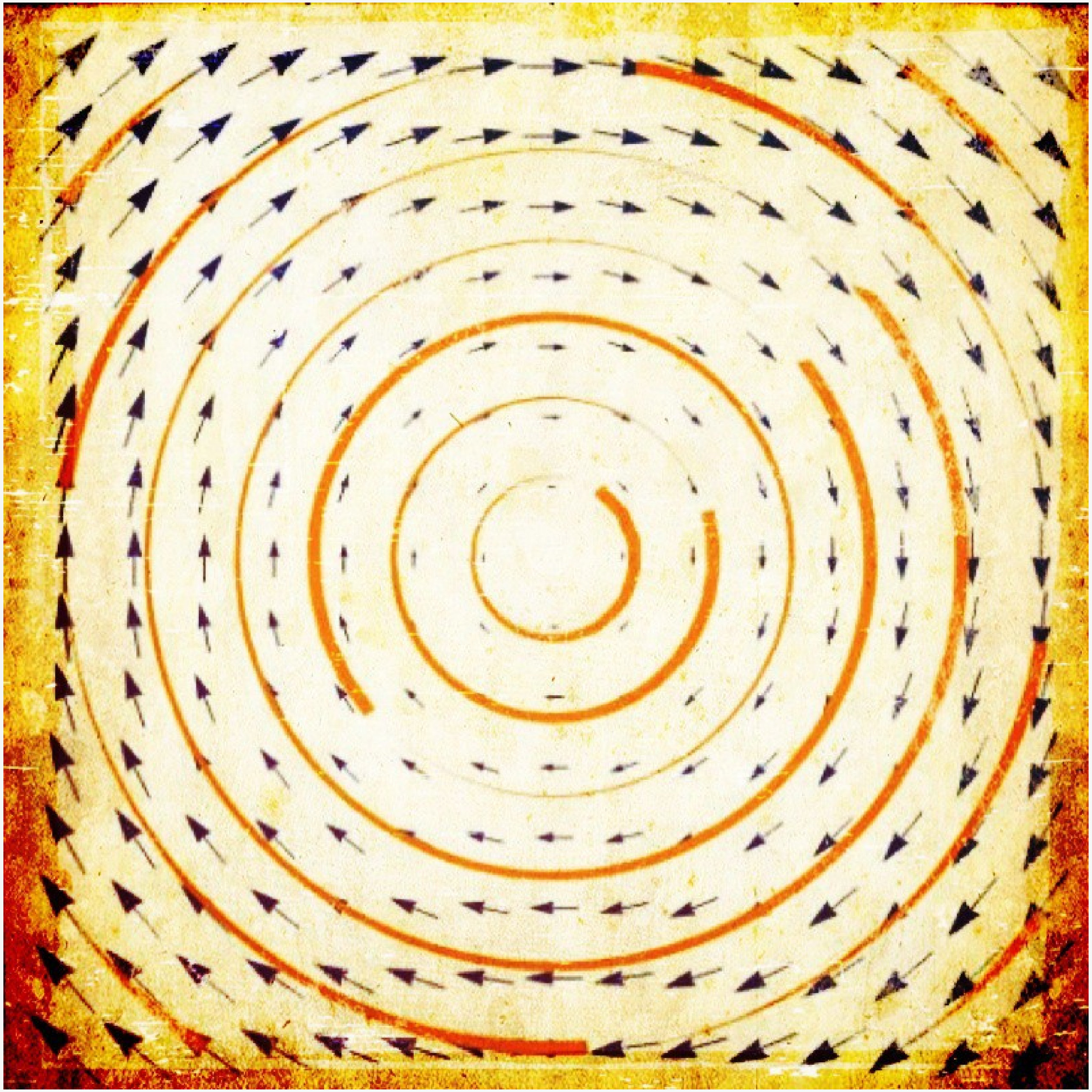

*Rotation*

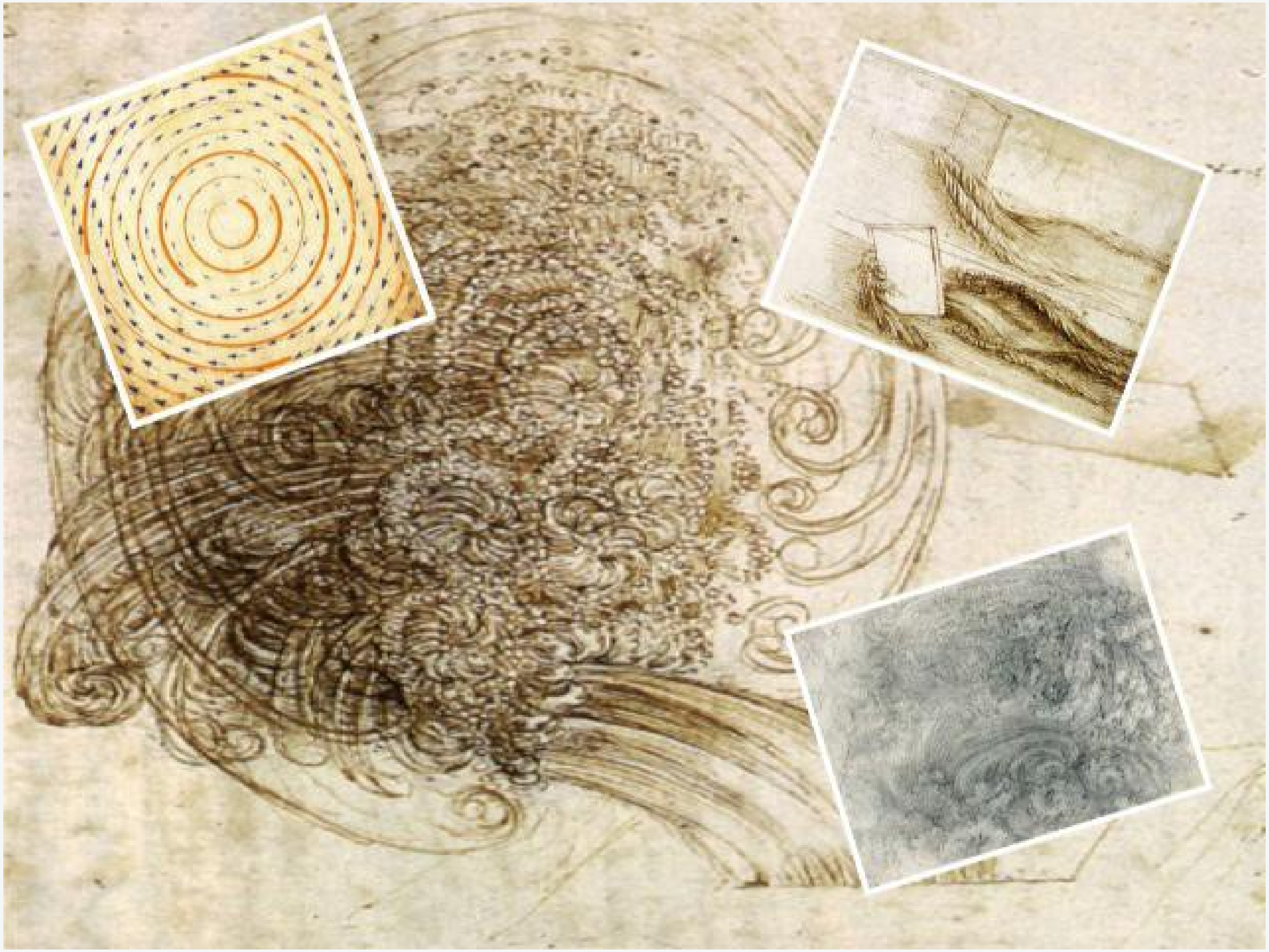

*Abb. 1-1: Turbulenz Leonardo da Vinci*

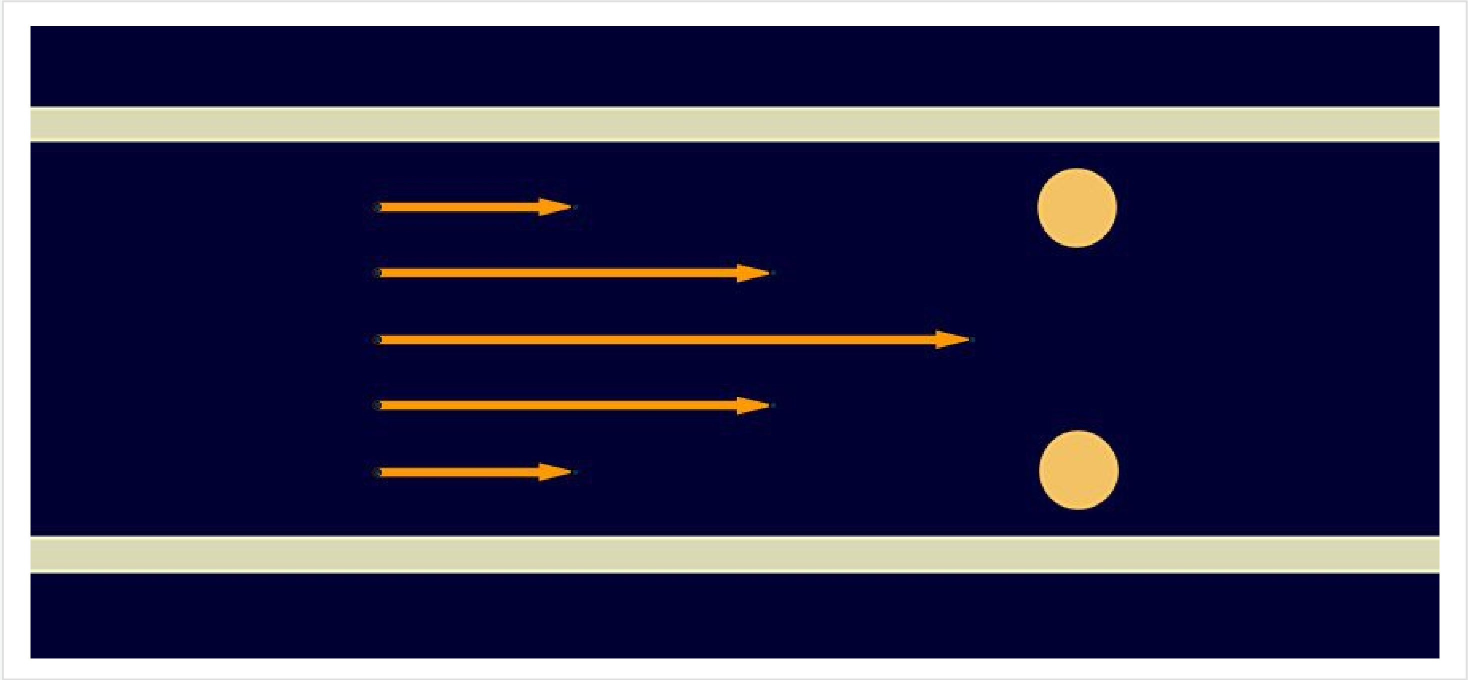

*Abb. 1-2: Fließendes Wasser in einem Kanal*

Es wird das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung betrachtet, z.B. fließendes Wasser in einem Kanal. Wegen der Reibung am Kanalufer sind die Geschwindigkeitsvektoren in Ufernähe kleiner als in der Kanalmitte. Kleine auf dem Wasser schwimmende Scheiben drehen sich.

Nur in Kanalmitte schwimmende Scheiben drehen sich (theoretisch) nicht. Um (an Stelle der Scheiben) die Rotation sehr kleiner Flüssigkeitsteilchen zu beschreiben, wird eine weitere Operation im Vektorfeld eingeführt.

http://www.cora.nwra.com/~werne/eos/images/eddy-davinci.jpg

*Abb. 1-3: Turbulenz Leonardo da Vinci*

Unter der Rotation eines Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ versteht man das Vektorfeld

$$rot\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

1. Für ein ebenes Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ gilt:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}, \qquad rot\,\vec{F} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

2. Die Bezeichnung “Rotation” stammt aus der Hydrodynamik und beschreibt dort die Bildung von “Wirbeln”.

3. Der Vektor rot $\boldsymbol{F}$ bezeichnet die Wirbeldichte des Feldes $\boldsymbol{F}$.

4. Ist in allen Punkten eines Vektorfeldes $rot\,\boldsymbol{F} = 0$, so heißt das Feld wirbelfrei.

   Die folgenden Vektorfelder der Physik sind wirbelfrei:

   - Homogene Vektorfelder (z.B. elektrisches Feld in einem Plattenkondensator)
   - Zentralfelder (z.B. elektrisches Feld einer Punktladung)
   - Zylinderfeld (z.B. elektrisches Feld in der Umgebung eines geladenen Zylinders)

$\vec{V}\,,\ \vec{V}_{1,}\ \vec{V}_2$ – Vektorfelder; $\phi$ – Skalarfeld

$\vec{a}$ – ein konstanter Vektor; $c$ – eine Konstante

$$rot\ \vec{a} = \vec{0}$$

$$rot\ (c\,\vec{V}) = c\ rot\ \vec{V}$$

$$rot\ (\vec{V} + \vec{a}) = rot\ \vec{V}$$

$$rot\ (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = rot\ \vec{V}_1 + rot\ \vec{V}_2$$

$$rot\ (\phi\,\vec{V}) = \phi\ rot\ \vec{V} - \vec{V} \times grad\ \phi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times (c\,\vec{V}) = c\ (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V} + \vec{a}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 + \vec{\nabla} \times \vec{V}_2$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi\ \vec{V}) = \phi\,(\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla}\,\phi)$$

In den Abbildungen *2-1, 2-2* und *2-3* werden drei Vektorfelder dargestellt. Was kann man über die Rotation dieser Vektorfelder sagen? Prüfen Sie es durch direkte Rechnungen

*Abb. 2-1:* $\vec{F} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$

*Abb. 2-2:* $\vec{F} = y\ \vec{i} - x\ \vec{j}$

*Abb. 2-3:* $\vec{F} = -y\ \vec{i}$

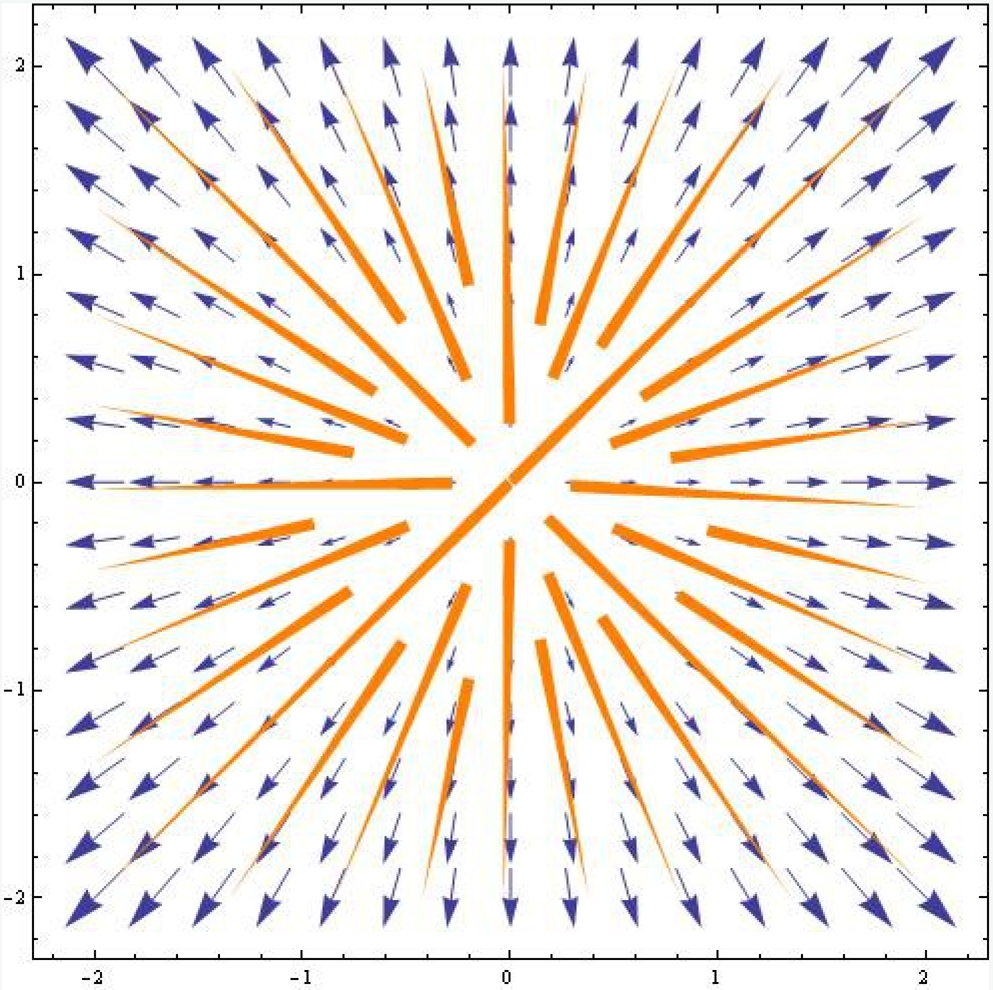


*Abb. 2-1: Das Vektorfeld der Funktion $F(x, y) = (x, y)$*

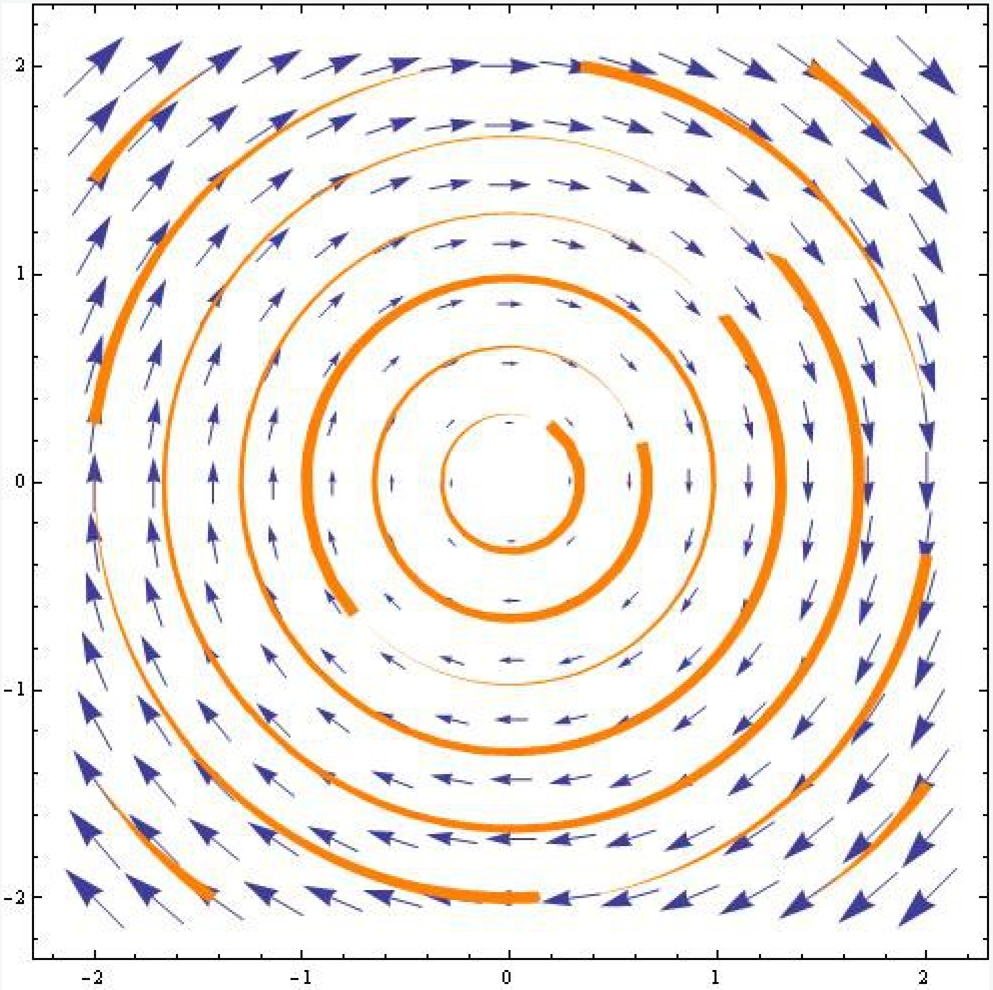


*Abb. 2-2: Das Vektorfeld der Funktion F (x, y) = (y, -x)*

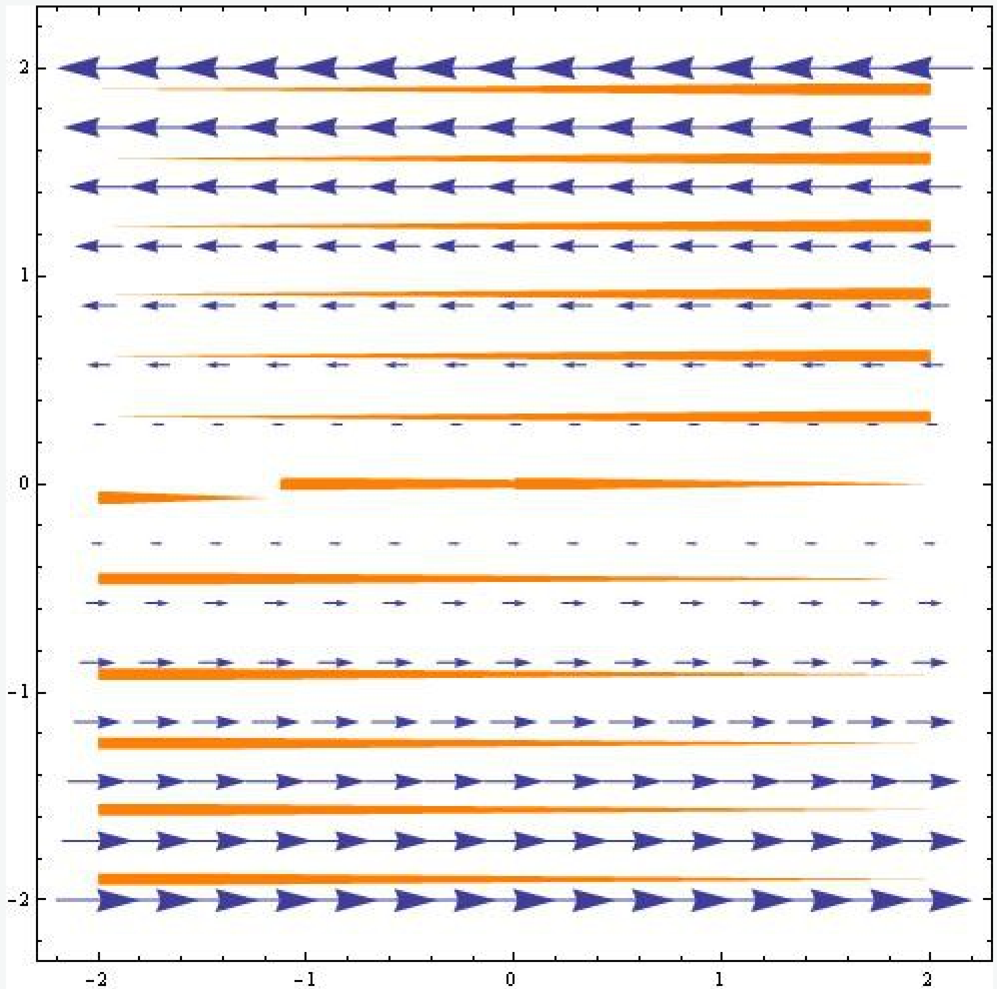


*Abb. 2-3: Das Vektorfeld der Funktion $F(x, y) = (-y, 0)$*

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\,, \qquad rot\,\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}\,, \qquad rot\,\vec{F} = -2\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = -y\,\vec{i}\,, \qquad rot\,\vec{F} = \vec{k}$$

Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder:

$a)\quad \vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

$b)\quad \vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} + x\,y\,\vec{j}$

$c)\quad \vec{F}(x, y) = \dfrac{y\,\vec{i} + x\,\vec{j}}{x^2 + y^2}$

$d)\quad \vec{F}(x, y, z) = x \cdot \vec{i} + 2\,y \cdot \vec{j} + 3\,z \cdot \vec{k}$

$e)\quad \vec{F}(x, y, z) = x\,y \cdot \vec{i} + y\,z \cdot \vec{j} + x\,z \cdot \vec{k}$

$f)\quad \vec{F}(x, y, z) = y\,z \cdot \vec{i} + x\,z \cdot \vec{j} + x\,y \cdot \vec{k}$

$g)\quad \vec{F}(x, y, z) = e^{x} \cdot \vec{r}$

$a)\quad \vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}, \qquad rot\,\vec{F} = \vec{0}$

$b)\quad \vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} + x\,y\,\vec{j}, \qquad rot\,\vec{F} = y\,\vec{k}$

$c)\quad \vec{F}(x, y) = \dfrac{y\,\vec{i} + x\,\vec{j}}{x^2 + y^2}, \qquad rot\,\vec{F} = \dfrac{2\,(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\,\vec{k}$

$d)\quad \vec{F}(x, y, z) = x \cdot \vec{i} + 2\,y \cdot \vec{j} + 3\,z \cdot \vec{k}, \qquad rot\,\vec{F} = \vec{0}$

$e)\quad \vec{F}(x, y, z) = x\,y \cdot \vec{i} + y\,z \cdot \vec{j} + x\,z \cdot \vec{k}$

$rot\,\vec{F} = -\,y \cdot \vec{i} - z \cdot \vec{j} - x \cdot \vec{k}$

$f)\quad \vec{F}(x, y, z) = y\,z \cdot \vec{i} + x\,z \cdot \vec{j} + x\,y \cdot \vec{k}, \qquad rot\,\vec{F} = \vec{0}$

$g)\quad \vec{F}(x, y, z) = e^x \cdot \vec{r} = e^x\,(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})$

$rot\,\vec{F} = e^x\,(-z \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k})$

## Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Rotation der folgenden ebenen Vektorfelder:

$$a)\quad \vec{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \vec{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x - y + 2 \\ x + y - 1 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass folgende Vektorfelder wirbelfrei sind

$$a)\quad \vec{F} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right)$$

$$b)\quad \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}, \qquad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \quad r \neq 0$$

## Aufgabe 5:

$\Phi = \Phi\,(x, y, z)$ sei ein Skalarfeld. Zeigen Sie, dass

$$rot\ grad\ \Phi = \vec{0} \qquad bzw. \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\ \Phi) = \vec{0}$$

## Aufgabe 6:

Wie sind die Parameter $a$ und $b$ zu wählen, damit die Rotation des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ überall verschwindet?

$$\vec{F} = (2\,x\,z^2 + y^3\,z)\ \vec{i} + a\,x\,y^2\,z\ \vec{j} + (2\,x^2\,z + b\,x\,y^3)\ \vec{k}$$

Lösung 3:

$$a)\quad \vec{F}(x, y) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \qquad rot\,\vec{F} = -\frac{\vec{k}}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$b)\quad \vec{F}(x, y) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x - y + 2 \\ x + y - 1 \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$rot\,\vec{F} = \frac{x^2 + y^2 + x + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,\vec{k} = (x^2 + y^2 + x + 2y)\,\frac{\vec{k}}{r^3}$$

Lösung 4: $a)\quad rot\,\vec{F} = \vec{0}$

$$b)\quad \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}, \qquad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \quad r \neq 0$$

$$rot\,\vec{F} = \left(-\frac{2yz}{r^4} + \frac{2yz}{r^4},\ -\frac{2xz}{r^4} + \frac{2xz}{r^4},\ -\frac{2xy}{r^4} + \frac{2xy}{r^4}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial r^{-2}}{\partial x} = -2r^{-3}\,\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{2x}{r^4}, \qquad \frac{\partial r^{-2}}{\partial y} = -\frac{2y}{r^4}, \qquad \frac{\partial r^{-2}}{\partial z} = -\frac{2z}{r^4}$$

Lösung 5:

$$rot\ grad\ \Phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = \vec{0}$$

(nach dem Satz von Schwarz).

Lösung 6:

$$\vec{F} = (2\,x\,z^2 + y^3 z)\,\vec{i} + a\,x\,y^2 z\,\vec{j} + (2\,x^2 z + b\,x\,y^3)\,\vec{k}$$

$$rot\,\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} (3\,b - a)\; x\,y^2 \\ (1 - b)\,y^3 \\ (a - 3)\; y^2 z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3\,b - a = 0, \quad 1 - b = 0, \quad a - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = 1$$