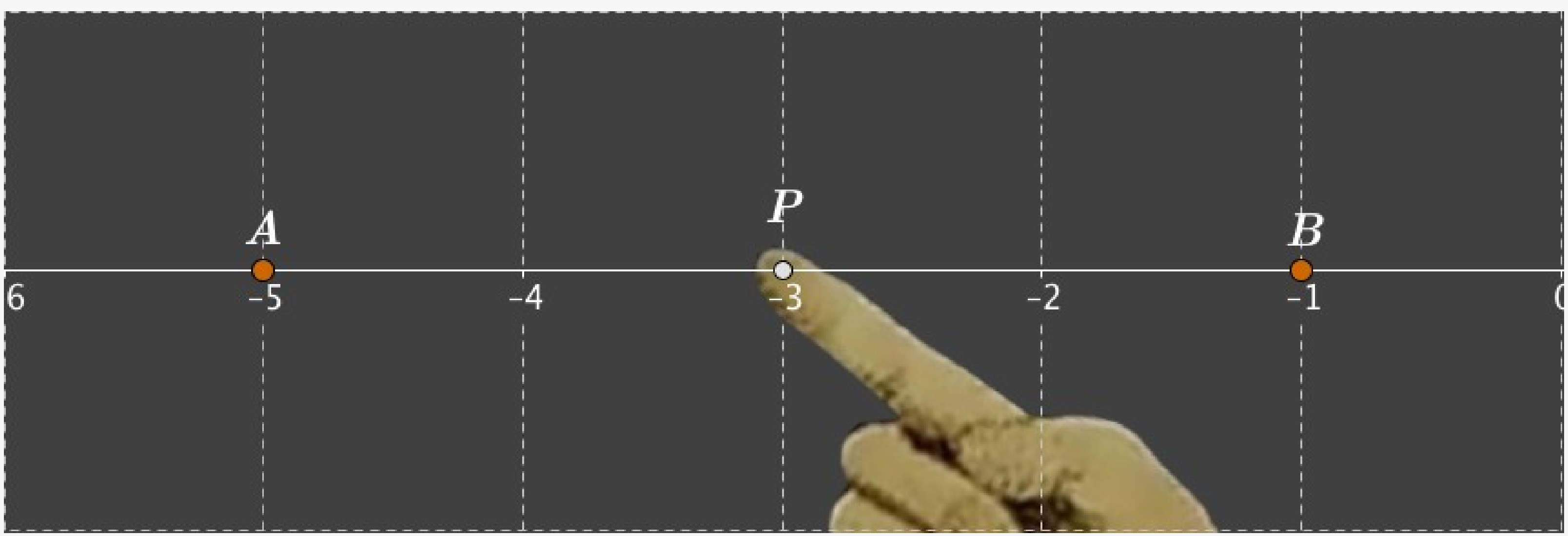

Abb. A-3c: Graphische Darstellung der Aufgabe 3c). Der Abstand des Punktes P zu den Punkten A und B ist zu bestimmen und in Form einer Betragsgleichung aufzuschreiben

$$| x - a | = d$$

Abb. 3*a*: $| x + 2 | = 1.5, \quad a = -2, \quad d = 1.5$

Abb. 3*b*: $| x + 1 | = 2.5, \quad a = -1, \quad d = 2.5$

Abb. 3*c*: $| x + 3 | = 2, \quad a = -3, \quad d = 2$

Betrag einer Zahl, Eigenschaften:

a, b, c und x seien reelle Zahlen, die Zahl n ist eine ganze Zahl, dann gelten folgende Regeln:

Produktregel: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Quotientenregel: $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Potenzregel: $|a^n| = |a|^n$

1) $|x| = 0$, für $x = 0$.

2) Die Gleichung $|x| = c$ hat zwei Lösungen $x = c$ und $x = -c$, wenn c eine positive Zahl ist.

3) Die Gleichung $|x| = c$ hat keine Lösung, falls c eine negative Zahl ist.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie an Beispielen folgende Betragseigenschaft:

$$| a + b | \leqslant | a | + | b |, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 5:

Geben Sie algebraische und graphische Lösungen der Betragsungleichungen:

$a)\ | x | \leqslant 2, \qquad b)\ | x | \geqslant 3, \qquad c)\ | x | < 1, \qquad d)\ | x | > 1.5$

Um diese Ungleichung zu bestätigen, betrachten wir drei Fälle für reelle Zahlen a und b:

1) Beide a und b sind positiv.

2) Beide a und b sind negativ.

3) Eine der Zahlen a und b ist positiv, die andere - negativ.

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1) $a = 3, \ b = 7, \quad |3+7| = |10| = 10, \quad |3| + |7| = 3 + 7 = 10.$

$a, b > 0, \quad |a+b| = |a| + |b|$

2) $a = -4, \ b = -12, \quad |-4 + (-12)| = |-4-12| = |-16| = 16.$

$|-4| + |-12| = 4 + 12.$

$a, b < 0, \quad |a+b| = |a| + |b|$

3) $a = -9, \ b = 15, \quad |-9+15| = |6| = 6, \quad |-9| + |15| = 9 + 15 = 24.$

$a < 0, b > 0, \quad |a+b| < |a| + |b|$

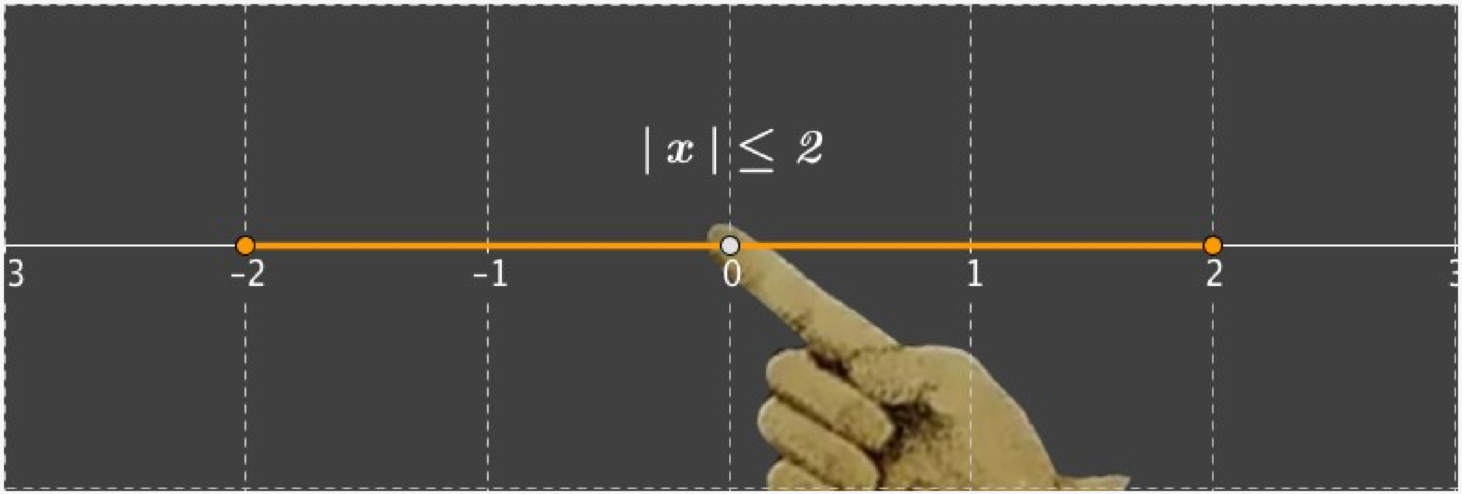

Abb. A-5a: Graphische Darstellung der Aufgabe 5a). Alle x im abgeschlossenen Intervall [-2, 2] erfüllen die Betragsungleichung | x | ≤ 2. Geometrisch betrachtet sind das alle x, deren Abstand von Null kleiner oder gleich 2 ist.

Die algebraische Lösung hat die Form:

$$|\, x \,| \leqslant 2, \qquad x = [-2,\ 2]$$

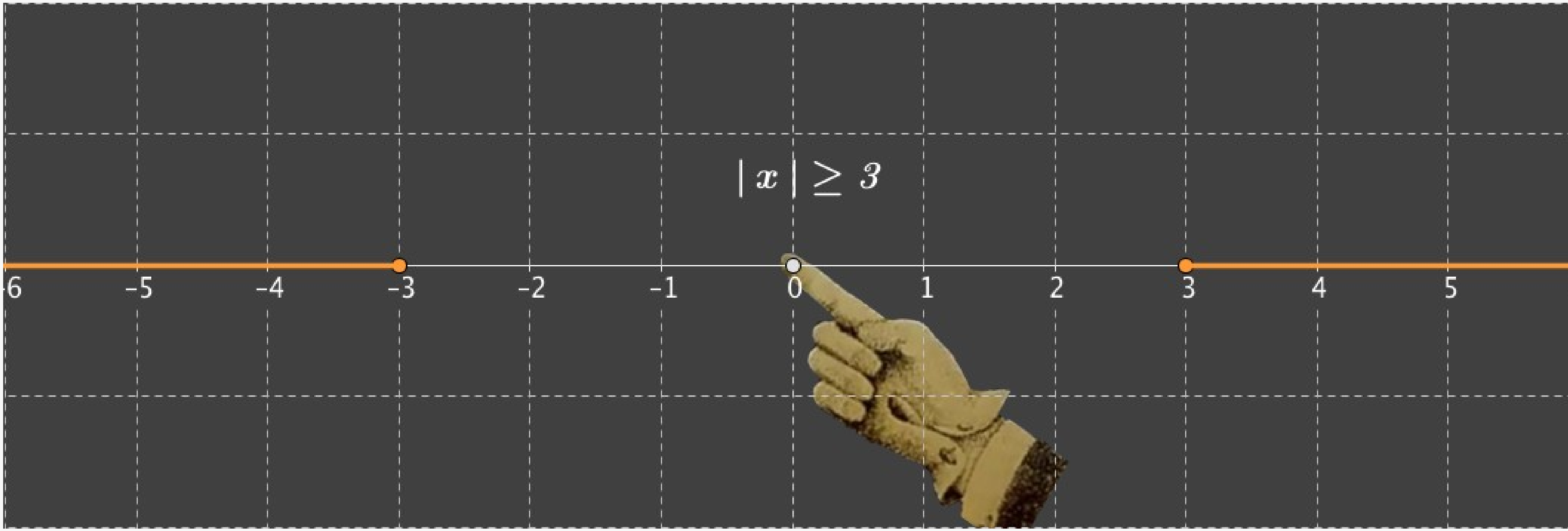

Abb. A-5b: Graphische Darstellung der Aufgabe 5b). Alle x, die nicht im Intervall (-3, 3) sind, erfüllen die Betragsgleichung $|x| \geq 3$. *Geometrisch betrachtet sind das alle x, deren Abstand von Null größer oder gleich 3 ist*

$$|x| \geqslant 3, \qquad x = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

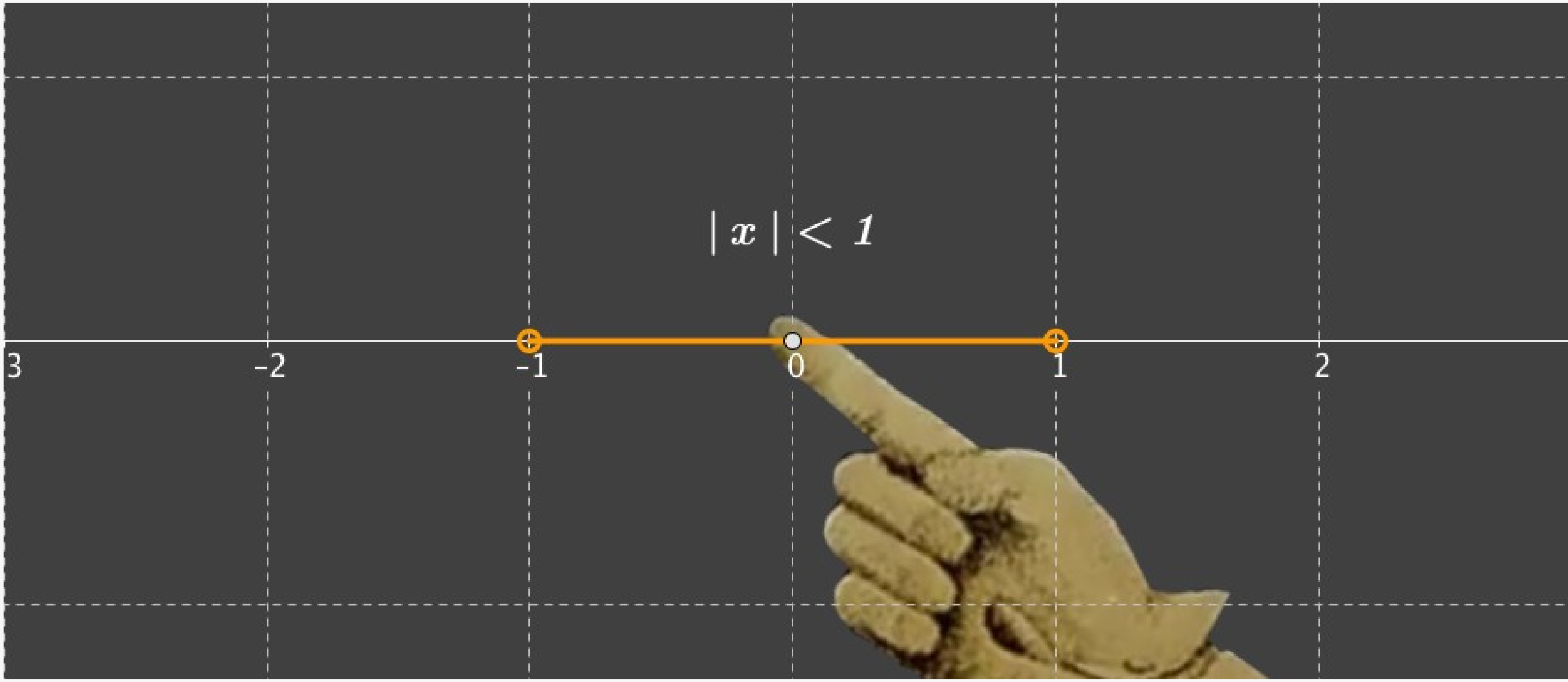

Abb. A-5c: Graphische Darstellung der Aufgabe 5c). Alle x im Intervall (-1, 1) erfüllen die Betragsungleichung $|x| < 1$. *Geometrisch berachtet sind das alle x, deren Abstand von Null kleiner 1 ist.*

Die algebraische Lösung hat die Form:

$$|x| < 1, \qquad x \in (-1,\ 1), \qquad x \neq -1, \quad x \neq 1$$

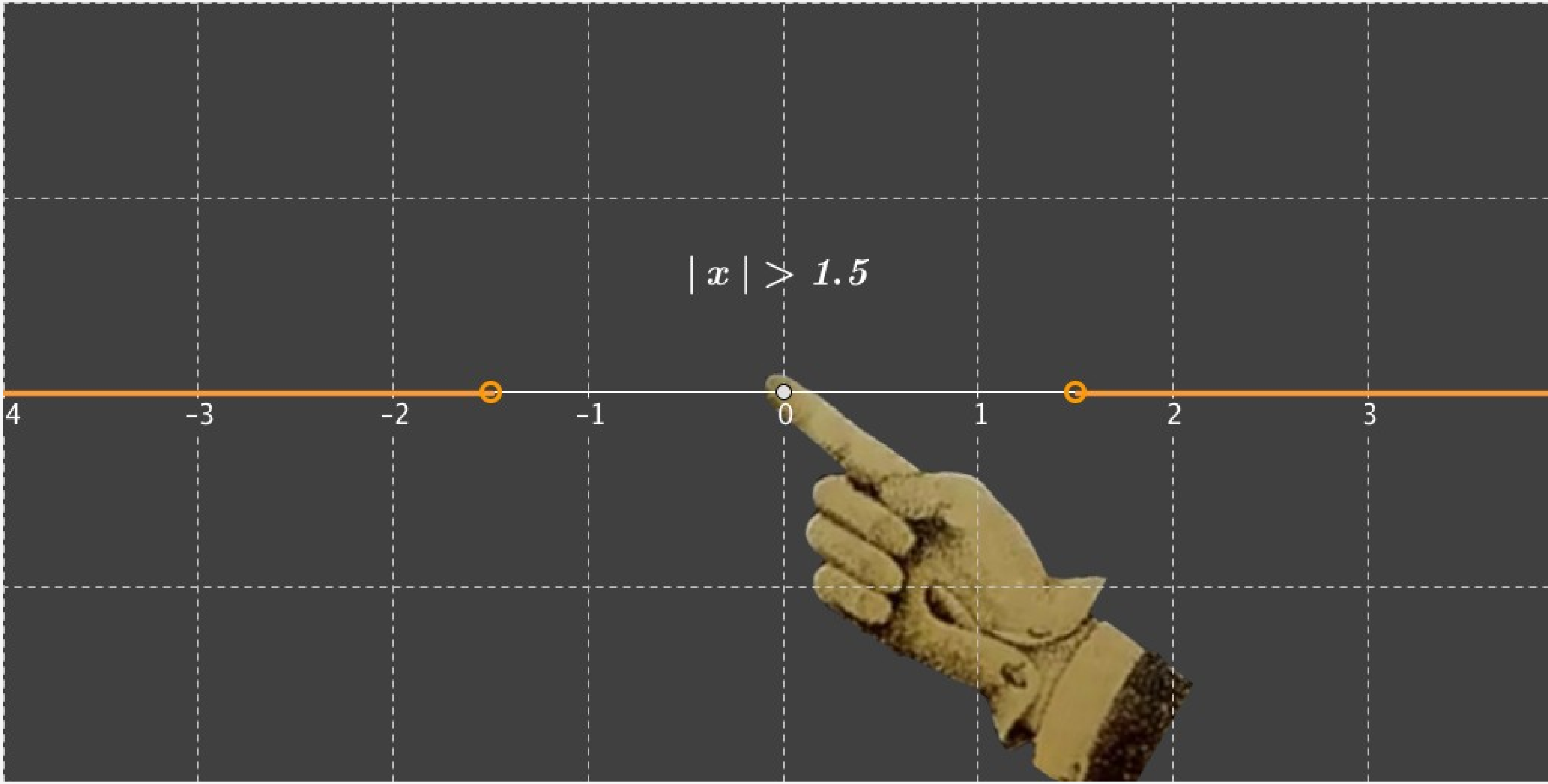

Abb. A-5d: Graphische Darstellung der Aufgabe 5d). Alle x, die nicht im Intervall [-1.5, 1.5] sind, erfüllen die Betragsungleichung $|x| > 1.5$. *Geometrisch betrachtet sind das alle x, deren Abstand von Null größer als 1.5 ist*

$$|x| > 1.5, \qquad x \in (-\infty\,,\, -1.5) \cup (1.5,\, +\infty)$$

Lösen Sie graphisch folgende Betragsungleichungen und schreiben Sie die Lösungen algebraisch auf:

$a)\ |\, x - 3\,| \leqslant 2,\qquad b)\ |\, x + 1\,| \geqslant 4,\qquad c)\ |\, x - 7\,| \geqslant 1.5$

$d)\ |\, x - 1\,| < 4,\qquad e)\ |\, x + 3\,| > 6,\qquad f)\ |\, x - 5\,| < 3$

Die algebraischen Lösungen:

$a)\ |\, x - 3\,| \leqslant 2, \qquad x = [1,\ 5]$

$b)\ |\, x + 1\,| \geqslant 4, \qquad x = (-\infty,\ -5\,] \cup [\,3,\ +\infty\,)$

$c)\ |\, x - 7\,| \geqslant 1.5, \qquad x = (-\infty,\ 5.5\,] \cup [\,8.5,\ +\infty\,)$

$d)\ |\, x - 1\,| < 4, \qquad x = (-3,\ 5)$

$e)\ |\, x + 3\,| > 6, \qquad x = (-\infty,\ -9) \cup (3,\ +\infty)$

$f)\ |\, x - 5\,| < 3, \qquad x = (2,\ 8)$


Abstand von 2 Einheiten
Abstand von 2 Ei
−1
0
1
2
BETRAG