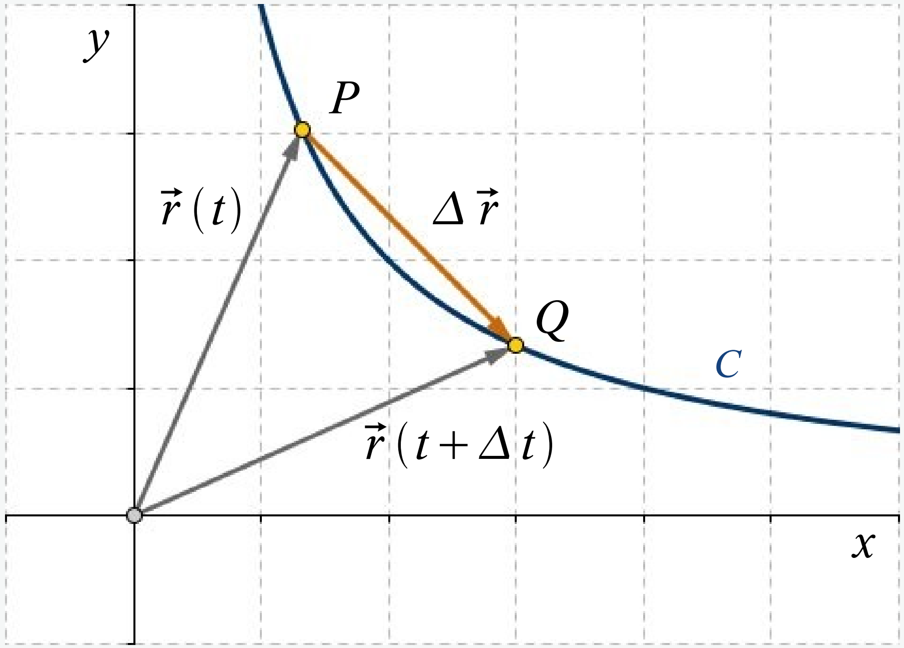

Abb. 2-1: Zum Begriff des Tangentenvektors einer Kurve

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix}, \qquad \Delta\,\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta\,t) - \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t + \Delta\,t) - x\,(t) \\ y\,(t + \Delta\,t) - y\,(t) \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\Delta\,r/\Delta\,t$ geht beim Grenzübergang $\Delta\,t \to 0$ in den Tangentenvektor über

$$\lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{\Delta\,\vec{r}}{\Delta\,t} = \lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t + \Delta\,t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta\,t} = \begin{pmatrix} \dot{x}\,(t) \\ \dot{y}\,(t) \end{pmatrix}$$

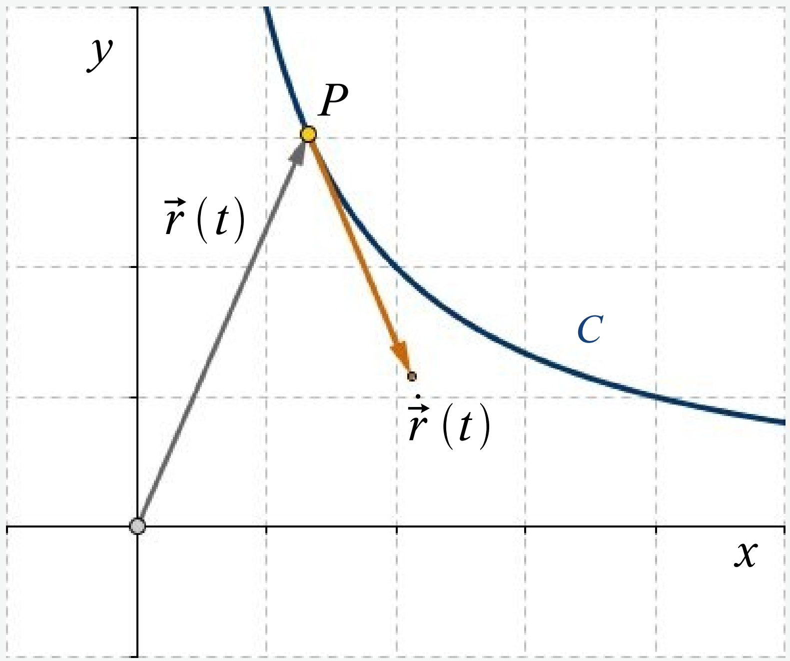

Abb. 2-2: Orts- und Tangentenvektor einer Kurve

$$\frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{d\,x\,(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{d\,y\,(t)}{dt}\,\vec{j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\vec{r}}\,(t) = \dot{x}\,(t)\,\vec{i} + \dot{y}\,(t)\,\vec{j}$$

Der Tangentenvektor entsteht aus dem Ortsvektor durch komponentenweise Differentiation nach dem Parameter t und wird als 1. Ableitung des Ortsvektors bezeichnet.

Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von folgenden Vektorfunktionen:

$$a)\quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} (v_0 \cdot \cos\alpha)\ t \\ (v_0 \cdot \sin\alpha)\ t - \dfrac{1}{2}\ g\,t^2 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos t \\ 0.2\,t^2\ \sin t \\ 10\,\sqrt{t} \end{pmatrix}, \qquad d)\quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos t \\ 4\,\sqrt{t}\ \sin t \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

$$a)\quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} (v_0 \cdot \cos\alpha)\ t \\ (v_0 \cdot \sin\alpha)\ t - \dfrac{1}{2}\ g\, t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\,\vec{r}\,(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_0 \cdot \sin\alpha - g\, t \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}\,(t) = \frac{d^2\,\vec{r}\,(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\,\vec{r}\,(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 2\,t \\ 3\,t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d^2\,\vec{r}\,(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6\,t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ableitung einer Vektorfunktion: Lösung 1c

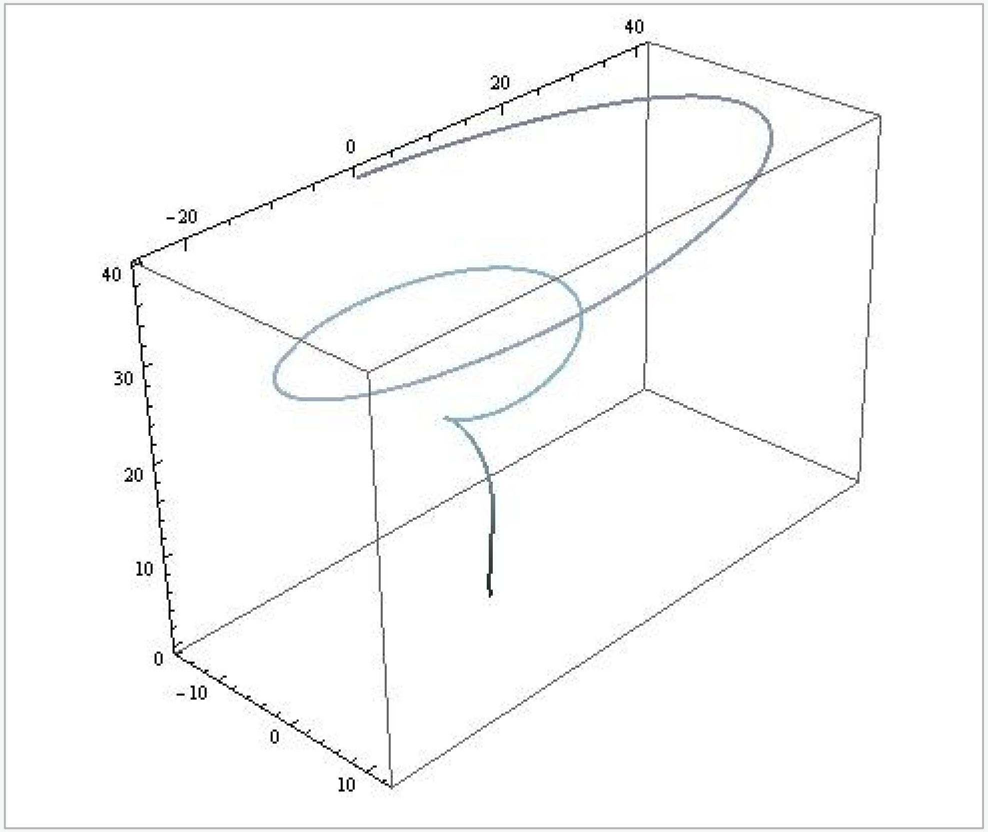

*Abb. 3-1: Graphische Darstellung der Vektorfunktion **r** (t) im 3D-Raum*

$$\frac{d\,\vec{r}\,(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t - t\,\sin t \\ 0.2\,t\,\left(2\sin t + t\cos t\right) \\ \dfrac{5}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{d^2\,\vec{r}\,(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} -2\sin t - t\,\cos t \\ 0.2\,(2-t^2)\sin t + 0.8\,t\cos t \\ -\dfrac{5}{2\,t\,\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

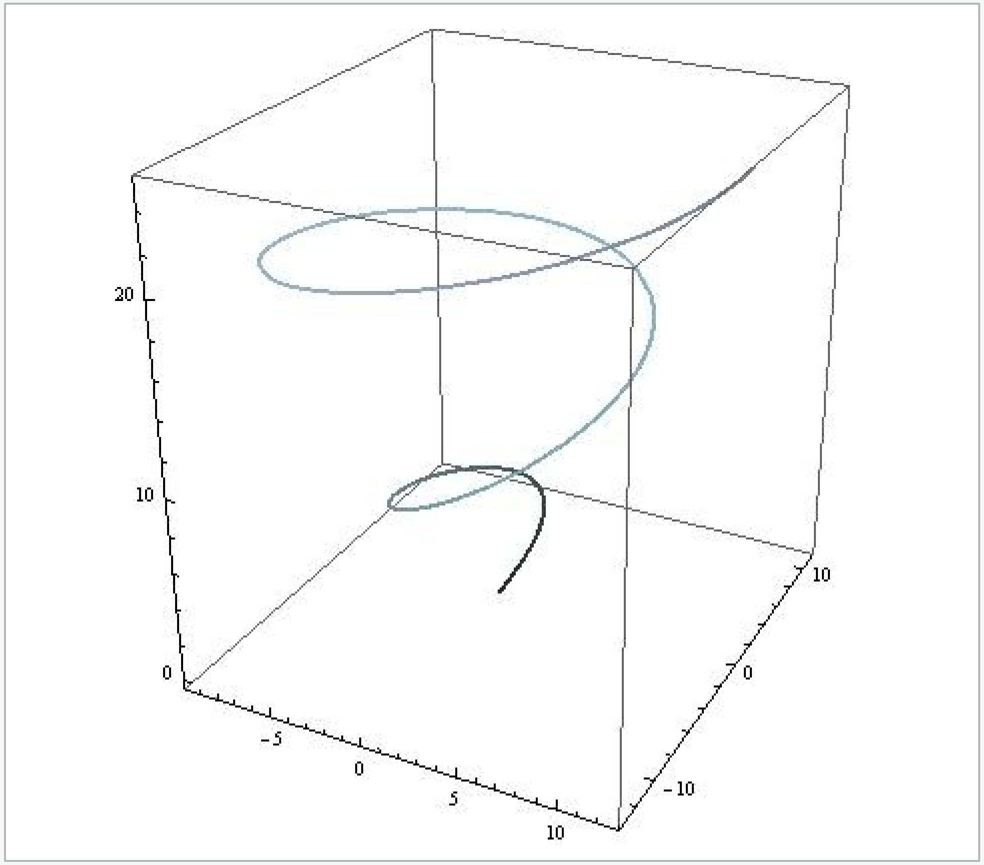

*Abb. 3-2: Graphische Darstellung der Vektorfunktion **r** (t) im 3D-Raum*

$$\frac{d\,\vec{r}\,(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \dfrac{2\sin t}{\sqrt{t}} + 4\sqrt{t}\,\cos t \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\,\vec{r}\,(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ -\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t}} + \dfrac{4\cos t}{\sqrt{t}} - 4\sqrt{t}\,\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1)\quad \frac{d}{dt}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{d\,\vec{a}}{dt}+\frac{d\,\vec{b}}{dt}+\frac{d\,\vec{c}}{dt}$$

$$2)\quad \frac{d}{dt}\left(\varphi\,\vec{a}\right)=\frac{d\,\varphi}{dt}\,\vec{a}+\varphi\,\frac{d\,\vec{a}}{dt}$$

$$3)\quad \frac{d}{dt}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=\frac{d\,\vec{a}}{dt}\,\vec{b}+\vec{a}\,\frac{d\,\vec{b}}{dt}$$

$$4)\quad \frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\frac{d\,\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\,\vec{b}}{dt}$$

$$5)\quad \frac{d}{dt}\,\vec{a}\left(\varphi\left(t\right)\right)=\frac{d\,\vec{a}}{d\,\varphi}\cdot\frac{d\,\varphi}{dt}$$

2) φ ist eine skalare Funktion von t

4) die Faktoren dürfen nicht vertauscht werden

5) Kettenregel

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Tangentenvektor an die Raumkurve

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \\ e^{2\,t+3} \end{pmatrix}$$

im Kurvenpunkt P mit dem Parameterwert $t = 0$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor (1. Ableitung) und den Beschleunigungsvektor (2. Ableitung) für die schraubenlinienförmige Bahnkurve eines Elektrons in einem Magnetfeld.

Lösung 2:

$$\frac{d\,\vec{r}\,(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t \,-\, t\sin t \\ \sin t \,+\, t\cos t \\ 2\,e^{2\,t+3} \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\,\vec{r}\,(t=0)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\,e^{3} \end{pmatrix}$$

Lösung 3:

$$\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} -R\,\omega\ \sin(\omega\,t) \\ R\,\omega\ \cos(\omega\,t) \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}\,(t) = -R\,\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$