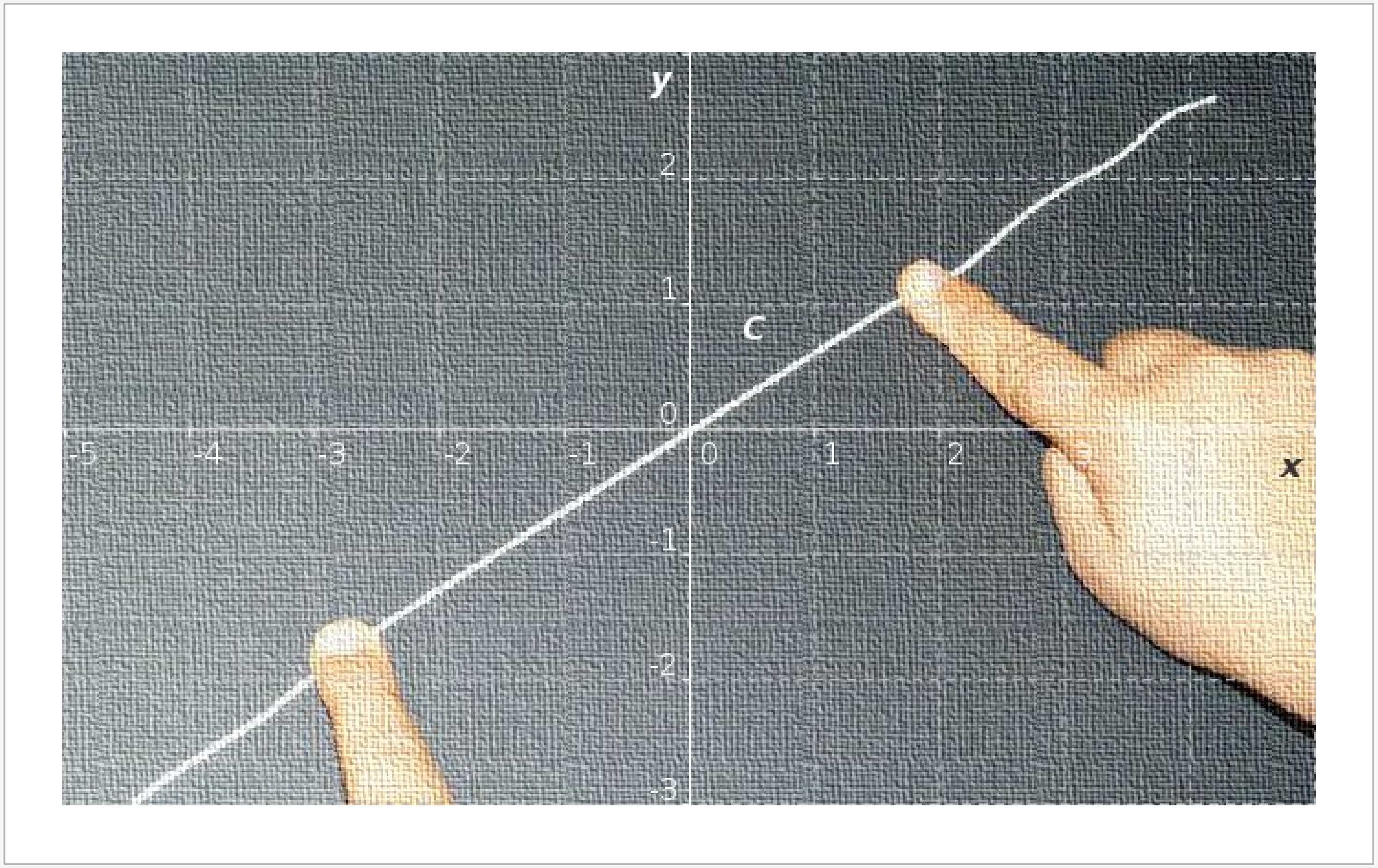
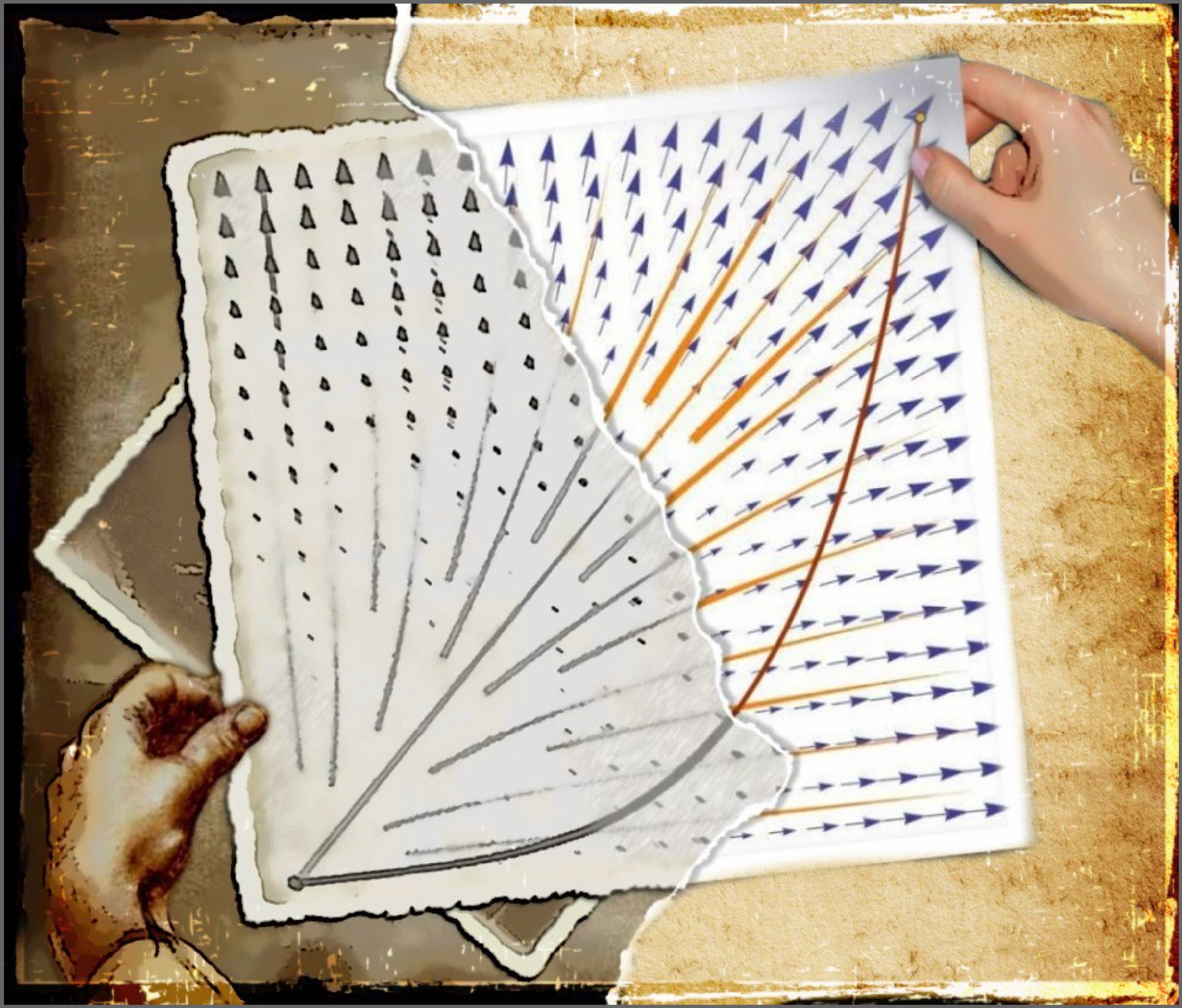


Linien- oder Kurvenintegrale

Aufgabe 6



$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} [F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)]\, dt$$

- Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve C.

- Der Wert des Kurvenintegrals hängt in der Regel nicht nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges, sondern auch vom vorgegebenen Weg ab.

- Für ein Kurvenintegral entlang einer geschlossenen Kurve verwendet man das Symbol

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Ein solches Kurvenintegral wird in den physikalisch-technischen Anwendungen als Zirkulation des Vektorfeldes längs der geschlossenen Kurve C bezeichnet.

- Parametrisieren der Kurve C

- Bestimmen Sie $\boldsymbol{F}$ auf der Kurve C als Funktion des Parameters t

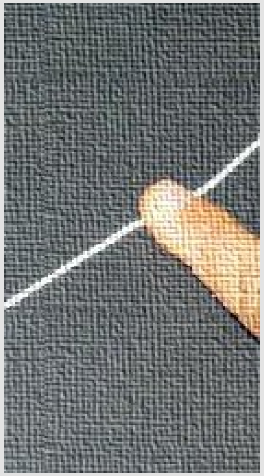
- Bestimmen Sie die Ableitung des Vektors $\boldsymbol{r}$ nach dem Parameter t

- Berechnen Sie das Skalarprodukt

$$\vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt}$$

und führen Sie anschließend die Integration über t aus

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt}\; dt$$



Berechnen Sie die Arbeit, die das ebene Kraftfeld ***F*** *(x, y)*

$$\vec{F}(x, y) = x^2\, \vec{i} + y^2\, \vec{j}$$

bei einer Verschiebung von A nach B an einem Massenpunkt verrichtet

$a)\ C: \quad y = x, \qquad A = (0, 0), \quad B = (1, 1)$

$b)\ C: \quad y = x, \qquad A = (-1, -1), \quad B = (1, 1)$

$c)\ C: \quad y = x^2, \qquad A = (0, 0), \quad B = (1, 1)$

$d)\ C: \quad y = x^2, \qquad A = (-1, 1), \quad B = (1, 1)$

$e)\ C: \quad y = x^3, \qquad A = (0, 0), \quad B = (1, 1)$

$f)\ C: \quad y = x^3, \qquad A = (-1, -1), \quad B = (1, 1)$

$g)\ C: \quad y = x^4, \qquad A = (0, 0), \quad B = (1, 1)$

$h)\ C: \quad y = x^4, \qquad A = (-1, 1), \quad B = (1, 1)$

$$\vec{F}(x, y) = x^2\ \vec{i} + y^2\ \vec{j}, \qquad C: \quad y = x, \qquad dy = dx$$

$$C: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$a)\quad A = (0, 0), \quad B = (1, 1), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$b)\quad A = (-1, -1), \quad B = (1, 1), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$

Die vom Kraftfeld ***F** (x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$a)\quad W_1 = \int_{C_1} \left[F_x + F_y \cdot f\,'(x) \right] dx = \int_0^1 \left(x^2 + x^2 \cdot 1 \right) dx = 2 \int_0^1 x^2\ dx = \frac{2}{3}$$

$$b)\quad W_2 = \int_{C_2} \left[F_x + F_y \cdot f\,'(x) \right] dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 + x^2 \cdot 1 \right) dx = 2 \int_{-1}^1 x^2\ dx = \frac{4}{3}$$

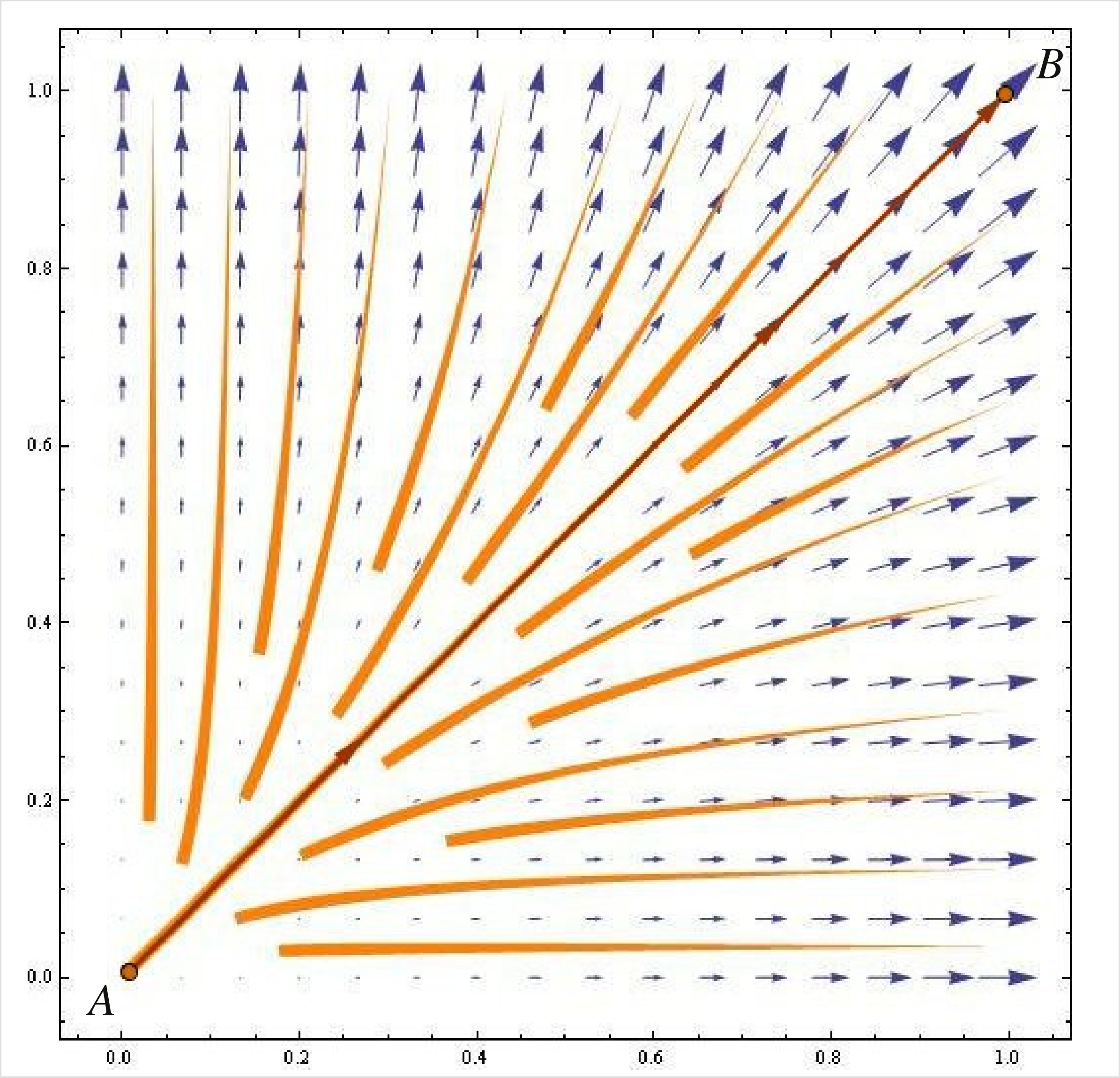


Abb. L-6a: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y^2)$.
Kurve C: ein geradliniger Weg vom Punkt A (0, 0) zum Punkt B (1, 1)

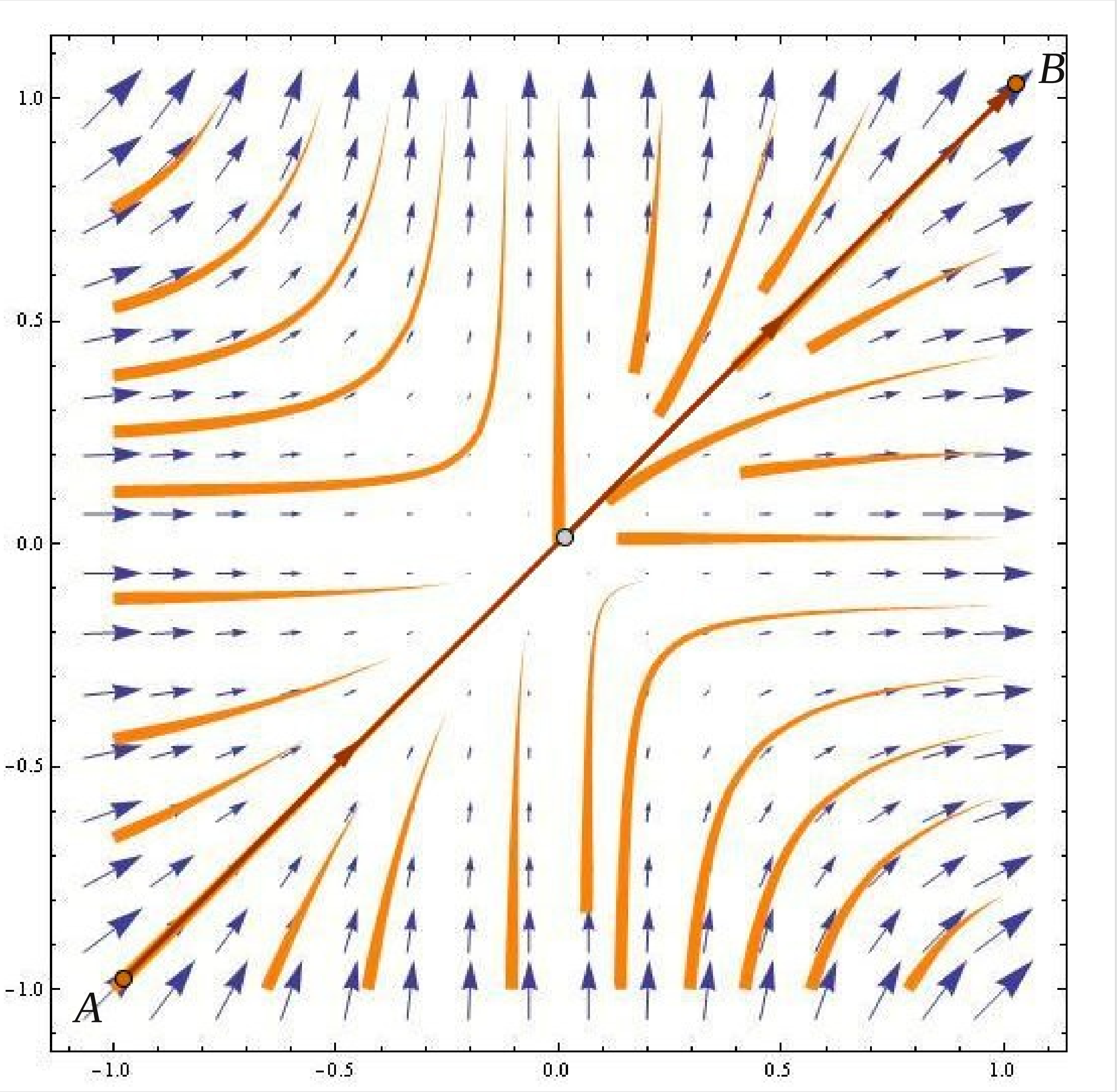


Abb. L-6b: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\mathbf{F}\,(x, y) = (x^2, y^2)$.
Kurve C: ein geradliniger Weg vom Punkt A (-1, -1) zum Punkt B (1, 1)

$$\vec{F}(x\,,\,y) = x^2\;\vec{i} + y^2\;\vec{j}\,, \qquad C: \quad y = x^2\,, \qquad dy = 2\,x\,dx$$

$$C: \quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$c\,)\quad A = (0,\ 0)\,, \quad B = (1,\ 1)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$d\,)\quad A = (-1,\ 1)\,, \quad B = (1,\ 1)\,, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$

Die vom Kraftfeld ***F** (x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$c\,)\quad W_3 = \int_{C_3} \left[\, F_x + F_y \cdot f\,'(x) \,\right] dx = \int_0^1 (x^2 + 2\,x^5)\;dx = \frac{2}{3}$$

$$d\,)\quad W_4 = \int_{C_4} \left[\, F_x + F_y \cdot f\,'(x) \,\right] dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2\,x^5)\;dx = \frac{2}{3}$$

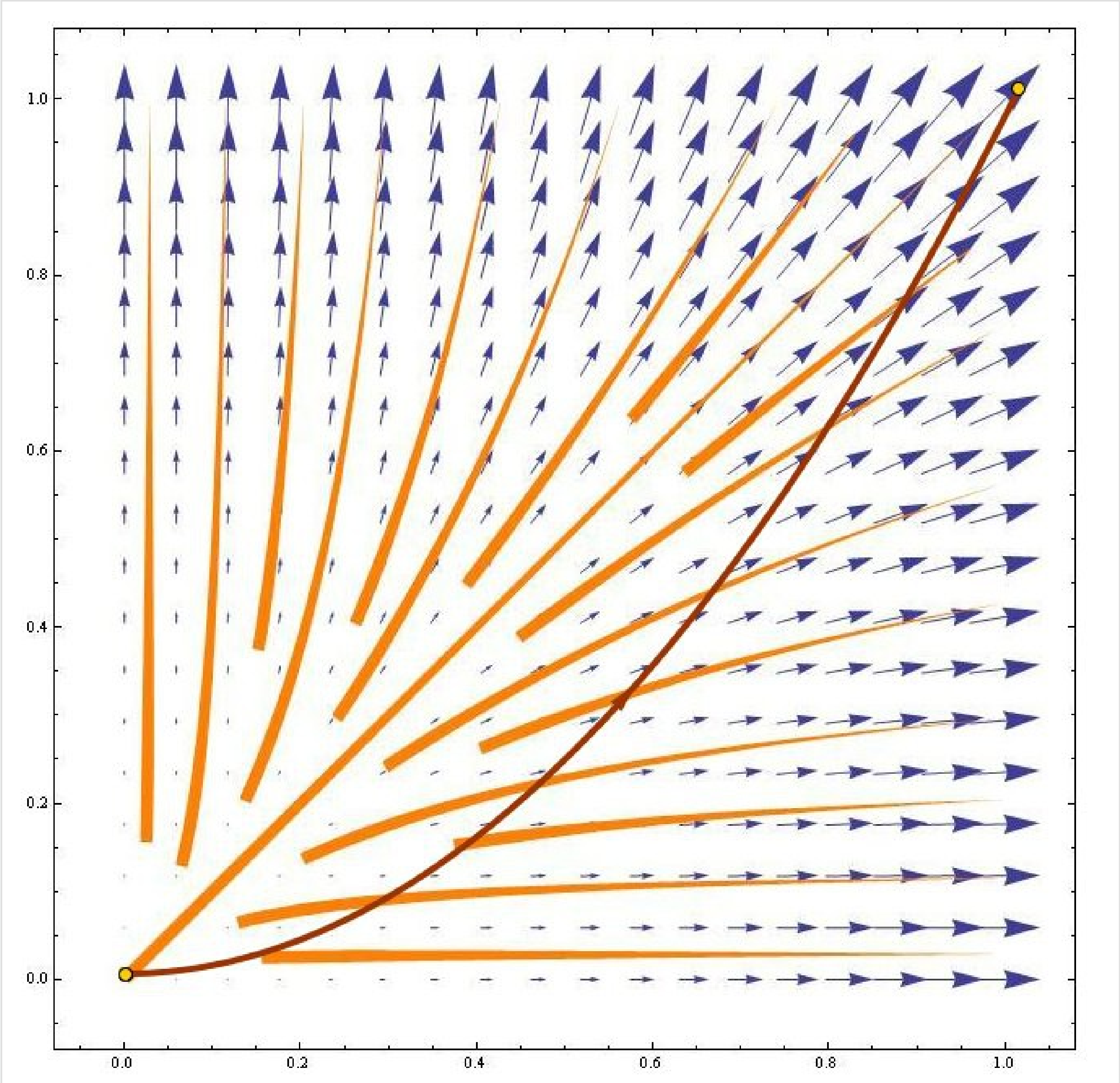


Abb. L-6c: Graphische Darstellung zur Aufgabe 6c: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}\,(x, y) = (x^2, y^2)$. *Kurve C: ein parabelförmiges Segment*

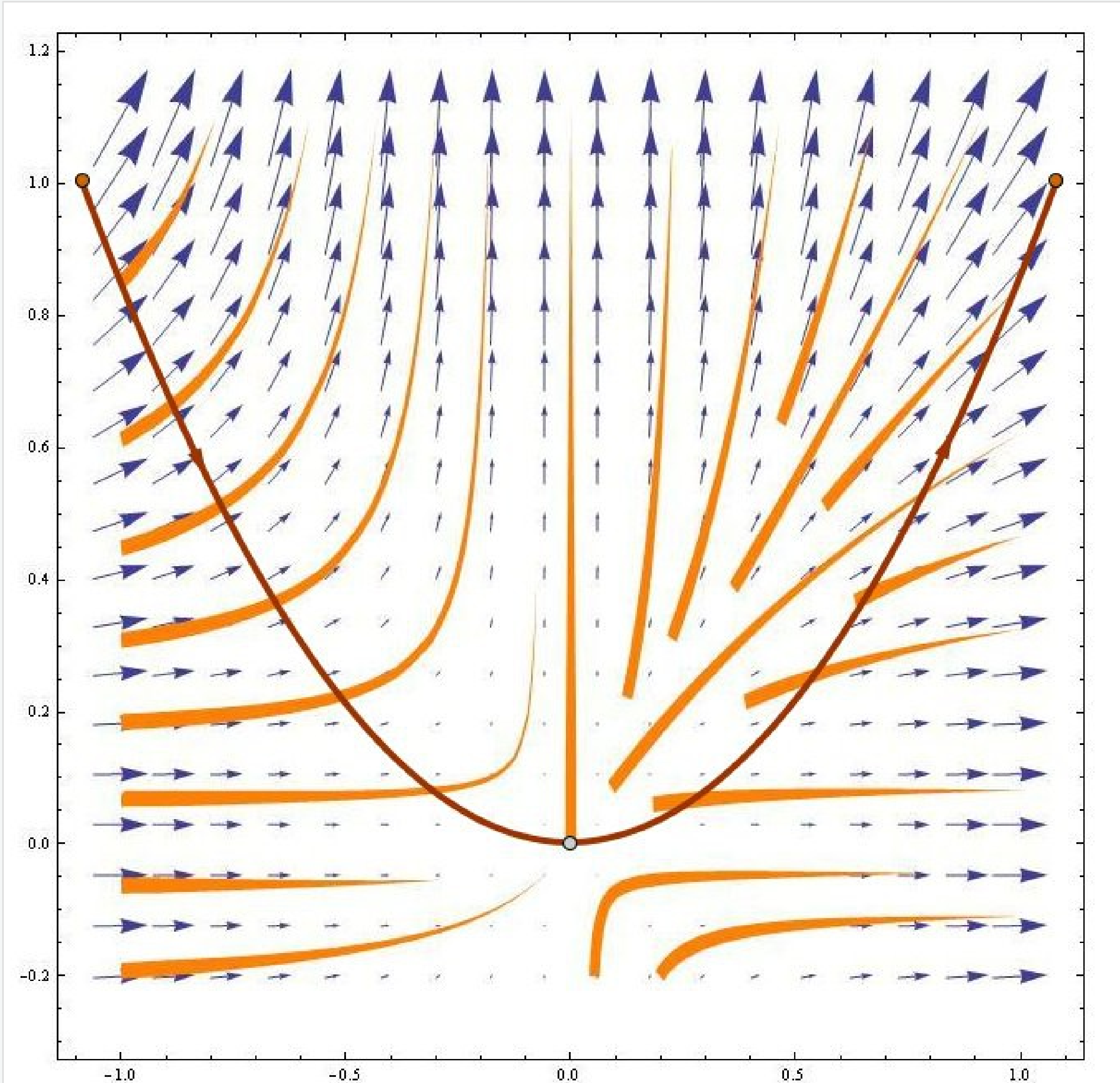


Abb. L-6d: Graphische Darstellung zur Aufgabe 6d: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2, y^2)$. *Kurve C: ein parabelförmiges Segment*

$$\vec{F}(x\,,\,y) = x^2\ \vec{i} + y^2\ \vec{j}\,, \qquad C: \quad y = x^3, \qquad dy = 3\,x^2\,dx$$

$$C: \quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^6 \end{pmatrix}$$

$e)\ \ A = (0,\ 0)\,, \quad B = (1,\ 1)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$f)\ \ A = (-1,\ 1)\,, \quad B = (1,\ 1)\,, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$e)\ \ W_5 = \int\limits_{C_5} \Big[\, F_x + F_y \cdot f\,'(x) \Big]\, dx = \int\limits_0^1 (x^2 + 3\,x^8)\ dx = \frac{2}{3}$$

$$f)\ \ W_6 = \int\limits_{C_6} \Big[\, F_x + F_y \cdot f\,'(x) \Big]\, dx = \int\limits_{-1}^1 (x^2 + 3\,x^8)\ dx = \frac{4}{3}$$

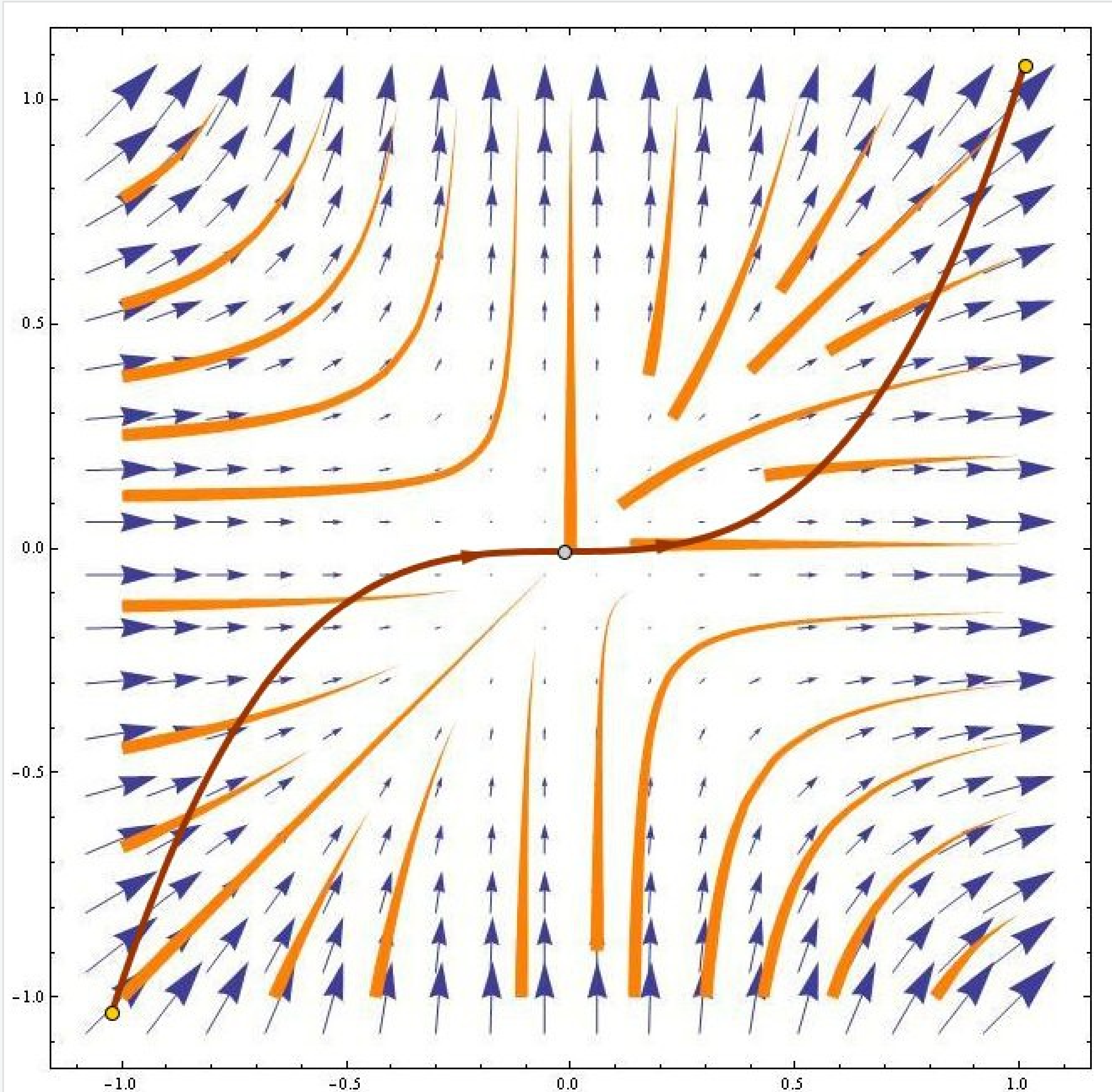


Abb. L-6e: Graphische Darstellung zur Aufgabe 6 e, f: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2, y^2)$. *Kurve C: ein Kurvensegment der Funktion* $y = x^3$

$$\vec{F}(x\,,\,y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}\,, \qquad C: \quad y = x^4\,, \qquad dy = 4\,x^3\,dx$$

$$C: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^8 \end{pmatrix}$$

$g)\ \ A = (0,\ 0)\,, \quad B = (1,\ 1)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$h)\ \ A = (-1,\ 1)\,, \quad B = (1,\ 1)\,, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$g)\ \ W_7 = \int_{C_7} \left[\, F_x + F_y \cdot f\,'(x) \,\right] dx = \int_0^1 (x^2 + 4\,x^{11})\; dx = \frac{2}{3}$$

$$h)\ \ W_8 = \int_{C_8} \left[\, F_x + F_y \cdot f\,'(x) \,\right] dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 4\,x^{11})\; dx = \frac{2}{3}$$

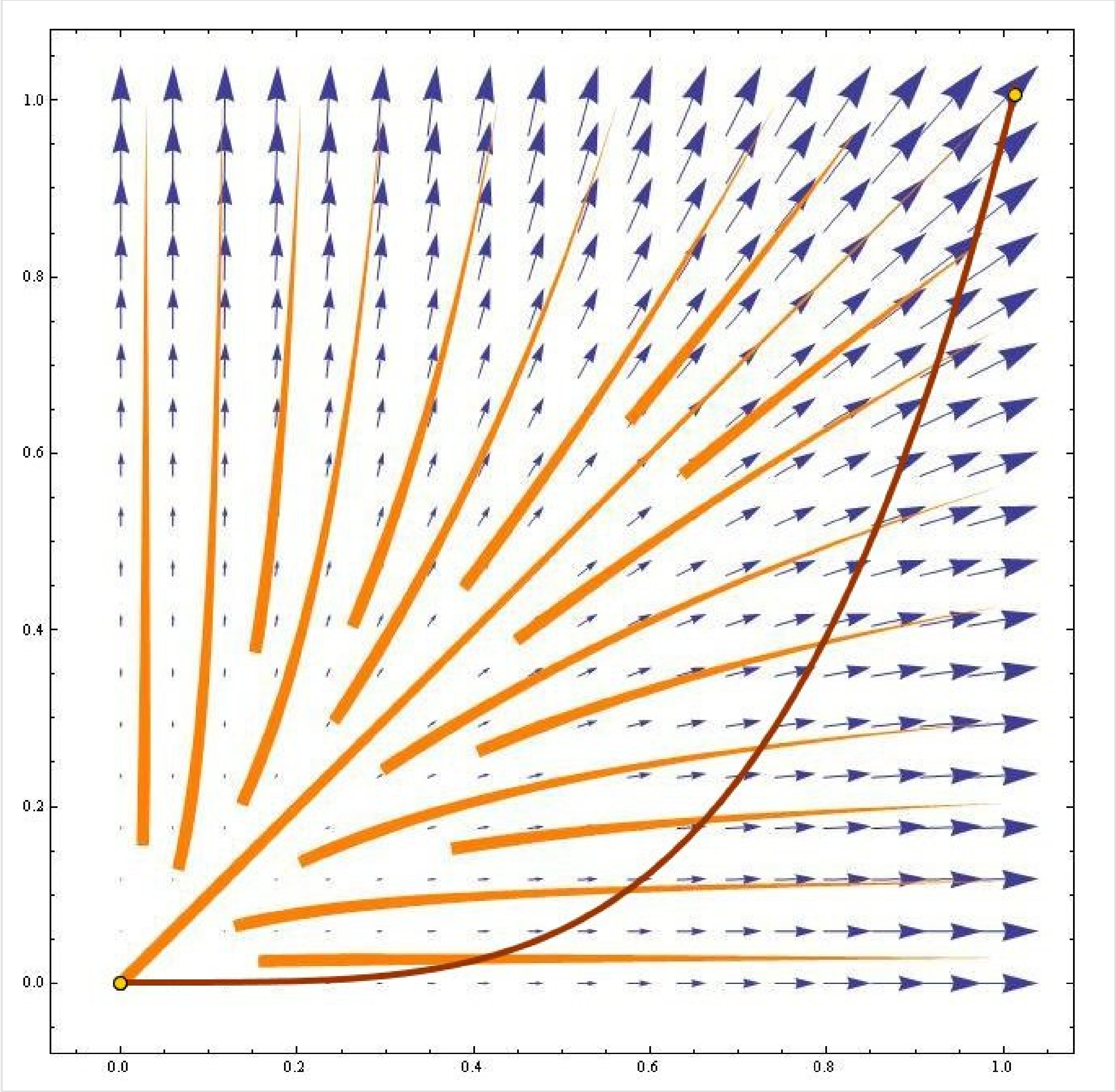


Abb. L-6g: Graphische Darstellung zur Aufgabe 6 g: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2, y^2)$. *Kurve C: ein Kurvensegment der Funktion* $y = x^4$

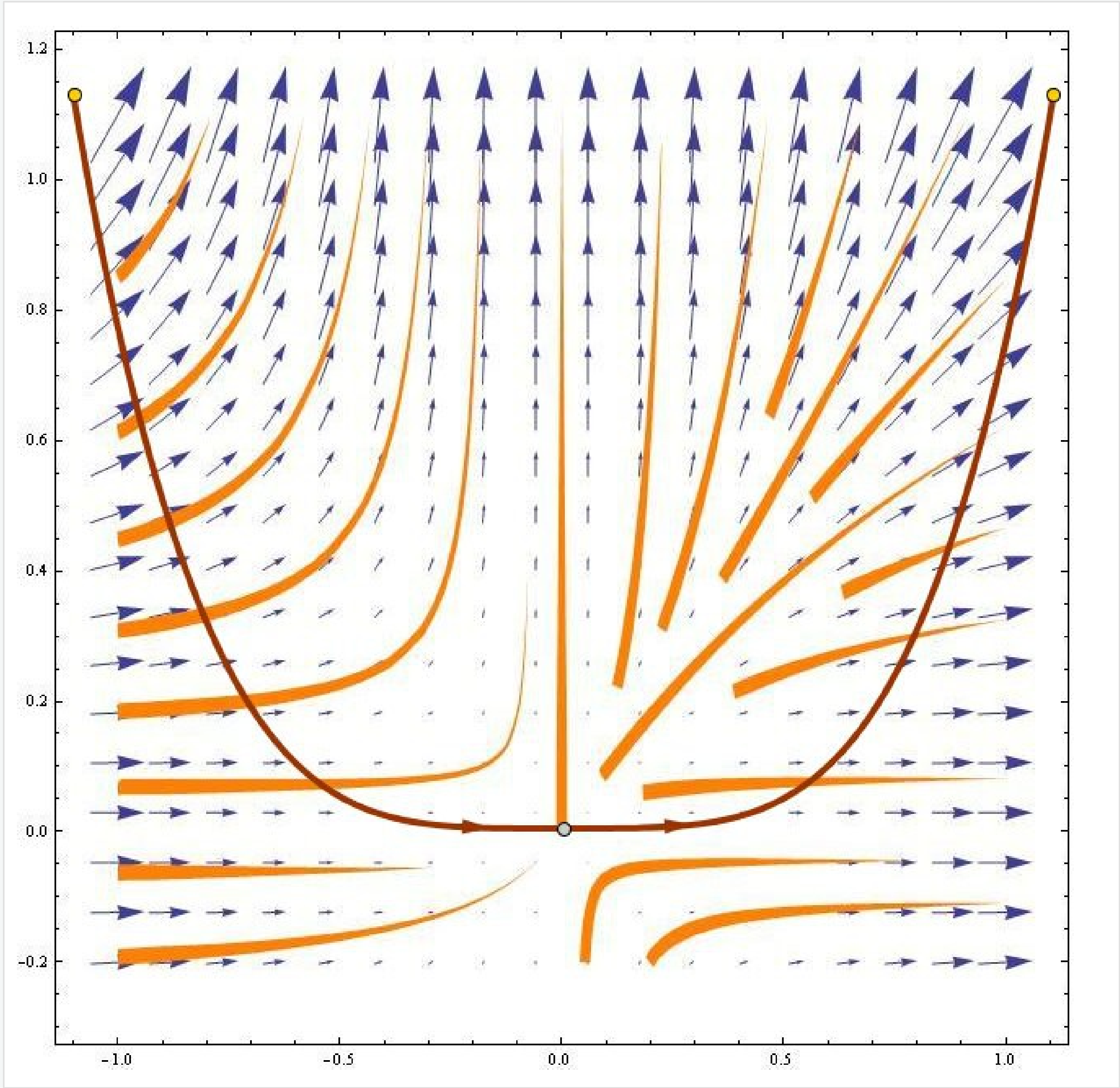


Abb. L-6h: Graphische Darstellung zur Aufgabe 6 h: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2, y^2)$. *Kurve C: ein Kurvensegment der Funktion* $y = x^4$