http://www.wulflund.com/images_items/iron-leaf-pendant--lime-tree_2.jpg

Vektoranalysis

Komponentendarstellung eines Vektors:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Ortsvektor:

$$\vec{r}\,(P) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\,\vec{i}\,| = |\,\vec{j}\,| = |\,\vec{k}\,| = 1\,, \qquad \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

Normierung eines Vektors: $\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}$

Betrag

$$|\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x, a_y, a_z\right) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z$$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Die Parametergleichungen $x = g(t)$, $y = h(t)$ definieren bekanntlich eine Kurve C in der x, y-Ebene:

$$C: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

Der zum Parameterwert t gehörige Kurvenpunkt $P = (x(t), \ y(t))$ ist eindeutig durch seinen Orstvektor bestimmt:

$$\vec{r}(P) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

Beim Durchlaufen sämtlicher t-Werte von t_1 bis t_2 bewegt sich der Punkt P längs der Kurve C

$$\text{von} \quad P_1(x(t_1), y(t_1)) \quad \text{bis} \quad P_2(x(t_2), y(t_2))$$

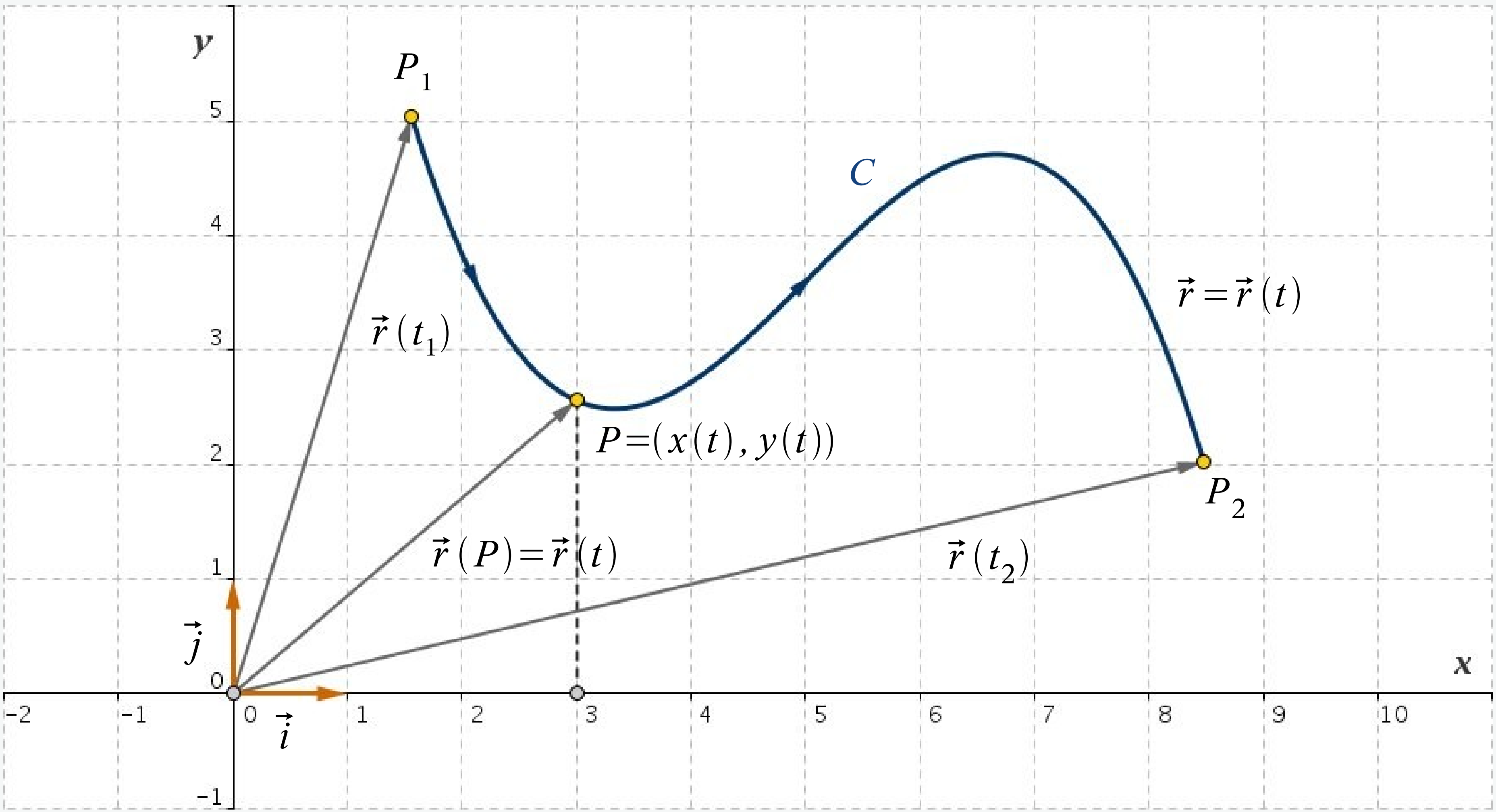

Abb. 1-1: Vektordarstellung einer ebenen Kurve

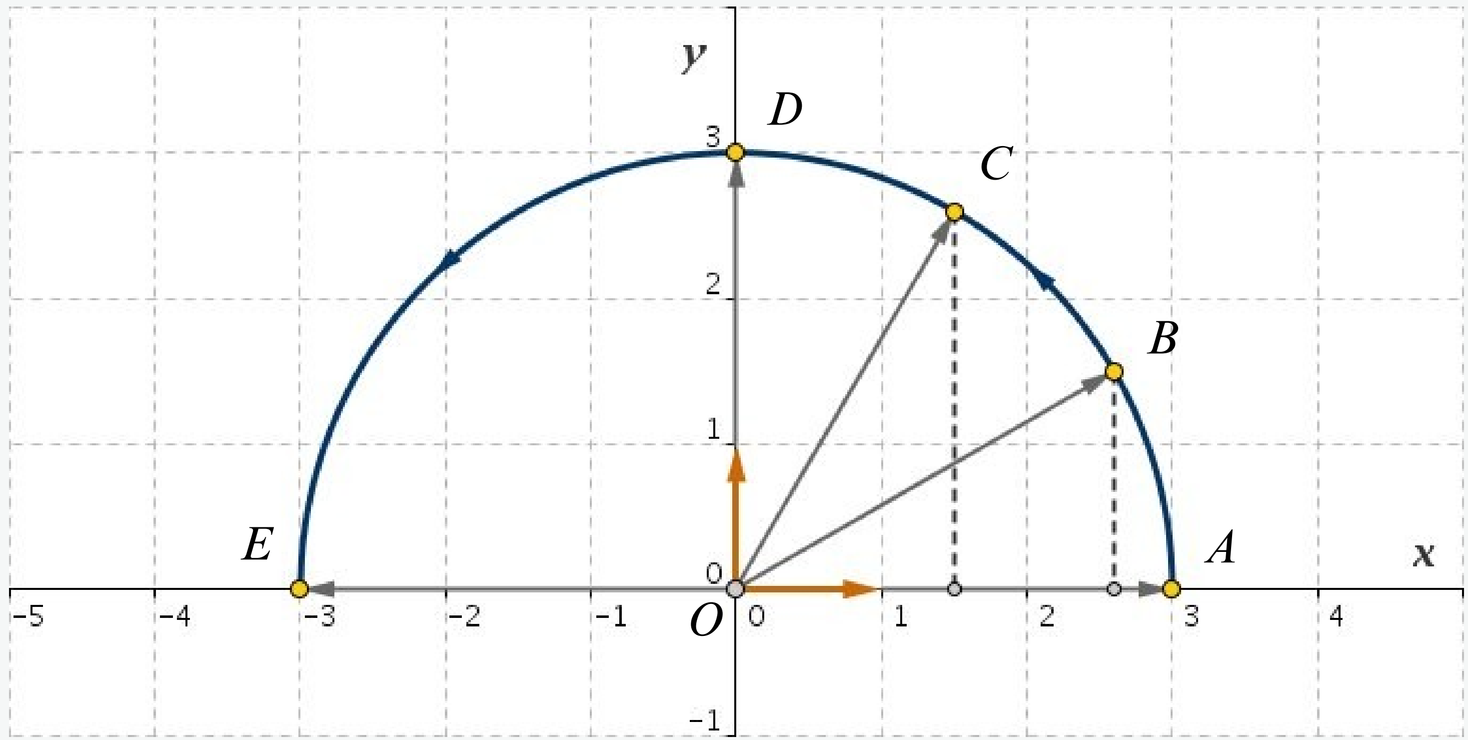

Abb. 1-2: Vektordarstellung einer ebenen Kurve

$$C: \quad x = 3\cos\varphi\,, \qquad y = 3\sin\varphi\,, \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

$$\vec{r}\,(\varphi) = x\,(\varphi)\,\vec{i} + y\,(\varphi)\,\vec{j} = 3\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

Zur Beschreibung der Abbildung 1-2:

$$\varphi_1 = 0 : \quad x(\varphi_1) = 3, \quad y(\varphi_1) = 0, \quad A = (3, 0), \quad \overrightarrow{OA} = \vec{r}\,(\varphi_1)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{6} : \quad x(\varphi_2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y(\varphi_2) = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{3}{2}\,(\sqrt{3}\,,\ 1), \quad \overrightarrow{OB} = \vec{r}\,(\varphi_2)$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{3} : \quad x(\varphi_3) = \frac{3}{2}, \quad y(\varphi_3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad C = \frac{3}{2}\,(1,\ \sqrt{3}), \quad \overrightarrow{OC} = \vec{r}\,(\varphi_3)$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{2} : \quad x(\varphi_4) = 0, \quad y(\varphi_4) = 3, \quad D = (0,\ 3), \quad \overrightarrow{OD} = \vec{r}\,(\varphi_4)$$

$$\varphi_5 = \pi : \quad x(\varphi_5) = -3, \quad y(\varphi_5) = 0, \quad E = (-3,\ 0), \quad \overrightarrow{OE} = \vec{r}\,(\varphi_5)$$

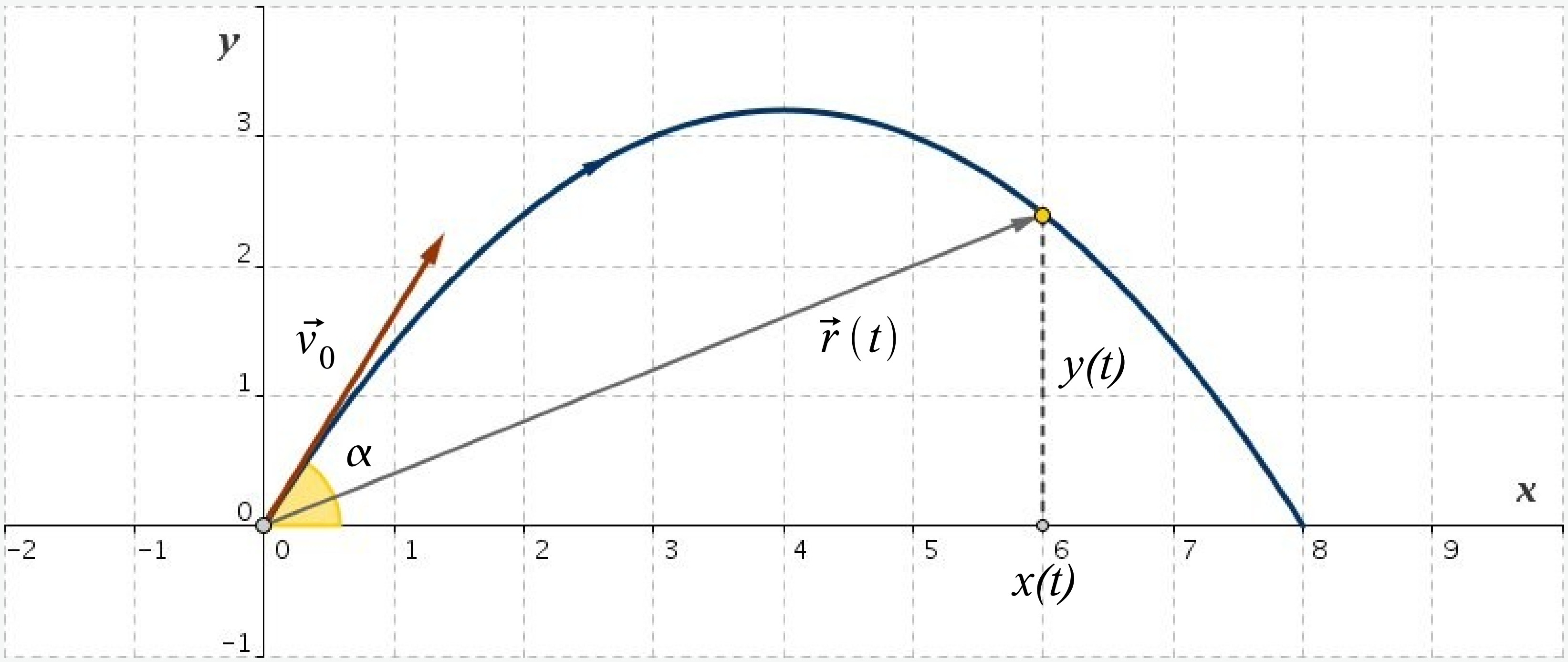

Abb. 1-3: Vektordarstellung einer ebenen Kurve: Schiefer Wurf

Ein Körper wird unter einem Winkel α gegen die Horizontale mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ geworfen. Die Bahnkurve ist eine Parabel, auch Wurfparabel genannt, und kann durch folgende Parametergleichungen beschrieben

$$x\,(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha)\; t$$

$$y\,(t) = (v_0 \cdot \sin\alpha)\; t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (t \geqslant 0)$$

Die Bahnkurve, die durch den zeitabhängigen Ortsvektor beschrieben wird:

$$\vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\vec{i} + y\,(t)\,\vec{j} =$$

$$= \begin{pmatrix} (v_0 \cdot \cos\alpha)\ t \\ (v_0 \cdot \sin\alpha)\ t - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{pmatrix}$$

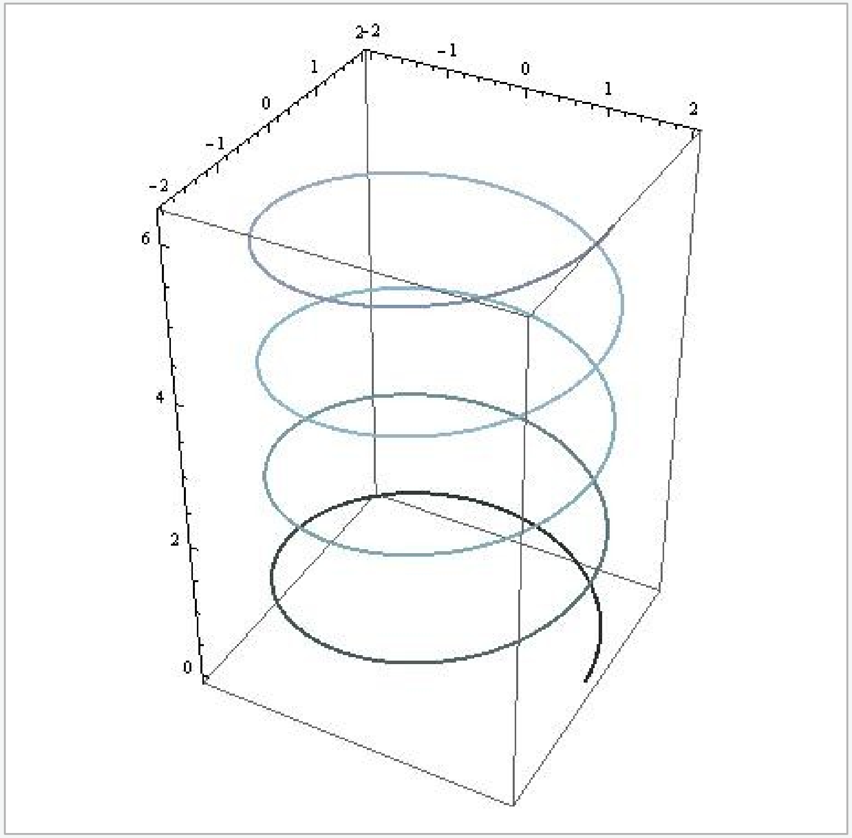

Abb. 1-3: Schraubenlinienförmieg Bahn eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld

Elektronen, die schief in ein homogenes Magnetfeld eingeschossen werden, bewegen sich auf einer Schraubenlinie um die Feldrichtung (z-Achse). Die Bahnkurve lässt sich durch die Parametergleichungen:

$$x(t) = R\cos(\omega t), \qquad y(t) = R\sin(\omega t), \qquad z(t) = v_z t, \qquad (t \geqslant 0)$$

Die Bahnkurve kann auch durch den zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}\,(t) = R\,\cos(\omega\,t)\,\vec{i} + R\,\sin(\omega\,t)\,\vec{j} + v_z\,t\,\vec{k} =$$

$$= \begin{pmatrix} R\,\cos(\omega\,t) \\ R\,\sin(\omega\,t) \\ v_z\,t \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

ω – Winkelgeschwindigkeit

R – Radius einer Kreisbahn

v – konstante Geschwindigkeit in Feldrichtung