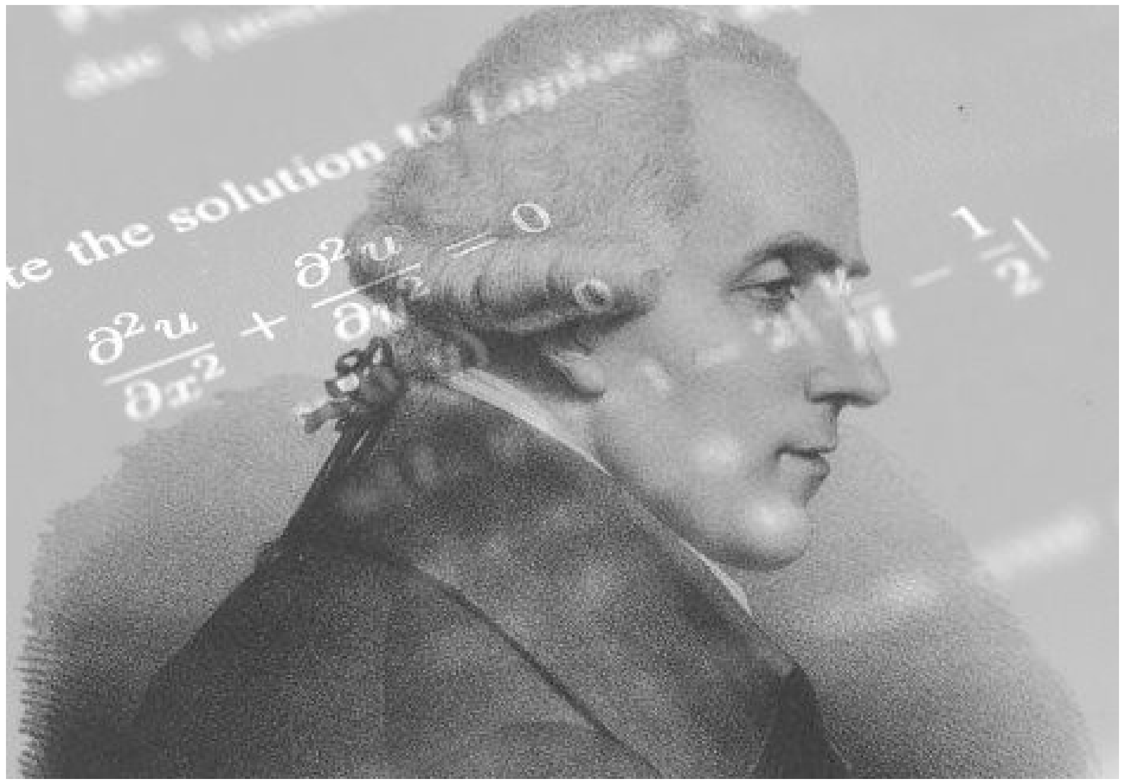
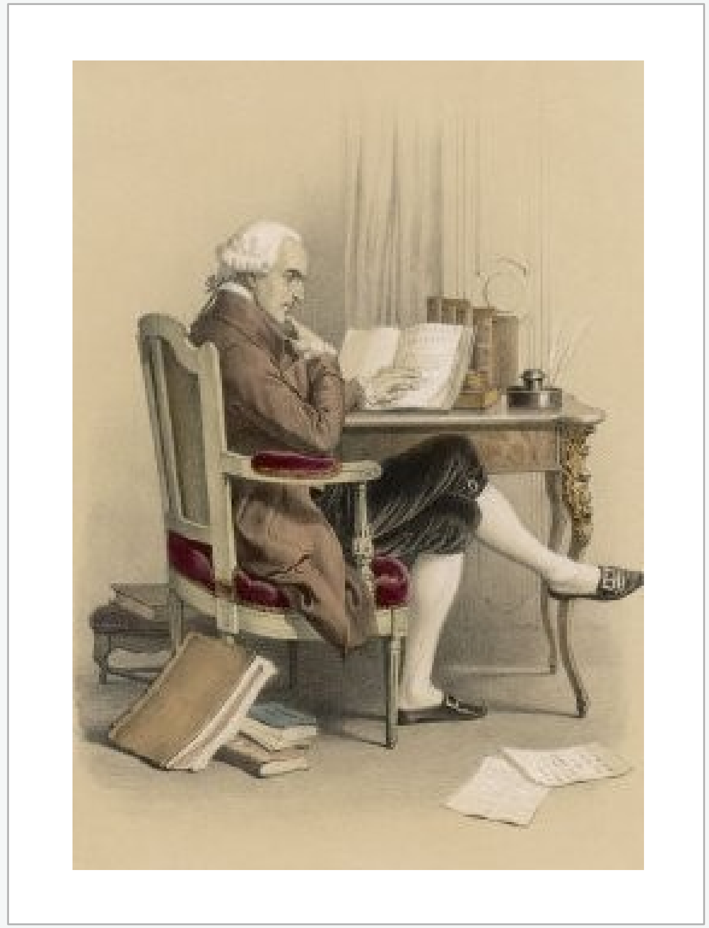


http://www.flickr.com/photos/rocketdude/489565079/

Die Laplace-Gleichung



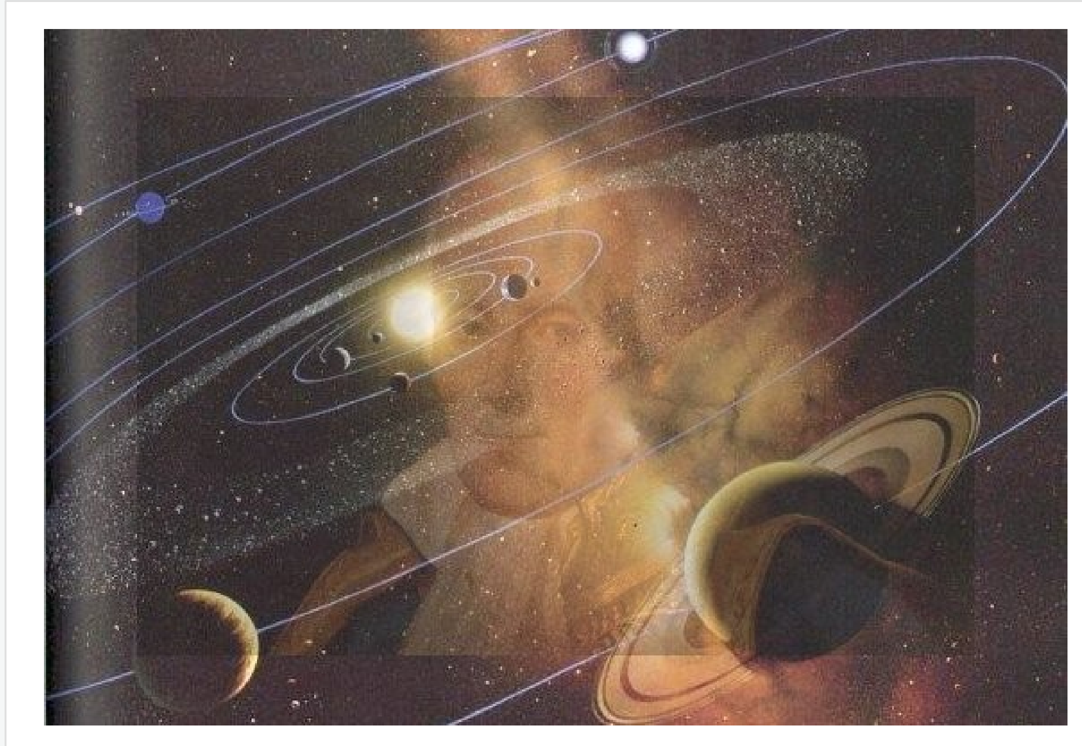
http://img.allposters.com/6/LRG/17/1740/IMJ3D00Z.jpg

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) war ein französischer Mathematiker und Astronom. Die wichtigsten mathematischen Verfahren, die Laplace entwickelte, sind der Laplacesche Entwicklungssatz, der Laplace-Operator, die Laplace-Gleichung sowie die Laplace-Transformation.

http://truereligiondebate.files.wordpress.com/2008/05/universe.jpg

Abb. 1: Wie ist das Universum entstanden? Gibt es einen Schöpfer?

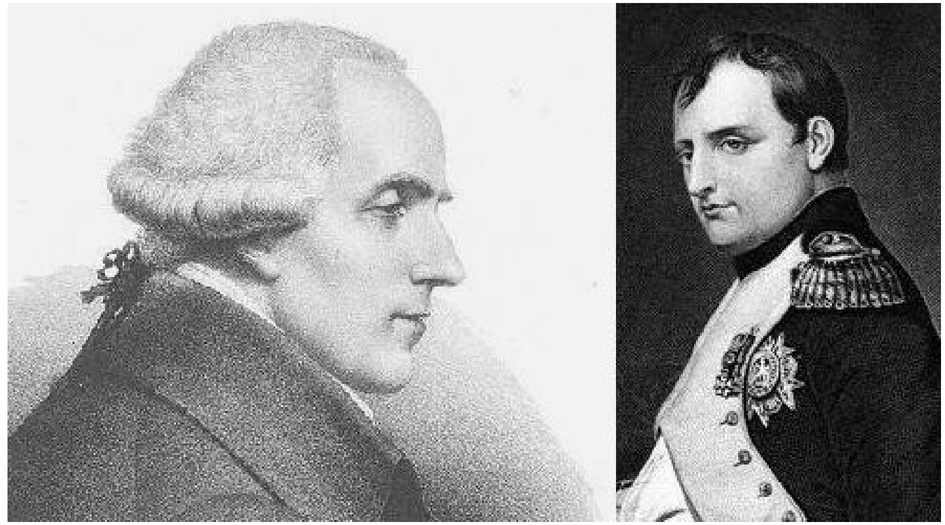
Obwohl Laplace als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet wird, war es zunächst die Himmelsmechanik, durch die er Ruhm erlangte. Er wird als die schillerndste Figur dieses goldenen französischen Zeitalters angesehen und als einer der einflussreichsten Wissenschaftler aller Zeiten. Wegen seiner Arbeiten zur Himmelsmechanik wurde Laplace außerdem als Newton Frankreichs bezeichnet.



http://www.open.ac.uk/science/pssri/__assets/zd6f8yul5e63g1ozmz.jpg

In seinem fünfbändigen Meisterwerk *'Traité de mécanique céleste'* (Abhandlung über Himmelsmechanik), das zwischen 1799 und 1825 veröffentlicht wurde, vervollständigte Laplace die Arbeit Newtons auf diesem Gebiet und erweiterte die Resultate von Lagrange. Newton hatte noch geglaubt, dass göttliches Eingreifen nötig war, um hin und wieder den Zustand des Sonnensystems zu korrigieren. Doch Laplace zeigte nun ganz konträr, dass das Gesetz der universellen Gravitation für die Stabilität in seinem Modell des Sonnensystems sorgt.

Aus S. Fröba, A. Wassermann "Die bedeutendsten Mathematiker"



Laplace, Napoleon

“Ich habe diese Hypothese nicht nötig” soll der Mathematiker Laplace geantwortet haben, als Napoleon ihn fragte, warum Gott in seinem astronomischen Weltbild nicht vorkomme. Mit Mathematik und Newtons Gravitationsgesetz erklärte Laplace, was Planeten auf ihren Bahnen und somit das Sonnensystem zusammenhält.

Napoleon Bonaparte, den Laplace 1785 an der École Militaire in Mathematik geprüft hatte, machte ihn 1799 zum Innenminister. Er blieb es aber nur sechs Wochen, weil er, wie Napoleon später schrieb, “den Geist des unendlich Kleinen in die Verwaltung mitbrachte”. Zum Trost berief Napoleon Laplace in den Senat und machte ihn 1804 zum Grafen.

"Sire, eine derartige Annahme war nicht nötig"

http://www.mukto-mona.com/Special_Event_/Darwin_day/god_darwin/pg13.htm

Für ein quellen- und zugleich wirbelfreies Vektorfeld ***F*** müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$div\,\vec{F} = 0 \qquad rot\,\vec{F} = 0$$

Ein solches wirbelfreies Vektorfeld ist dann als Gradient eines skalaren Feldes darstellbar:

$$\vec{F} = grad\,\phi$$

$$div\,\vec{F} = div\,(grad\,\phi) = 0$$

$$grad\,\phi = \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}\,\vec{i} + \frac{\partial\,\phi}{\partial\,y}\,\vec{j} + \frac{\partial\,\phi}{\partial\,z}\,\vec{k}$$

$$div\,(grad\,\phi) = \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}\right) + \frac{\partial}{\partial\,y}\left(\frac{\partial\,\phi}{\partial\,y}\right) + \frac{\partial}{\partial\,z}\left(\frac{\partial\,\phi}{\partial\,z}\right) =$$

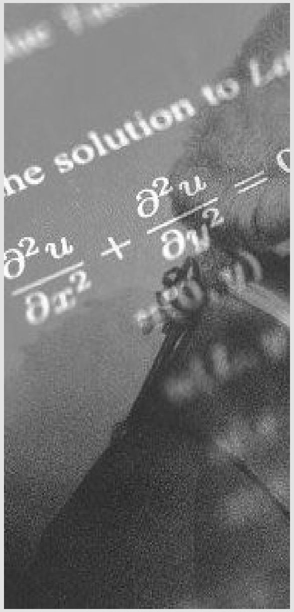
$$= \frac{\partial^2\,\phi}{\partial\,x^2} + \frac{\partial^2\,\phi}{\partial\,y^2} + \frac{\partial^2\,\phi}{\partial\,z^2} = 0$$

Die Laplace- Gleichung:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösungen dieser homogenen partiellen Differentialgleichung werden als harmonische Funktionen bezeichnet.

Der Laplace-Operator



Der Laplace-Operator

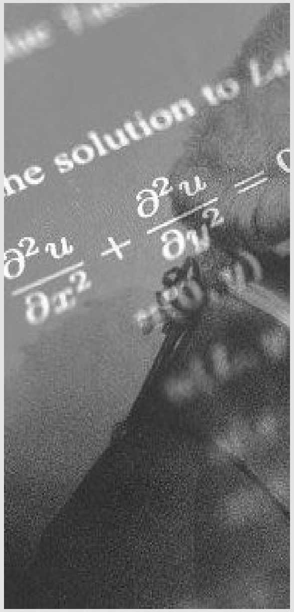
$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist ein formales Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst. Der Laplace-Operator ist ein Differentialoperator *2.* Ordnung.

$$div\,(grad\,\phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$$

Bei einem ebenen Problem reduziert sich der Laplace-Operator auf

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



Zeigen Sie, dass die Funktion φ im Zweidimensionalen eine harmonische Funktion ist, d.h. eine spezielle Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$ darstellt

Aufgabe 1: $\phi = \ln r$

Aufgabe 2: $\phi = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$

Lösung 1:

Es ist notwendig, die Funktion in einer geeigneten Form darzustellen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

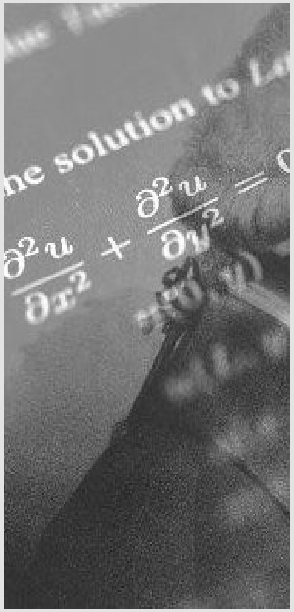
$$\phi = \ln r = \ln (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Lösung 2:

$$\phi = \ln \left(\frac{1}{r} \right) = \ln 1 - \ln r = - \ln r = - \ln (x^2 + y^2)^{1/2} = - \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$



Bestimmen Sie Δf

Aufgabe 3: $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$

Aufgabe 4: $f(x, y, z) = x^2 \, y \, z$

Aufgabe 5: $f(x, y, z) = \ln(x \, y \, z)$

Aufgabe 6: $f(x, y, z) = \sin r$

Aufgabe 7: $f(x, y, z) = e^{r^2}$

Lösung 3: $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4, \qquad \Delta f = 12\,(x^2 + y^2 + z^2)$

Lösung 4: $f(x, y, z) = x^2\, y\, z, \qquad \Delta f = 2\, y\, z$

Lösung 5: $f(x, y, z) = \ln(x\, y\, z) = \ln x + \ln y + \ln z$

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ln y) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\ln z) =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}$$

Lösung 6: $f(x, y, z) = \sin r, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Delta f = -\sin r + \frac{2\cos r}{r}$$

Lösung 7: $f(x, y, z) = e^{r^2}, \qquad \Delta f = 2\, e^{r^2}(3 + 2\, r^2)$