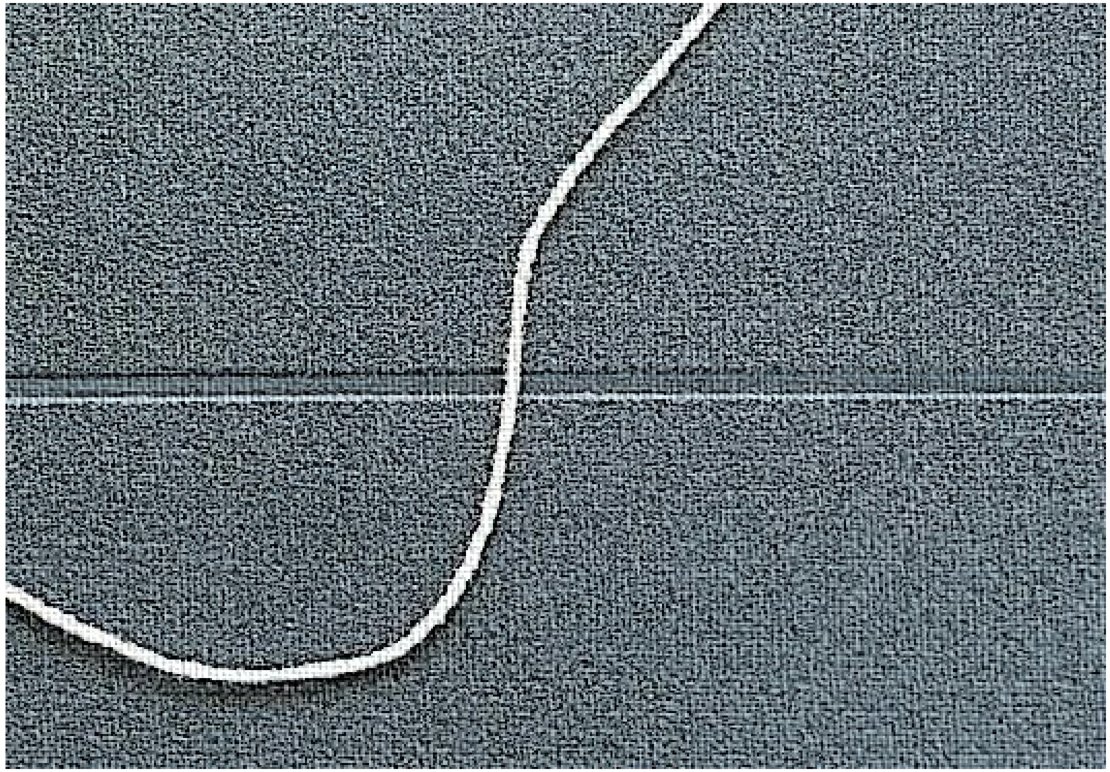

Linien- oder Kurvenintegrale

Aufgaben 12-21

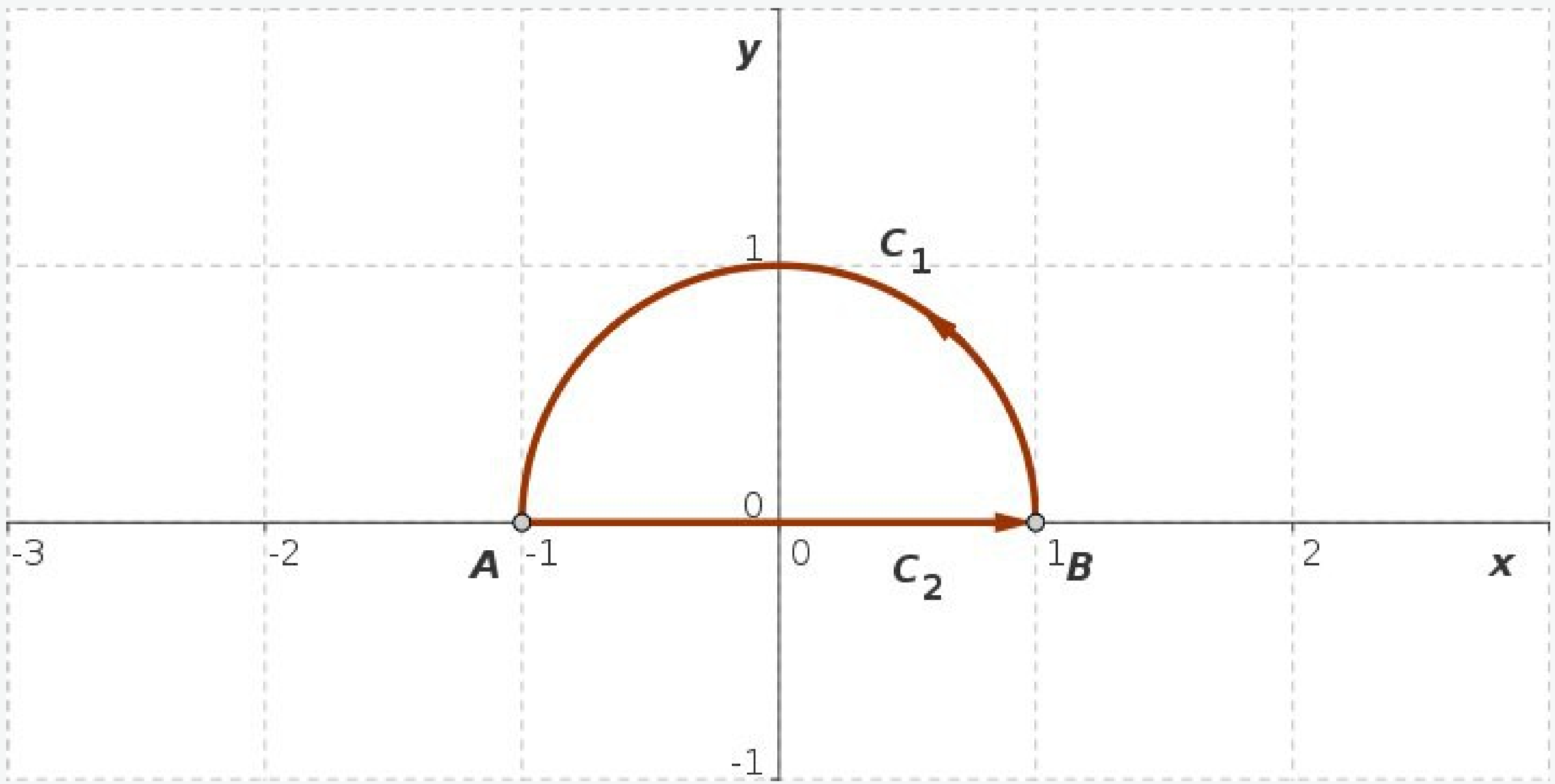

Abb. A12a: Graphische Darstellung des Intagrationsweges der Aufgabe

C ist eine geschlossene Kurve, die aus der oberen Hälfte eines Kreises mit dem Radius $R = 1$ und einem Durchmesser von A nach B besteht, wie es in der Abbildung gezeigt wird. Berechnen Sie folgendes Linienintegral

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r}\,, \qquad \vec{F} = (-y\,,\; x)\,, \qquad C = C_1 + C_2$$

$$W = \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = W_1 + W_2$$

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2)\, dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

$$\vec{r} = (\cos t\,,\ \sin t)\,, \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t\,,\ \cos t)$$

$$\vec{F} = (-y\,,\ x) = (-\sin t\,,\ \cos t)\,, \qquad \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \qquad \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = (x\,,\ y) = (x\,,\ 0)\,, \qquad \vec{F} = (-y\,,\ x) = (0,\ x)$$

$$W = W_1 + W_2 = \pi + 0 = \pi$$

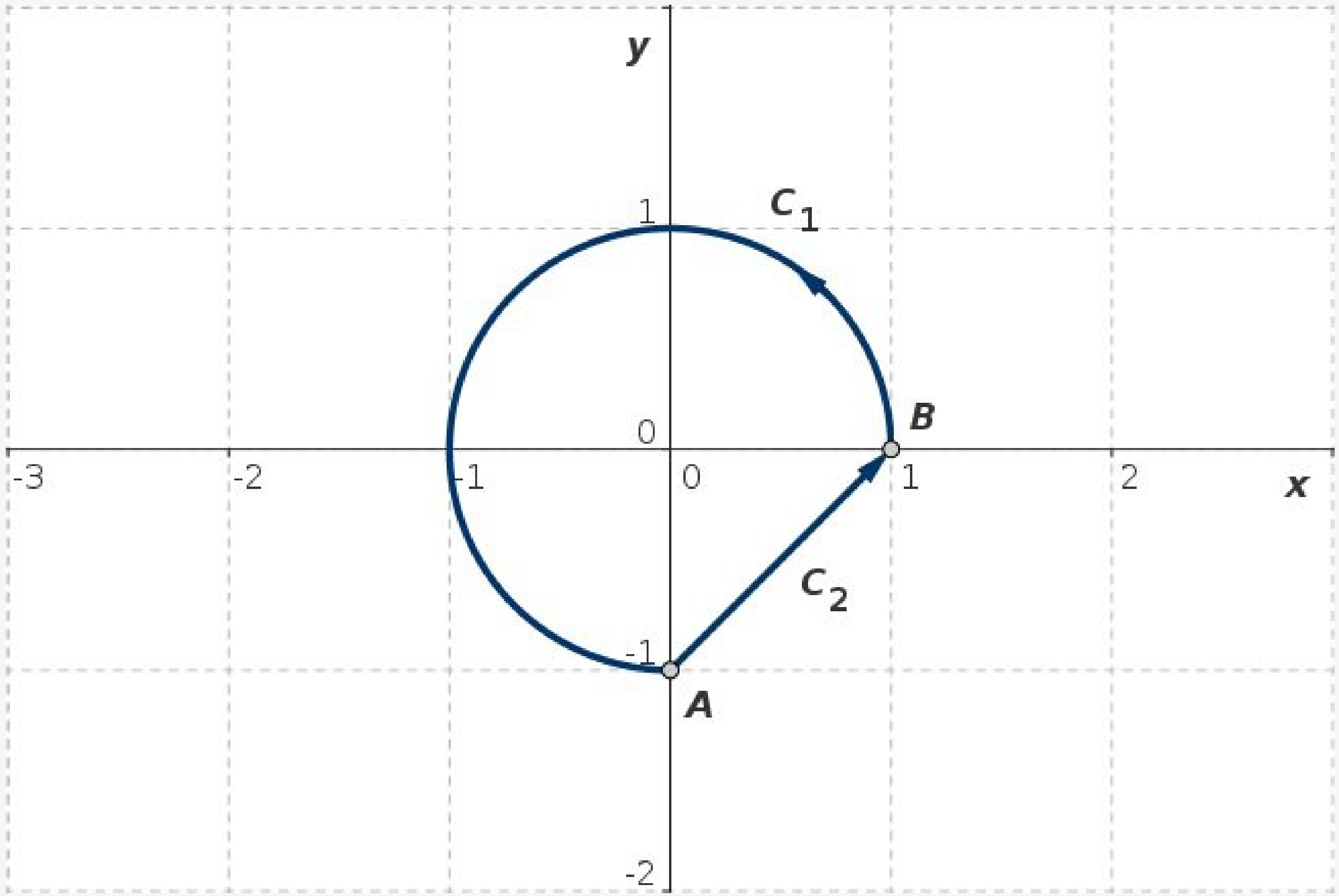

Abb. A12b: Graphische Darstellung des Intagrationsweges der Aufgabe

C ist eine geschlossene Kurve, die aus einem Teil des Kreises mit dem Radius $R = 1$ und einem Segment AB, wie es in der Abbildung gezeigt wird besteht. Berechnen Sie folgendes Linienintegral

$$\int_C \vec{F}\ d\,\vec{r}\,, \qquad \vec{F} = (-y\,,\ x)\,, \qquad C = C_1 + C_2$$

$$W = \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = W_1 + W_2$$

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^{3\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2)\, dt = \frac{3\pi}{2}$$

$$\vec{r} = (\cos t,\ \sin t), \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t,\ \cos t)$$

$$\vec{F} = (-y,\ x) = (-\sin t,\ \cos t), \qquad \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 1$$

$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{F} = (-y,\ x), \qquad \vec{r} = (x,\ y), \qquad \vec{F} \cdot \vec{r} = -x\,y + x\,y = 0$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}$$

Berechnen Sie folgende Linienintegrale

Aufgabe 13: $\int\limits_C (x\, dy - y\, dx), \qquad C: \ y = x^3, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$

Aufgabe 14: $\int\limits_C \left(\frac{y}{x}\, dx + dy \right), \qquad C: \ y = \ln x, \qquad 1 \leqslant x \leqslant e$

Aufgabe 15: $\int\limits_C (2\, x\, y\, dx + x^2\, dy), \qquad C: \ y = \frac{x^2}{4}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$

Aufgabe 16: $\int\limits_C (2\, x\, y\, dx - x^2\, dy), \qquad C: \ y = \sqrt{\frac{x}{2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$

Aufgabe 17: $\int\limits_C (\cos y\, dx - \sin y\, dy), \qquad C: \ y = -x, \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$

Aufgabe 18: $\int\limits_C x\, y^2\, dx, \qquad x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

Lösung 13:

$$\int_C \left(x\, dy - y\, dx \right) = \int_0^2 (x \cdot 3\, x^2 - x^3)\, dx = 2 \int_0^2 x^3\, dx = 8$$

Lösung 14:

$$\int_C \left(\frac{y}{x}\, dx + dy \right) = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x \right]_1^e = \frac{3}{2}$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

Lösung 15: $\displaystyle \int_C \left(2\, x\, y\, dx + x^2\, dy \right) = \int_0^2 x^3\, dx = 4$

Lösung 16: $\displaystyle \int_C \left(2\, x\, y\, dx - x^2\, dy \right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_0^2 x \sqrt{x}\, dx = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\, dx =$

$$= \frac{3}{5\sqrt{2}} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = \frac{12}{5}$$

Lösung 17:

$$\int_C \left(\cos y \, dx - \sin y \, dy \right) = \int_{-2}^{2} \left(\cos(-x) + \sin(-x) \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\cos x - \sin x \right) dx = 2 \sin 2$$

Lösung 18:

$$\int_C x \, y^2 \, dx = - \int_0^{\pi/2} \cos t \, \sin^3 t \, dt = - \left[\frac{\sin^4 x}{4} \right]_0^{\pi/2} = - \frac{1}{4}$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F}\, d\,\vec{r}$. Die Kurve C ist die geradlinige Verbindung vom Punkt A zum Punkt B.

Aufgabe 19: $\displaystyle\int_C \left(x^3\, dy - x\, y\, dx \right), \qquad C: \; A = (0, -2), \quad B = (1, 3)$

Aufgabe 20: $\displaystyle\int_C \left(-3\, x^2\, dx + y^3\, dy \right), \qquad C: \; A = (0, 0), \quad B = (2, 4)$

Aufgabe 21: $\displaystyle\int_C \left((2\, x - y)\, dx + (4\, x + 5\, y)\, dy \right)$

$C: \; A = (3, -4), \quad B = (1, 2)$

Lösung 19: $A\,(0, -2)\,, \qquad B\,(1, 3)$

Die Gleichung der Geraden AB ist:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}\,, \qquad x = \frac{y + 2}{5} \quad \Rightarrow \quad y = 5\,x - 2$$

$$dy = y'\,dx = 5\,dx$$

$$\int\limits_C \left(x^3\,dy - x\,y\,dx \right) = \int\limits_0^1 (5\,x^3 - x\,(5\,x - 2))\;dx =$$

$$= \left[\frac{5}{4}\,x^4 - \frac{5}{3}\,x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

Lösung 20: $A\,(0, 0)\,, \qquad B\,(2, 4)$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}\,, \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{4} \quad \Rightarrow \quad y = 2\,x\,, \quad dy = 2\,dx$$

$$\int\limits_C \left(-3\,x^2\,dx + y^3\,dy \right) = \int\limits_0^2 (-3\,x^2 + 16\,x^3)\;dx = 56$$

Lösung 21: $A\,(3, -4)\,, \qquad B\,(1, 2)$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}\,, \qquad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{6}$$

$$\Rightarrow \quad y = 5 - 3\,x\,, \quad dy = -3\,dx$$

$$\int_C \big(\,(2\,x - y)\,dx + (4\,x + 5\,y)\,dy\,\big) = \int_3^1 (38\,x - 80)\;dx = 8$$