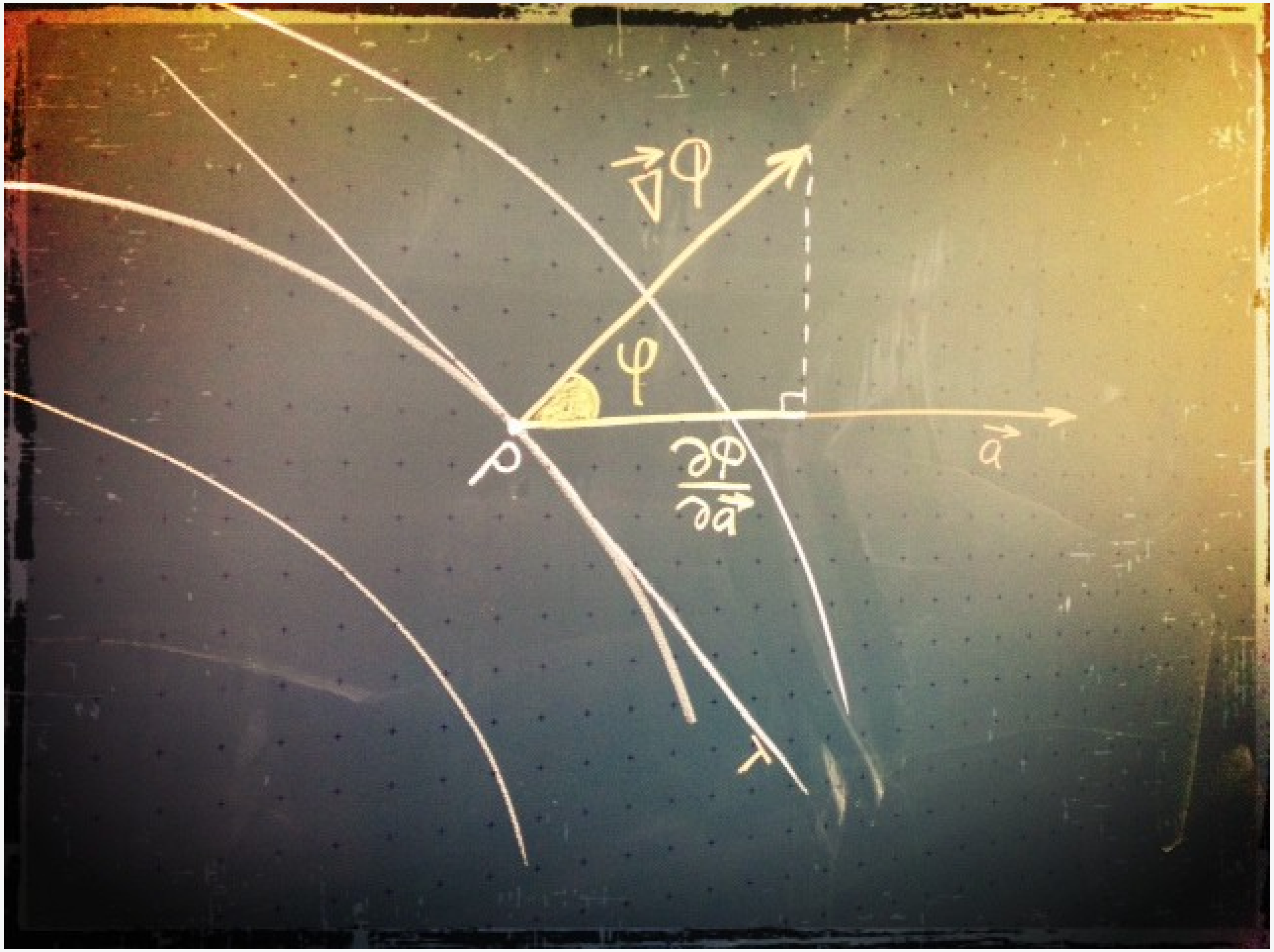


Richtungsableitung

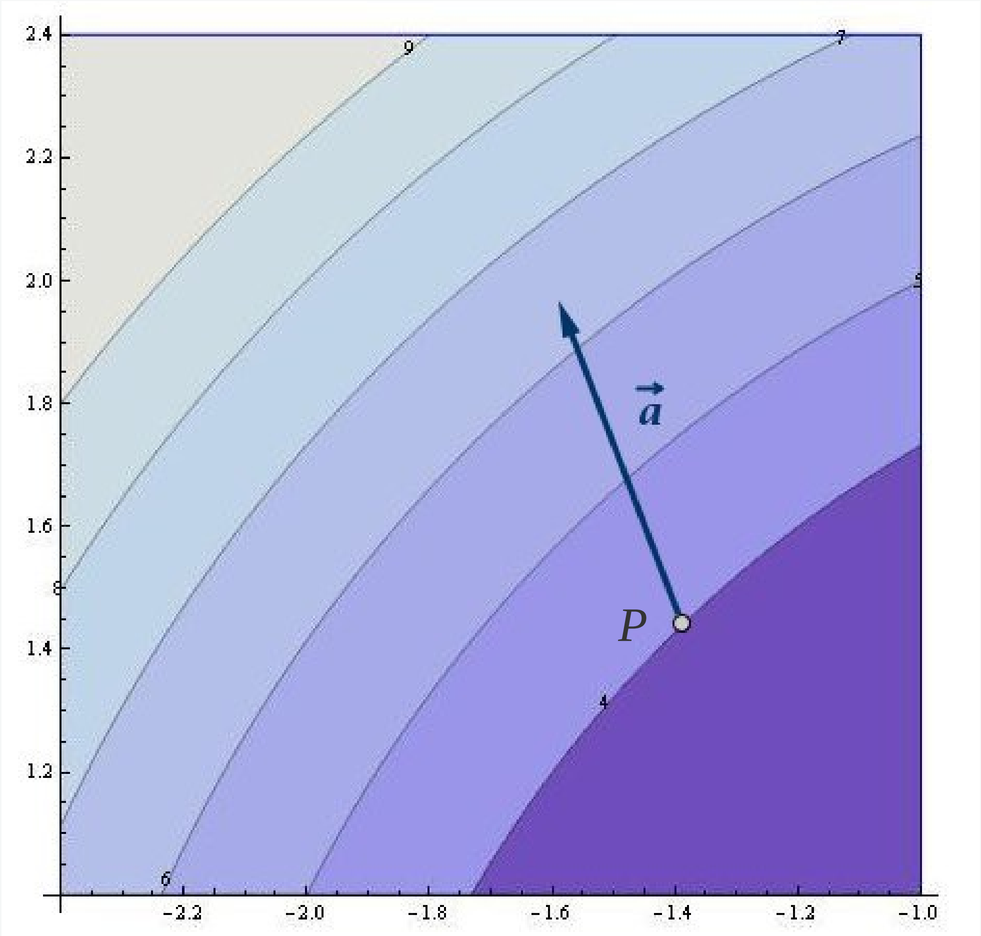


Abb. 1: Höhenliniendiagramm eines Skalarfeldes $\Phi = f(x, y)$, Punkt P, Vektor $\mathbf{a}$

Häufig interessiert man sich für die Änderung des Funktionswertes einer skalaren Funktion Φ, wenn man von einem Punkt P aus in einer bestimmter Richtung fortschreitet.

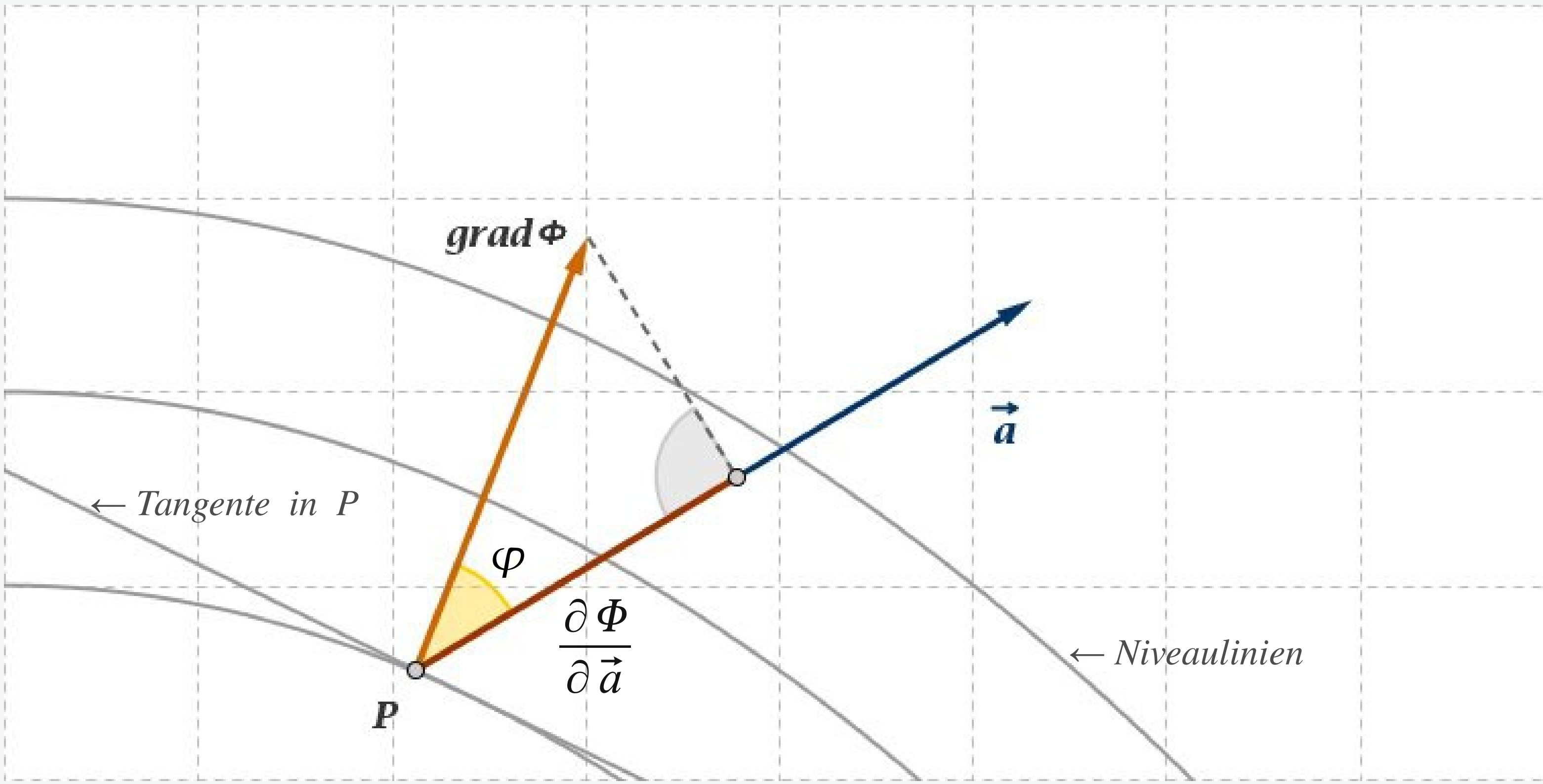


Abb. 2: Zum Begriff der Richtungsableitung eines skalaren Feldes

In der Mathematik ist die Richtungsableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion die Änderungsrate dieser Funktion in einer durch einen Vektor, z.B. Vektor ***a***, vorgegebenen Richtung

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{a}} = grad\, \Phi \cdot \vec{e}_a = grad\, \Phi \cdot \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}}$$

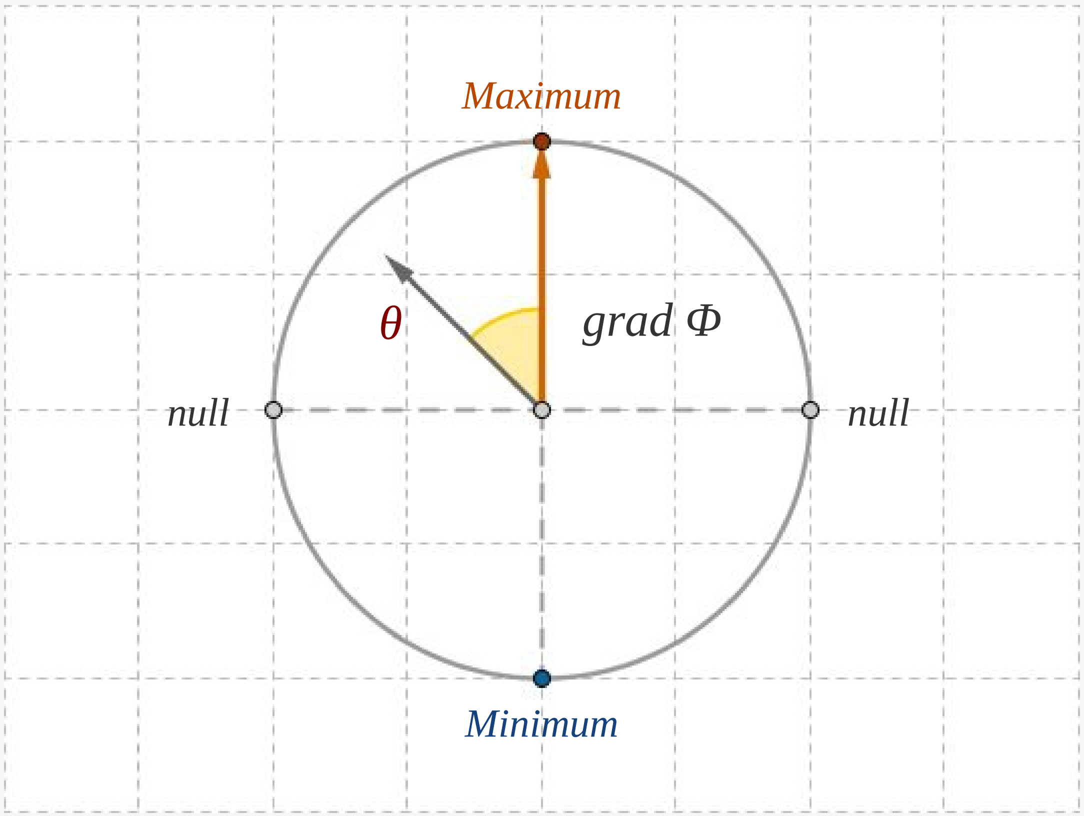


Abb. 3: Werte der Richtungsableitungen bei verschiedenen Winkeln des Gradienten

Die Richtungsableitung eines ebenen Skalarfeldes Φ in Richtung eines Einheitsvektors ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{e}} = grad\ \phi \cdot \vec{e} \ = |\, grad\ \phi \,| \cdot \underbrace{|\, \vec{e} \,|}_{1} \cos\theta = |\, grad\ \phi \,| \cdot \cos\theta$$

$$\textit{Maximum} \quad \phi_{\vec{e}}\,(x\,,\,y) = |\,\textit{grad}\ \phi\,| \cdot \cos 0 \;=|\,\textit{grad}\ \phi\,|$$

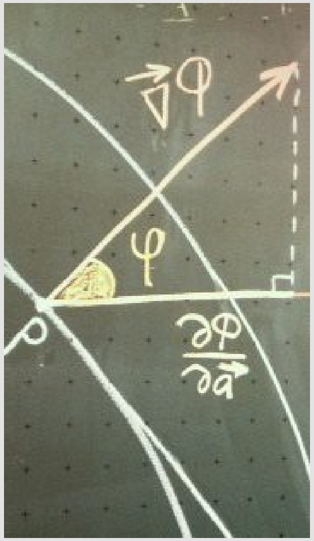
$$\textit{Minimum} \quad \phi_{\vec{e}}\,(x\,,\,y) = |\,\textit{grad}\ \phi\,| \cdot \cos \pi \;= -|\,\textit{grad}\ \phi\,|$$

$$\textit{Null} \quad \phi_{\vec{e}}\,(x\,,\,y) = |\,\textit{grad}\ \phi\,| \cdot \cos \frac{\pi}{2} \;=\; 0$$

$$\textit{Null} \quad \phi_{\vec{e}}\,(x\,,\,y) = |\,\textit{grad}\ \phi\,| \cdot \cos \frac{3\,\pi}{2} \;=\; 0$$

Die Richtungsableitung ist von Richtung zu Richtung verschieden und erreicht ihren Maximalwert, wenn der Richtungsvektor $\boldsymbol{a}$ und damit auch der entsprechende Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ in die Richtung des Gradienten von Φ zeigen.

Die Richtungsableitung von Φ in Richtung eines Vektors $\boldsymbol{e}$ ist nichts anderes als die Projektion des Gradienten $\textit{grad}\ \Phi$ auf die Gerade mit Richtung $\boldsymbol{e}$.



Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3xy$$

im Raumpunkt $P = (3, 2)$ in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = (1, -2)$$

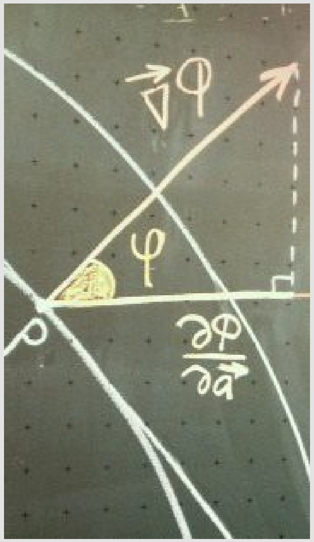
Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\Phi(x, y, z)$

$$\Phi(x, y, z) = x y z + 3 x z^3$$

im Raumpunkt $P = (1, 2, 1)$ in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = (1, -2, 2)$$



Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\Phi\,(x, y)$

$$\Phi\,(x\,,\,y) = x + e^{y}$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung der Vektoren

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}\,, \qquad \vec{b} = \vec{i} + 2\,\vec{j}\,, \qquad \vec{c} = \vec{i} + 3\,\vec{j}$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $\Phi\,(x, y)$

$$\Phi\,(x\,,\,y) = e^{\,x} \tan y + 2\,x^2\,y$$

im Punkt $P = (0, \pi/4)$ in Richtungen der Vektoren

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}\,, \qquad \vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\phi(x, y) = x^2 + 3xy, \qquad \vec{a} = (1, -2), \qquad P = (3, 2)$$

Wir normieren zuerst den Richtungsvektor ***a***

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir den Gradient von Φ im Punkt P:

$$grad\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x \end{pmatrix}, \qquad (grad\,\phi)_P = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} \right)_P = (grad\,\phi)_P \cdot \vec{e}_a = \frac{3}{\sqrt{5}} (4, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\phi(x, y, z) = x\,y\,z + 3\,x\,z^3, \qquad \vec{a} = (1, -2, 2), \qquad P = (1, 2, 1)$$

Wir normieren den Richtungsvektor ***a***

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir den Gradient von Φ im Punkt P:

$$grad\ \phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,z + 3\,z^3 \\ x\,z \\ x\,y + 9\,x\,z^2 \end{pmatrix}, \qquad (grad\ \phi)_P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}}\right)_P = (grad\ \phi)_P \cdot \vec{e}_a = \frac{25}{3} \simeq 8.3$$

$$\Phi(x, y) = x + e^y, \qquad \vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \qquad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}, \qquad \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$grad\ \Phi = \vec{i} + e^y \vec{j}, \qquad grad\ \Phi\,\big|_{(1,1)} = \vec{i} + e\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \qquad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}, \qquad \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{2}, \qquad |\,\vec{b}\,| = \sqrt{5}, \qquad |\,\vec{c}\,| = \sqrt{10}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}, \qquad \vec{e}_b = \frac{\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{5}}, \qquad \vec{e}_c = \frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}}$$

$$\Phi_{\vec{a}}\,(1, 1) = grad\ \Phi\,\big|_{(1,1)} \cdot \vec{e}_a = (\vec{i} + e\,\vec{j})\,\frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1 - e}{\sqrt{2}} \simeq -1.215$$

$$\Phi_{\vec{b}}\,(1, 1) = grad\ \Phi\,\big|_{(1,1)} \cdot \vec{e}_b = (\vec{i} + e\,\vec{j})\,\frac{\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{5}} = \frac{1 + 2e}{\sqrt{5}} \simeq 2.879$$

$$\Phi_{\vec{c}}\,(1, 1) = grad\ \Phi\,\big|_{(1,1)} \cdot \vec{e}_c = (\vec{i} + e\,\vec{j})\,\frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}} = \frac{1 + 3e}{\sqrt{10}} \simeq 2.895$$

$$\Phi(x, y) = e^{x} \tan y + 2x^2 y, \qquad P = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{2}, \qquad \vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}, \quad |\vec{b}| = 2$$

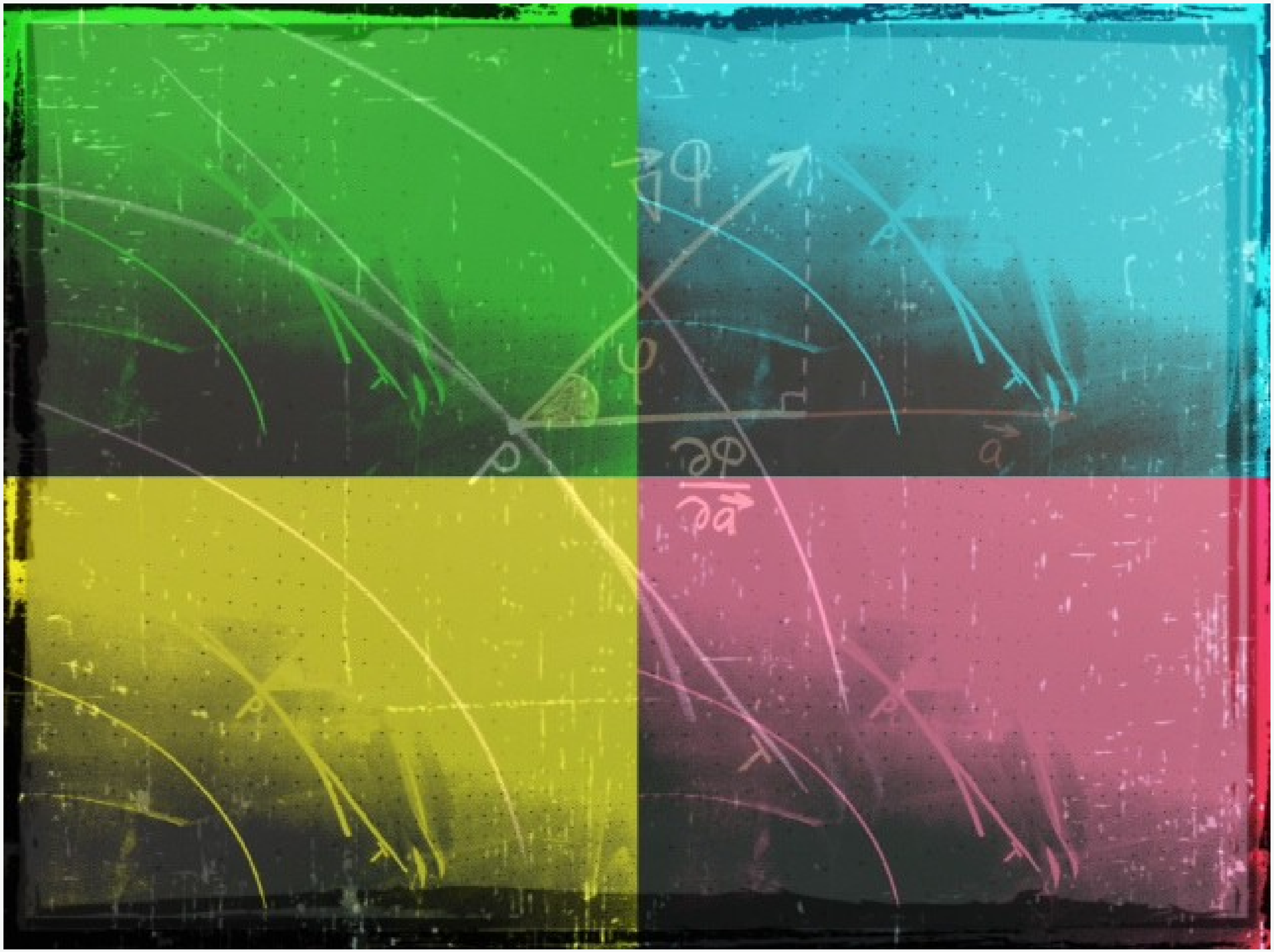
$$\vec{e}_a = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}, \qquad \vec{e}_b = \frac{\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}}{2}$$

$$grad\,\Phi = \left(e^x \tan y + 4xy\right)\vec{i} + \left(\frac{e^x}{\cos^2 y} + 2x^2\right)\vec{j}$$

$$grad\,\Phi\,\Big|_{0,\pi/4} = \vec{i} + 2\,\vec{j}$$

$$\Phi_{\vec{a}}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = grad\,\Phi\,\Big|_{\left(0, \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \vec{e}_a = (\vec{i} + 2\,\vec{j})\,\frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Phi_{\vec{b}}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = grad\,\Phi\,\Big|_{\left(0, \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \vec{e}_b = (\vec{i} + 2\,\vec{j})\,\frac{\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$



$\nabla\varphi$
φ
P
$\vec{a}$
$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{a}}$