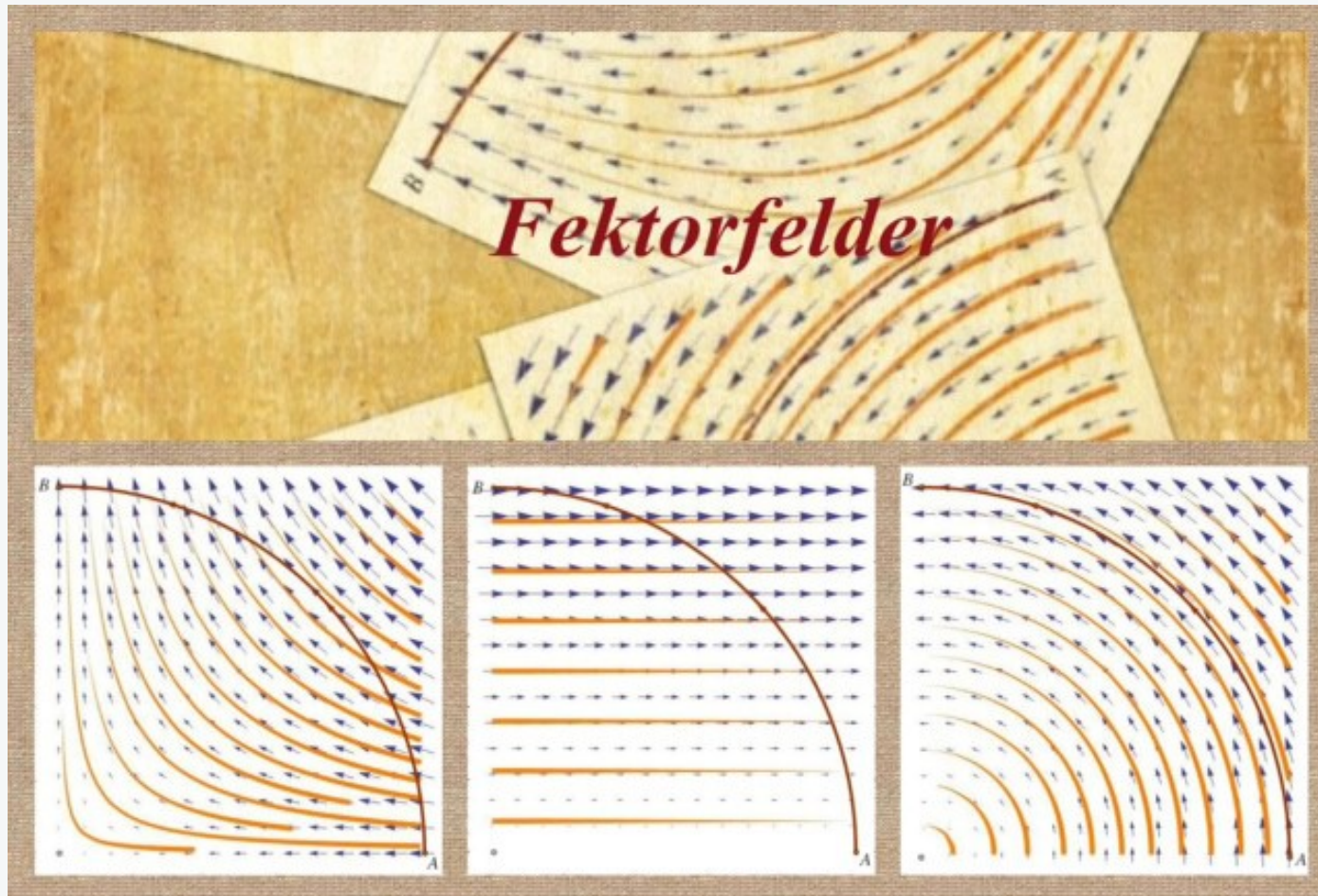




Linien- oder Kurvenintegrale

Aufgaben 7-11

Das Linienintegral: Aufgabe 7

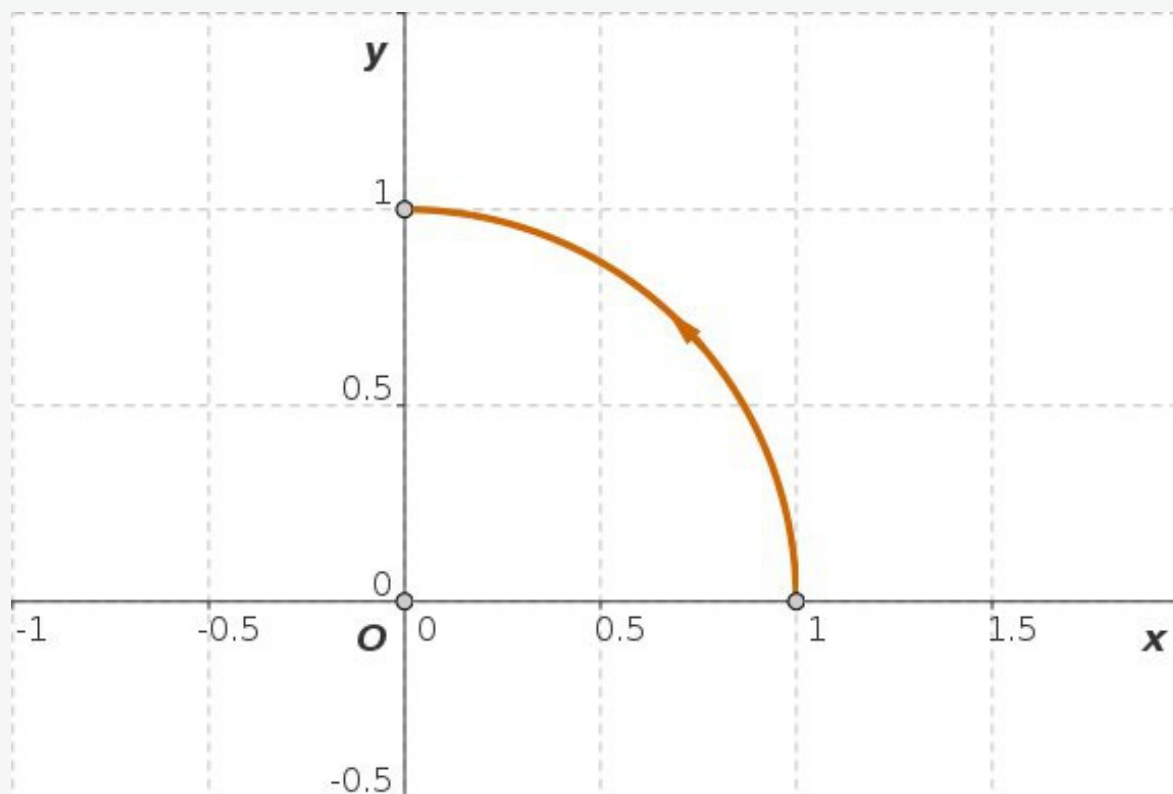


Abb. A7: Graphische Darstellung des Integrationsweges der Aufgabe

Ein gegebenes Kraftfeld $\vec{F}(x, y)$ wirkt auf einen Massenpunkt. Berechnen Sie die von der Kraft geleistete Arbeit, wenn sich der Massenpunkt gegen den Uhrzeigersinn auf einem Einheitskreis ($R = 1$) von Punkt A (1, 0) bis Punkt B (0, 1) bewegt

- a) $\vec{F}(x, y) = (0, x)$, b) $\vec{F}(x, y) = (y, 0)$
c) $\vec{F}(x, y) = (-x, y)$, d) $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$

Können Sie schon sehen, welches Vorzeichen das Linienintegral haben sollte?

$$\vec{F}(x, y) = x \vec{j}, \quad C(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$C : \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (0, \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \cos^2 t$$

Die vom Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y)$ geleistete Arbeit beträgt

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) \, dt = \frac{\pi}{4}$$

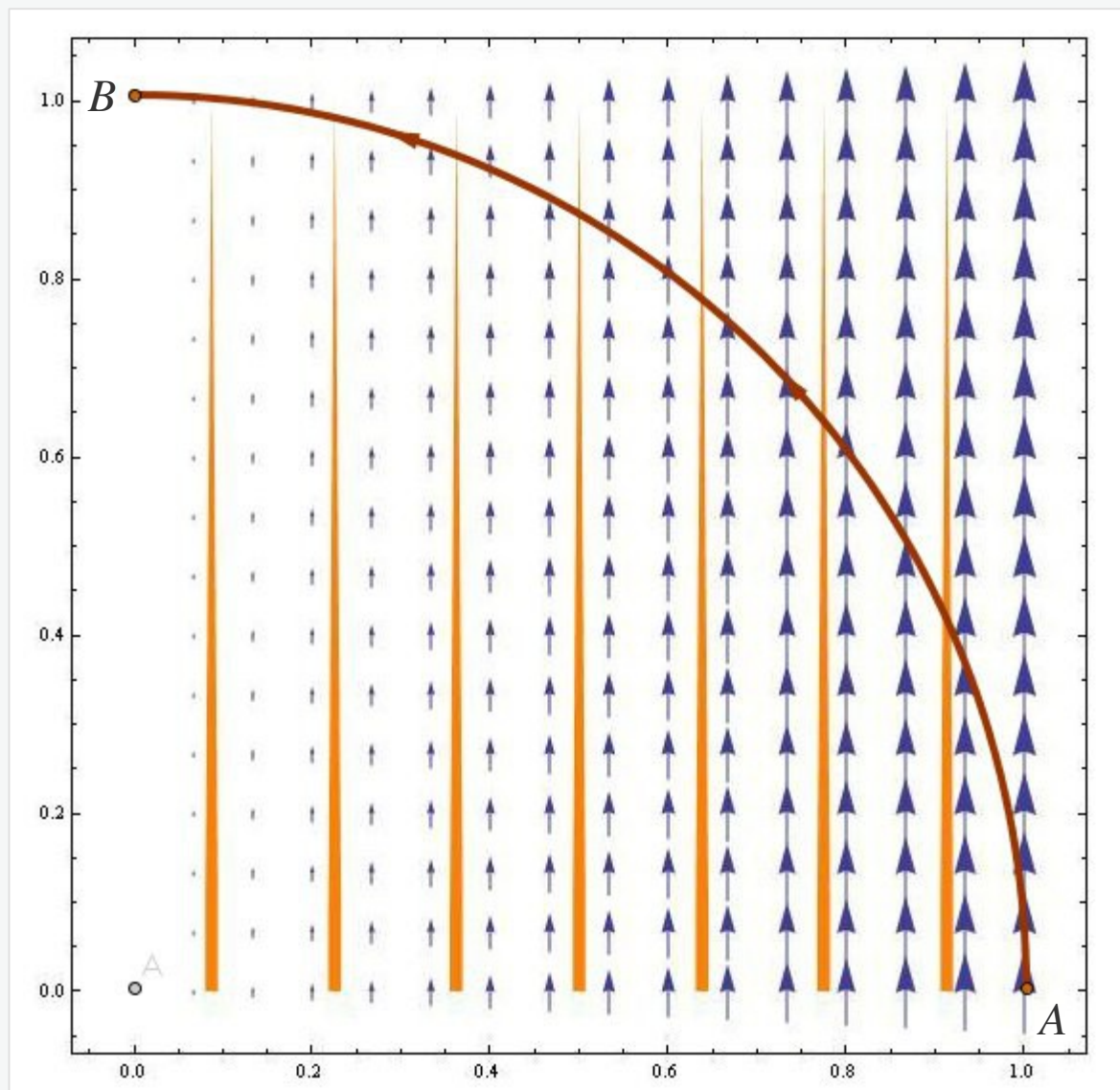


Abb. L7a: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $F(x, y) = (0, x)$. Kurve C. Der Winkel zwischen dem Tangentenvektor der Kurve und dem Vektorfeld ist überall kleiner $\pi/2$. Ihr Skalarprodukt ist also überall positiv, d.h. das Linienintegral ist auch positiv

$$\vec{F}(x, y) = y \vec{i}, \quad C(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$C : \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (\sin t, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\sin^2 t$$

Die vom Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y)$ geleistete Arbeit beträgt

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) \, dt = -\frac{\pi}{4}$$

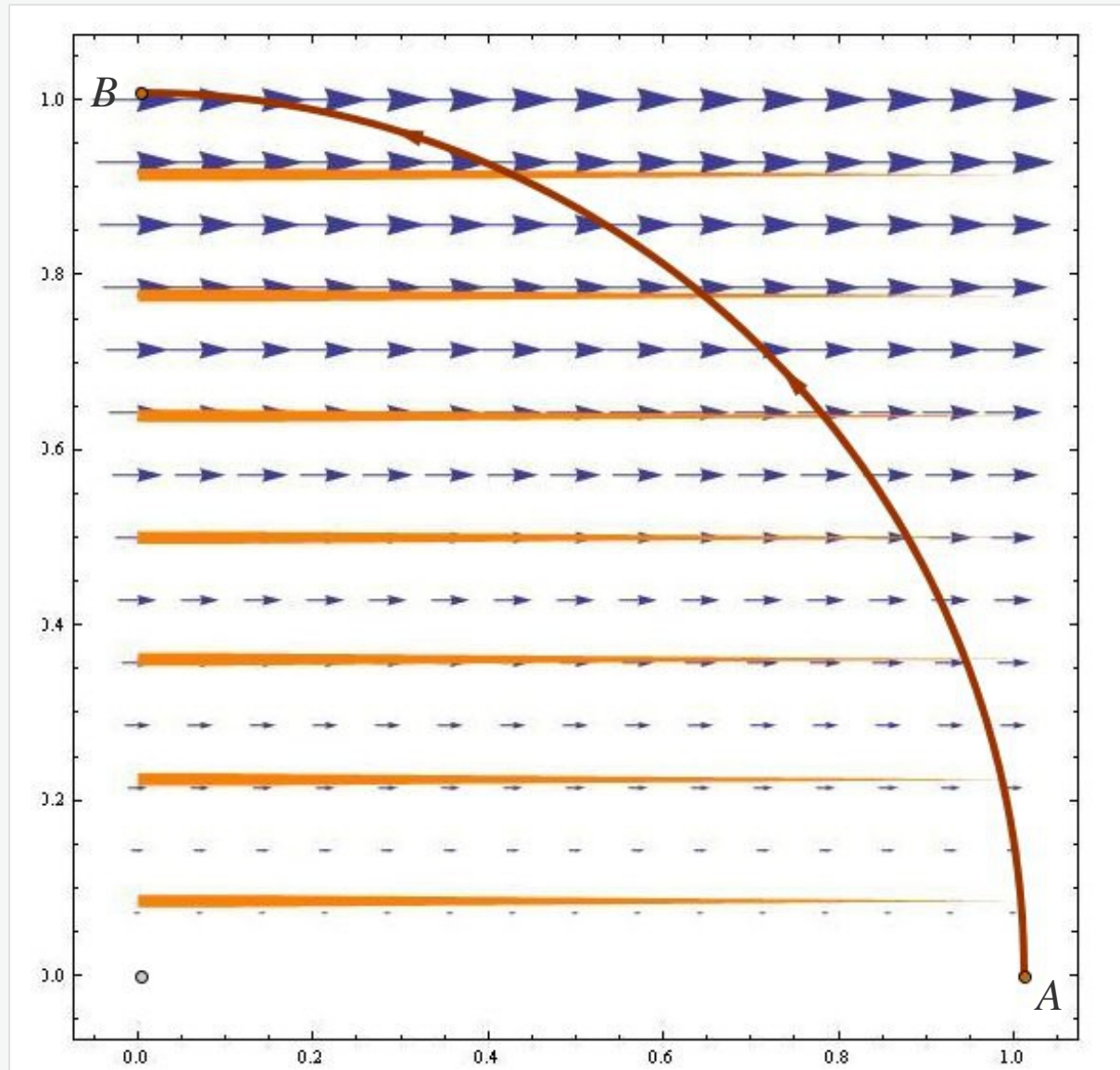


Abb. L7b: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $F(x, y) = (y, 0)$. Kurve C . Der Winkel zwischen dem Tangentenvektor der Kurve und dem Vektorfeld ist überall größer $\pi/2$. Ihr Skalarprodukt ist also überall negativ, d.h. das Linienintegral ist auch negativ

$$\vec{F}(x, y) = -x \vec{i} + y \vec{j}, \quad C(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$C : \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 2 \sin t \cos t$$

Die vom Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y)$ geleistete Arbeit beträgt

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = 1$$

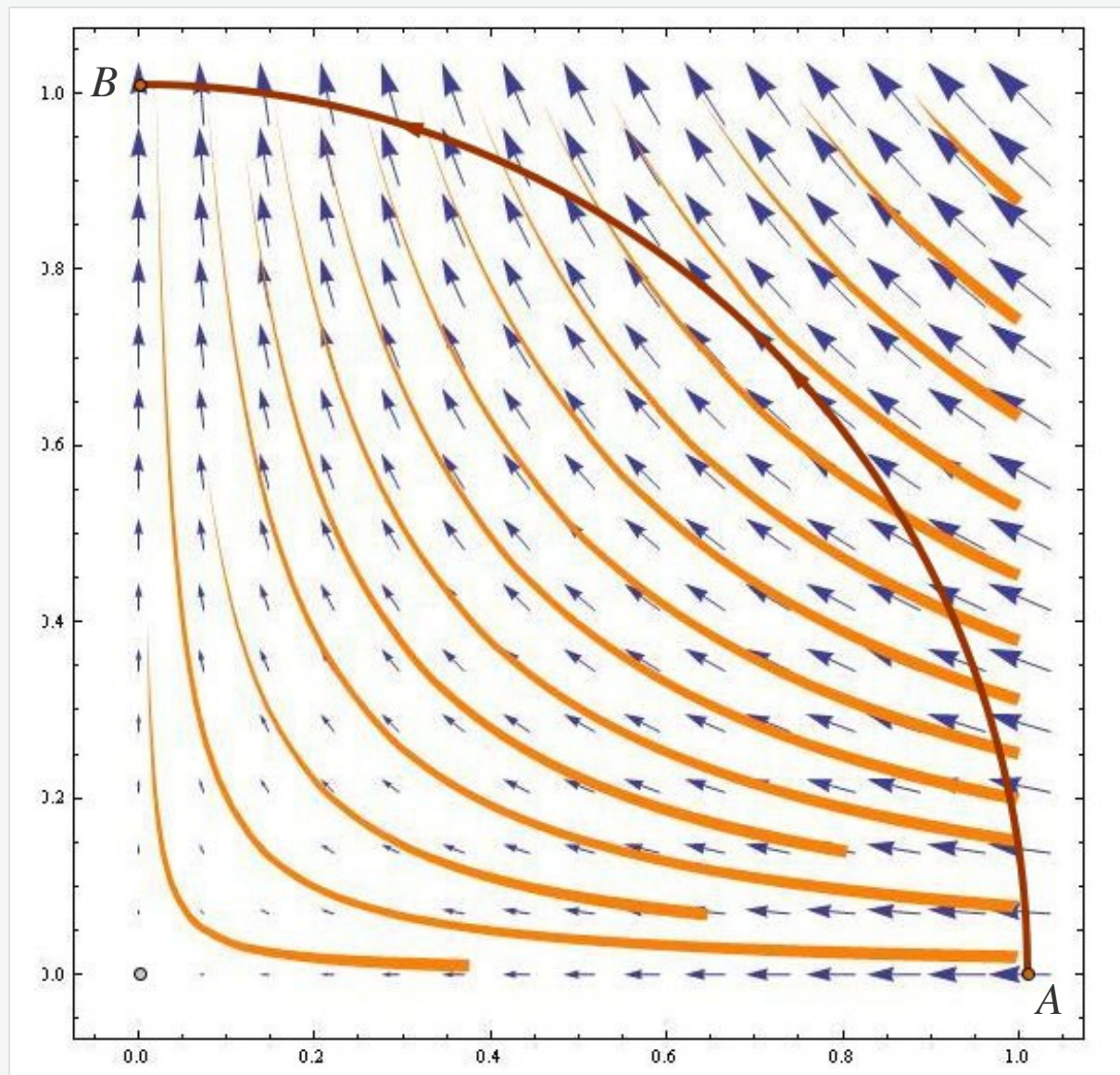


Abb. L7c: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $F(x, y) = (-x, y)$. Kurve C. Der Winkel zwischen dem Tangentenvektor der Kurve und dem Vektorfeld ist überall kleiner $\pi/2$. Ihr Skalarprodukt ist also überall positiv, d.h. das Linienintegral ist auch positiv

$$\vec{F}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}, \quad C(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$C : \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Die vom Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y)$ geleistete Arbeit beträgt

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

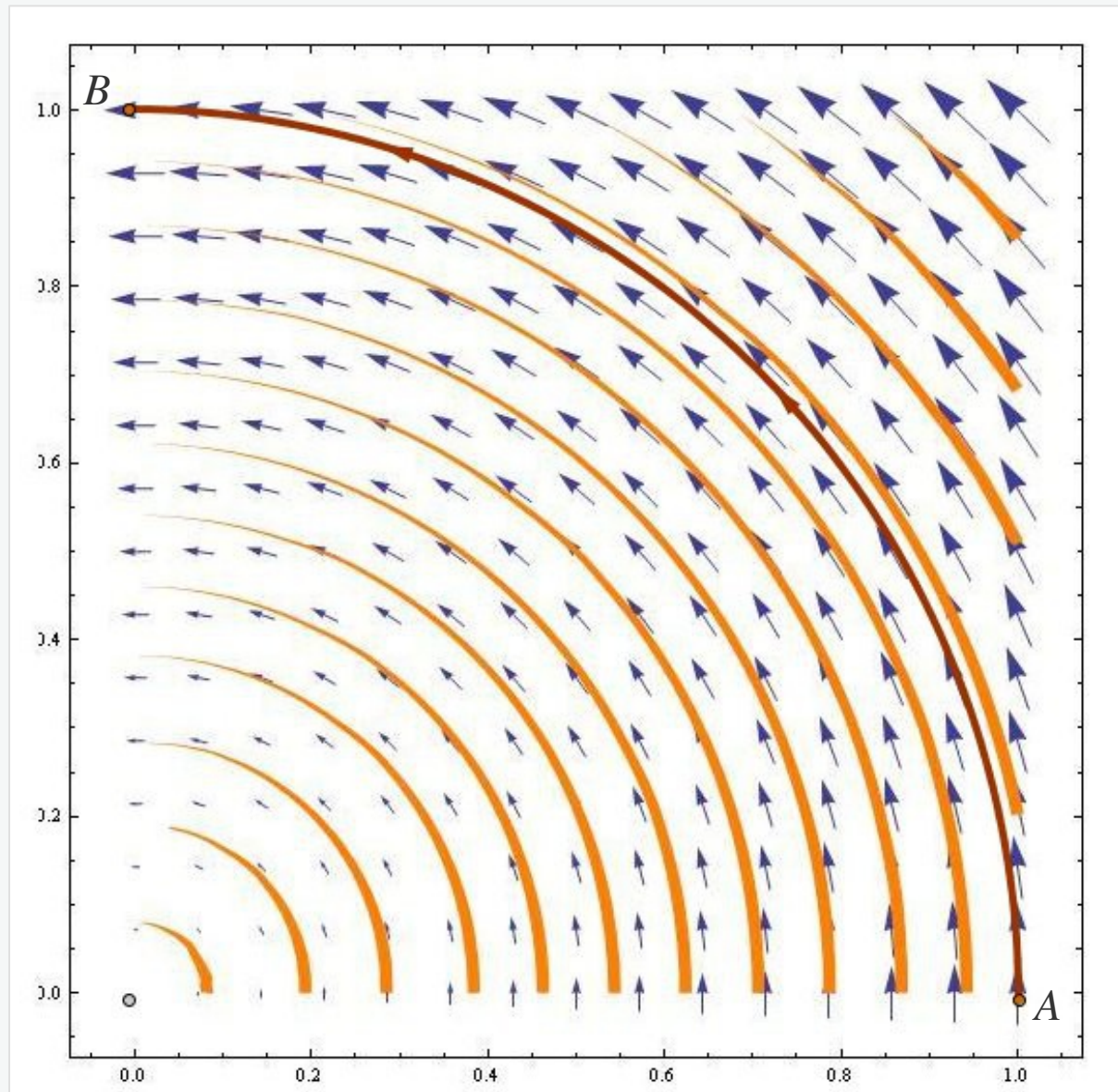


Abb. L7d: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $F(x, y) = (-y, x)$. Kurve C. Der Winkel zwischen dem Tangentenvektor der Kurve und dem Vektorfeld ist überall kleiner $\pi/2$. Ihr Skalarprodukt ist also überall positiv, d.h. das Linienintegral ist auch positiv

Aufgabe 8:

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C (x y - 1) dx + x^2 y dy$

die Kurve C ist ein Geradensegment vom Punkt $A(1, 2)$ zum Punkt $B(2, 4)$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C (x y^2 dx + y z^2 dy - z x^2 dz)$

die Kurve C ist ein Geradensegment vom Punkt $O(0, 0, 0)$ zum Punkt $P(-2, 4, 5)$

Aufgabe 10:

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C (x y dx + y z dy + z x dz)$

längs der schraubenlinienförmigen Kurve C

$$C : \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = b t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$A(1, 2), \quad B(2, 4)$$

Die Gleichung der Geraden AB ist:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{1} \Rightarrow y = 2x$$

$$dy = y' dx = 2 dx$$

$$\begin{aligned} \int_C \left((xy - 1) dx + x^2 y dy \right) &= \int_1^2 \left((2x^2 - 1) + 4x^3 \right) dx = \\ &= \left[x^4 + \frac{2}{3} x^3 - x \right]_1^2 = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

$$O(0, 0, 0), \quad P(-2, 4, 5)$$

Die Gleichung der Geraden OP ist:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

Wir parametrisieren diese Gleichungen:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = t \quad \Rightarrow \quad x = -2t, \quad y = 4t, \quad z = 5t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_C (x y^2 dx + y z^2 dy - z x^2 dz) &= \\ &= \int_0^1 (4t \cdot (4t)^2 + 16t \cdot (5t)^2 - 25t \cdot (-2t)^2) dt = \\ &= 364 \int_0^1 t^3 dt = 91 \end{aligned}$$

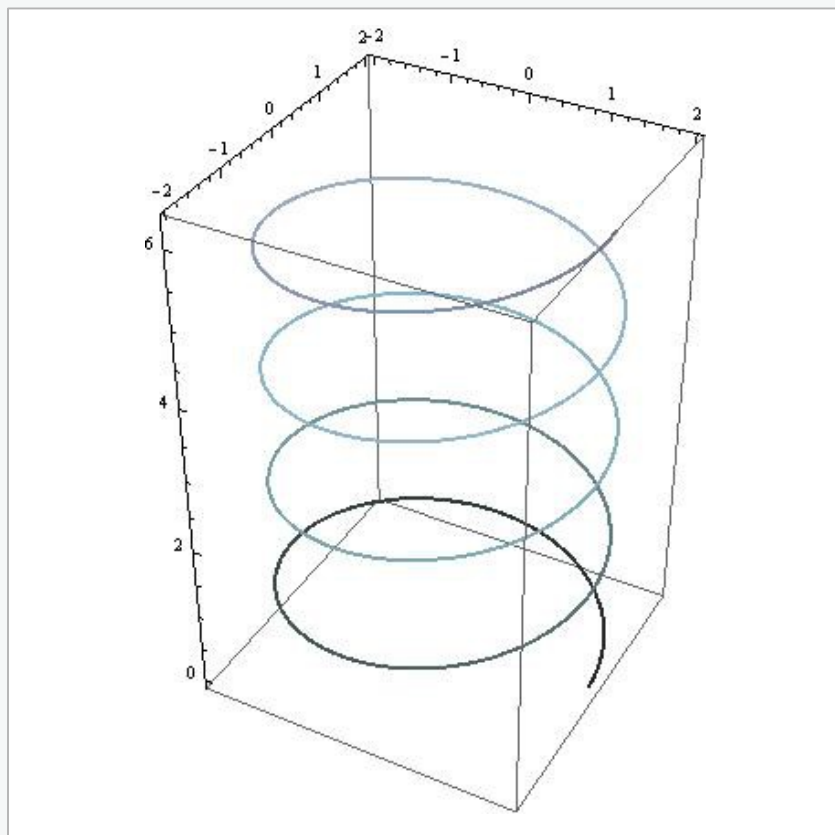


Abb. L10: Die Schraubenlinienförmige Kurve entspricht dem Integrationsweg der Aufgabe

$$C : \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = b t$$

$$C : \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = b t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = a \cos t \, dt, \quad dz = b \, dt$$

$$\begin{aligned} W &= \int_C (x y \, dx + y z \, dy + z x \, dz) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-a^3 \cos t \sin^2 t + a^2 b t \cos t \sin t + a b^2 t \cos t \right) dt = \\ &= -a^3 \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t \, dt + a^2 b \int_0^{2\pi} t \cos t \sin t \, dt + a b^2 \int_0^{2\pi} t \cos t \, dt = \\ &= -\frac{\pi}{2} a^2 b \end{aligned}$$

$$\int t \cos t \, dt = \cos t + t \sin t$$

$$\int t \cos t \sin t \, dt = \frac{t}{4} + \frac{1}{8} \sin(2t) - \frac{t}{2} \cos^2 t$$

$$\int \cos t \sin^2 t \, dt = \frac{1}{3} \sin^3 t$$

Aufgabe 11:

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F} \, d\vec{r}$, $\vec{F} = (y^2, x^2)$

- a) längs der oberen Hälfte der Ellipse in Richtung des Uhrzeigersinns
- b) längs der rechten Hälfte der Ellipse in Richtung gegen den Uhrzeigersinn

Die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

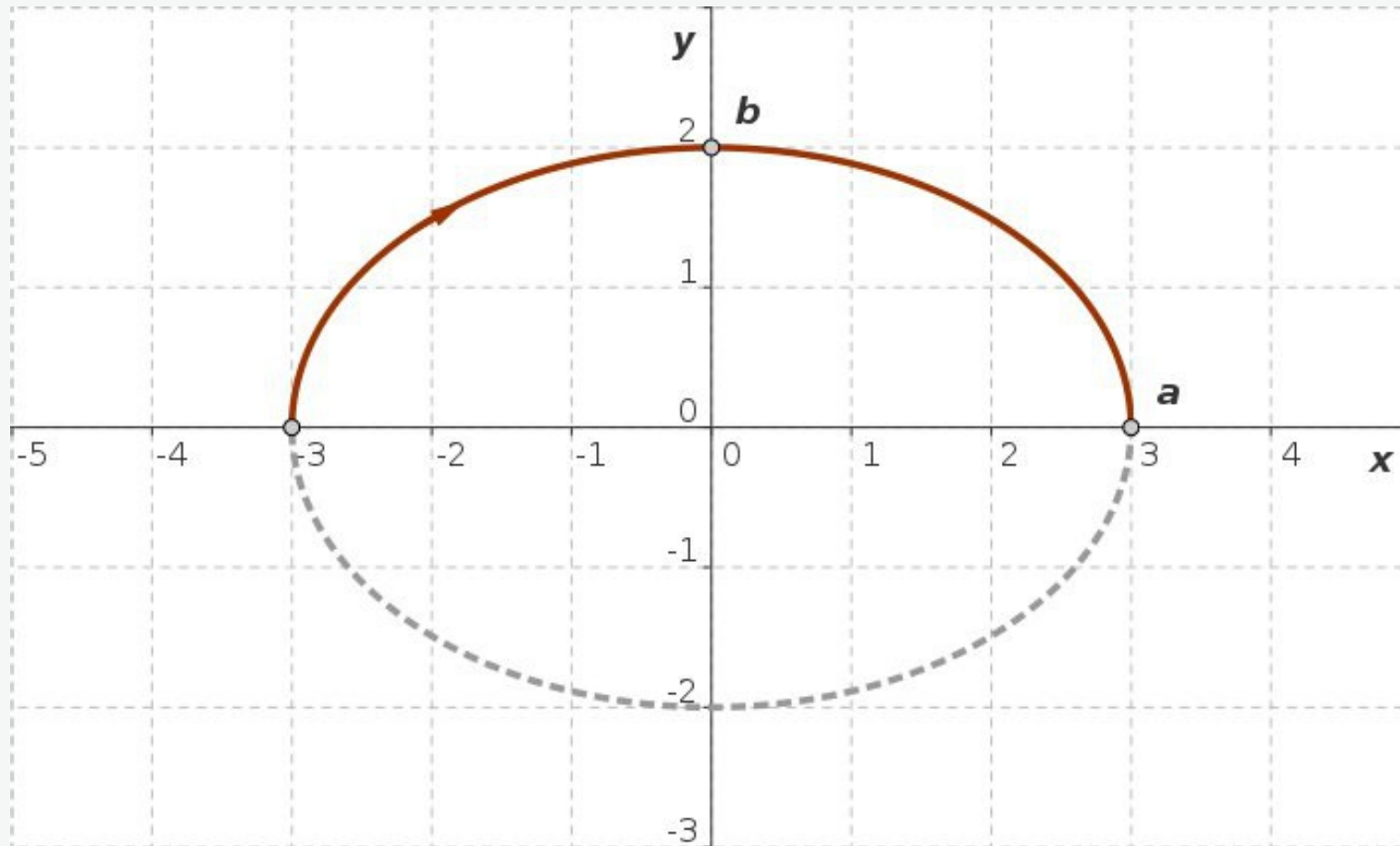


Abb. L11-1: Graphische Darstellung des Integrationsweges C der Aufgabe 11a. Die Kurve C ist die obere Hälfte der Ellipse. Der Massenpunkt bewegt sich vom Punkt $(a, 0)$ zum Punkt $(-a, 0)$. Die Parameter a und b der Abbildung sind $a = 3$ und $b = 2$

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

$$\vec{F} = (y^2, x^2), \quad W = \int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_C (y^2 dx + x^2 dy)$$

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = b \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\pi}^0 \left(b^2 \sin^2 t \cdot (-a) \sin t + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t \right) dt = \\ &= a^2 b \int_{\pi}^0 \cos^3 t \, dt - a b^2 \int_{\pi}^0 \sin^3 t \, dt = \\ &= a b^2 \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{\pi}^0 = \frac{4}{3} a b^2 \end{aligned}$$

$$\int \cos^3 t \, dt = \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t$$

$$\int \sin^3 t \, dt = -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t$$

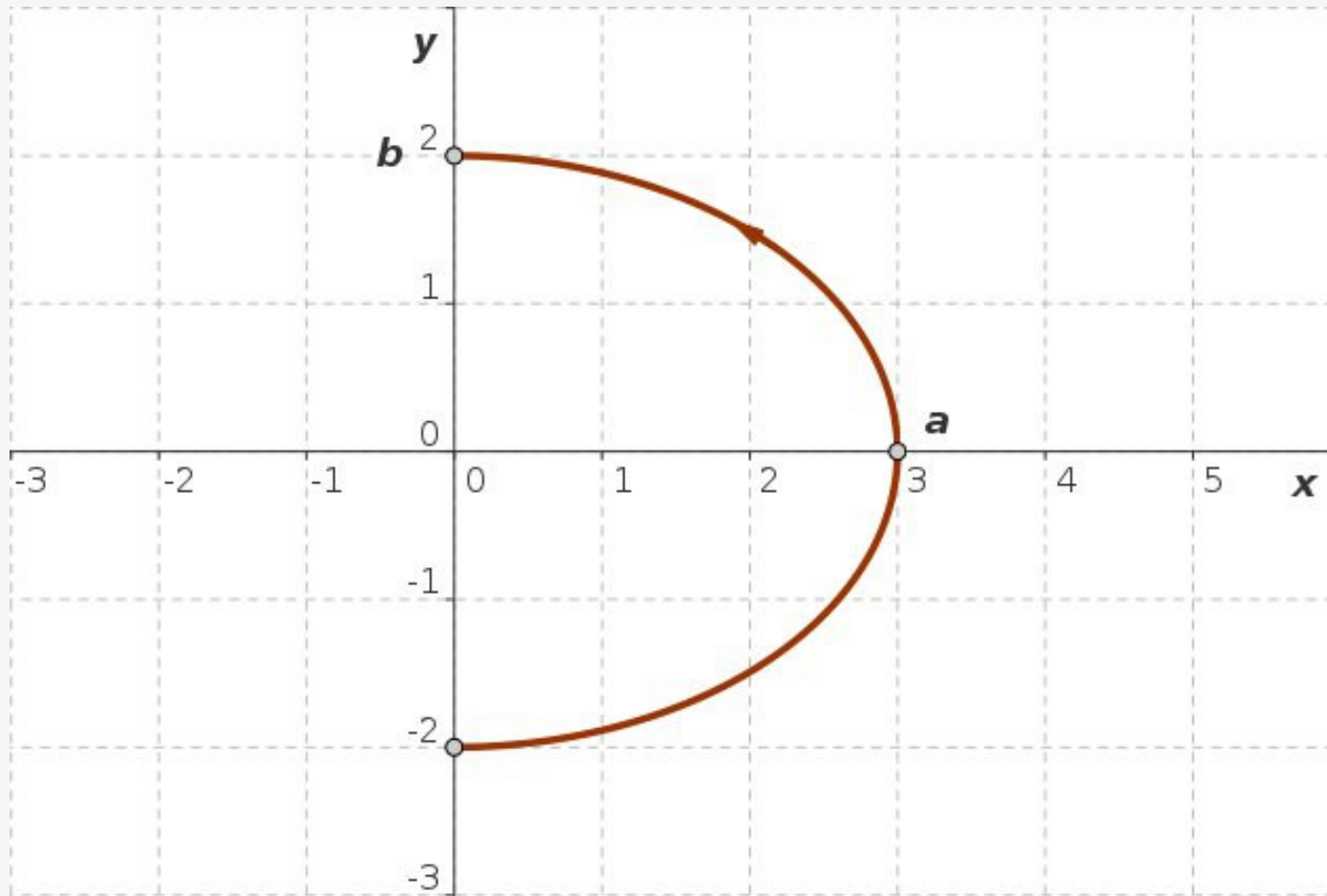


Abb. L10-2: Graphische Darstellung des Integrationsweges C der Aufgabe 11b. Die Kurve C ist die rechte Hälfte der Ellipse. Der Massenpunkt bewegt sich vom Punkt $(0, -b)$ zum Punkt $(0, b)$. Die Parameter a und b der Abbildung sind $a = 3$ und $b = 2$

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

$$\vec{F} = (y^2, x^2), \quad W = \int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_C (y^2 dx + x^2 dy)$$

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = b \cos t \, dt$$

$$W = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(b^2 \sin^2 t \cdot (-a) \sin t + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t \right) dt =$$

$$= a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \, dt - a b^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t \, dt =$$

$$= a^2 b \left[\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3} a^2 b$$

