Linien- oder Kurvenintegrale: Aufgaben

Im Fall eines ebenen Linienintegrals liegt der Integrationsweg C häufig in Form einer expliziten Funktionsgleichung $y = f(x)$ vor. Das Linienintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{r}$$

wird dann folgendermaßen berechnet: Man ersetzt

- die Koordinate y durch die Funktion $f(x)$
- das Differential dy durch $f'(x)\,dx$

und erhält ein gewöhnliches Integral mit der Integrationsvariablen x

$$\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \int_C \left[F_x(x, y)\,dx + F_y(x, y)\,dy \right] =$$

$$= \int_C \left[F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) \right] dx$$

Berechnen Sie die Arbeit, die das ebene Kraftfeld ***F** (x, y)* bei einer Verschiebung von $O\,(0,\ 0)$ nach $P\,(1,\ 1)$ an einem Massenpunkt verrichtet

1) eine geradlinige Verschiebung $C_1: \quad y = x$

2) Verschiebung längs einer Parabel $C_2: \quad y = x^2$

3) Verschiebung längs einer Parabel $C_3: \quad y = x^5$

Aufgabe 2: $\vec{F}\,(x\,,\ y) = (x\,y^{\,2}\,,\quad x\,y)\,,$

Aufgabe 3: $\vec{F}\,(x\,,\ y) = (-x\,y\,,\quad x^2\,y)$

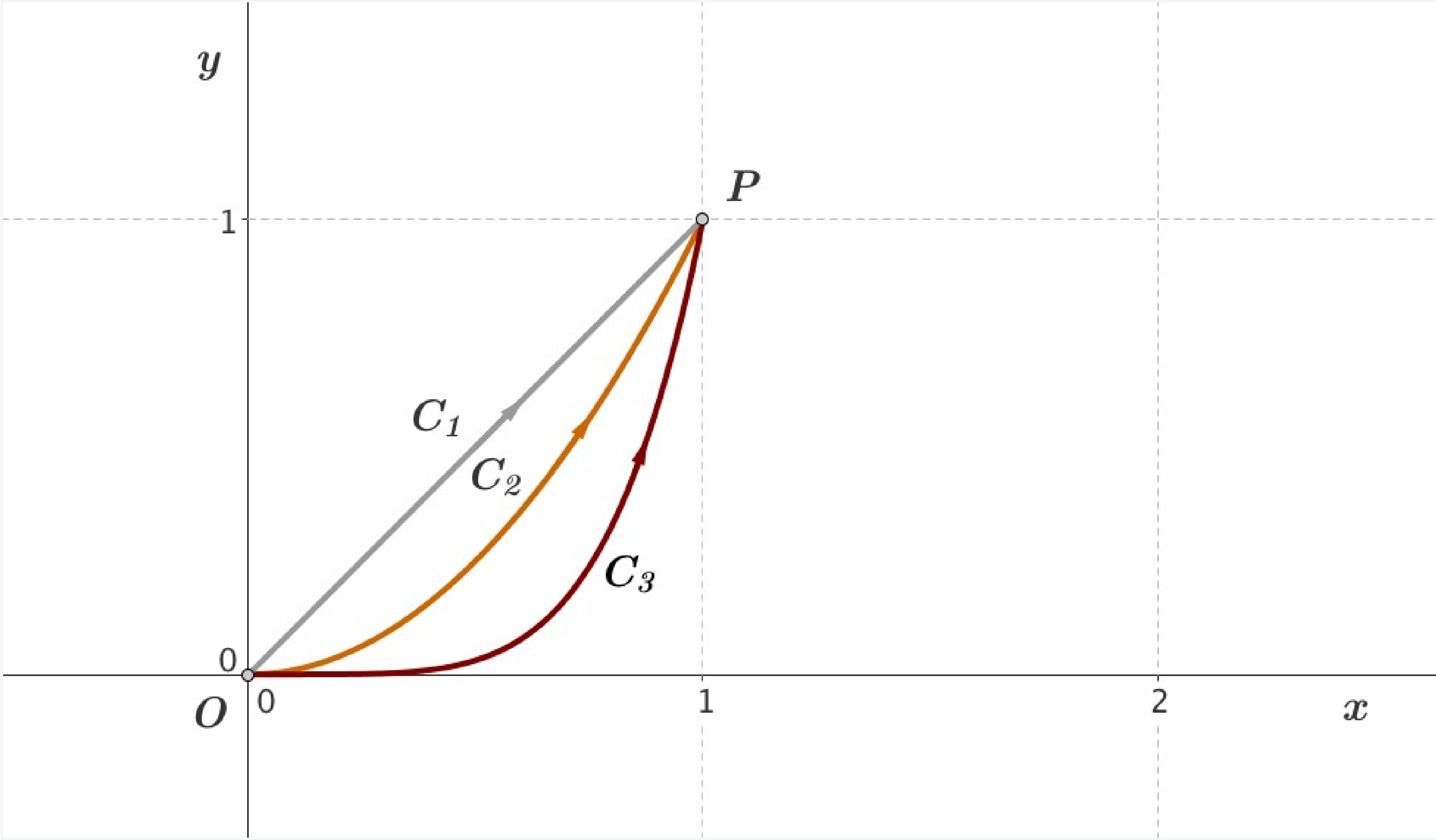

Abb. A2-1: Graphische Darstellung der Intagrationswege der Aufgabe vom Punkt O (0, 0) nach P (1, 1)

$$C_1: \quad y = x\,, \qquad C_2: \quad y = x^2\,, \qquad C_3: \quad y = x^5$$

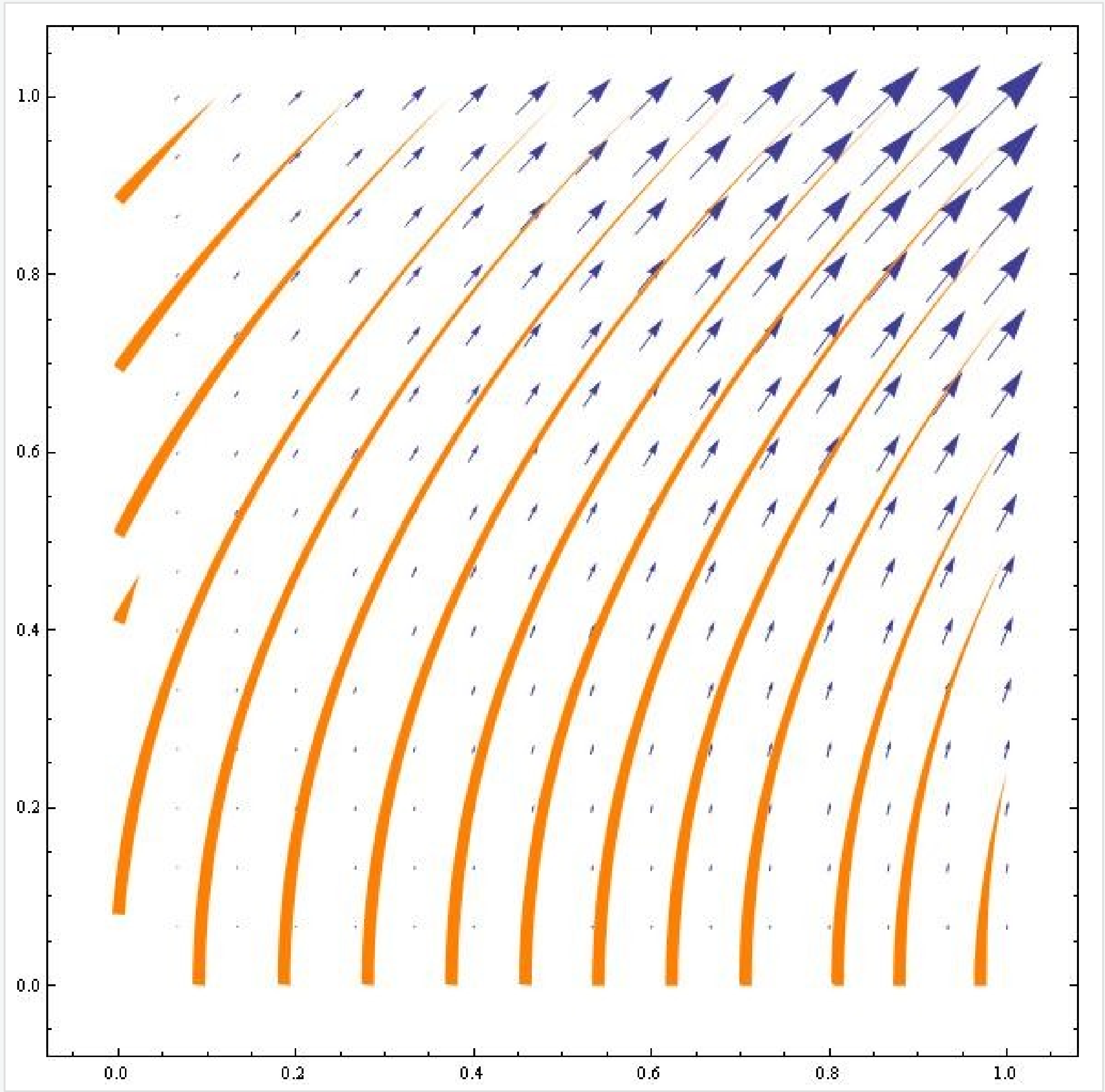

*Abb. A2-2: Das ebene Vektorfeld **F** (x, y) = (x y², x y) und die Feldlinien*

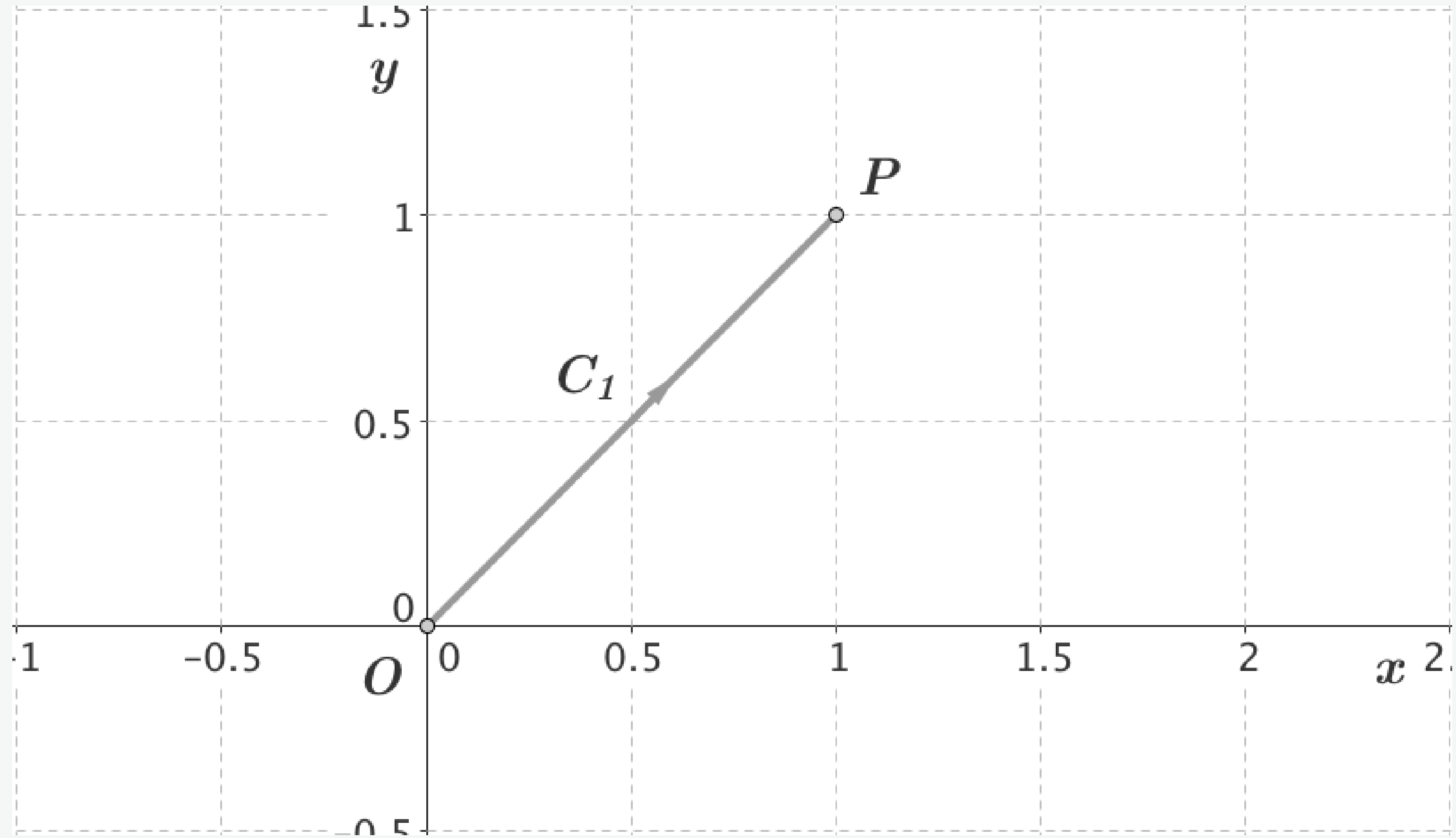

Abb. L2-1: Der Integrationsweg ist eine geradlinige Strecke vom Punkt O (0, 0) zum Punkt P (1, 1)

Der Integrationsweg C ist ein Segment der Geraden $y = x$ und kann im Parameterform so dargestellt werden:

$$C_1 \quad : y = x \qquad : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$C_1 \quad : y = x , \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,y^2 \\ x\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x , \qquad f'(x) = 1$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_1 = \int_{C_1} \left[F_x + F_y \cdot f'(x) \right] dx = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 \cdot 1 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{12} \simeq 0.583$$

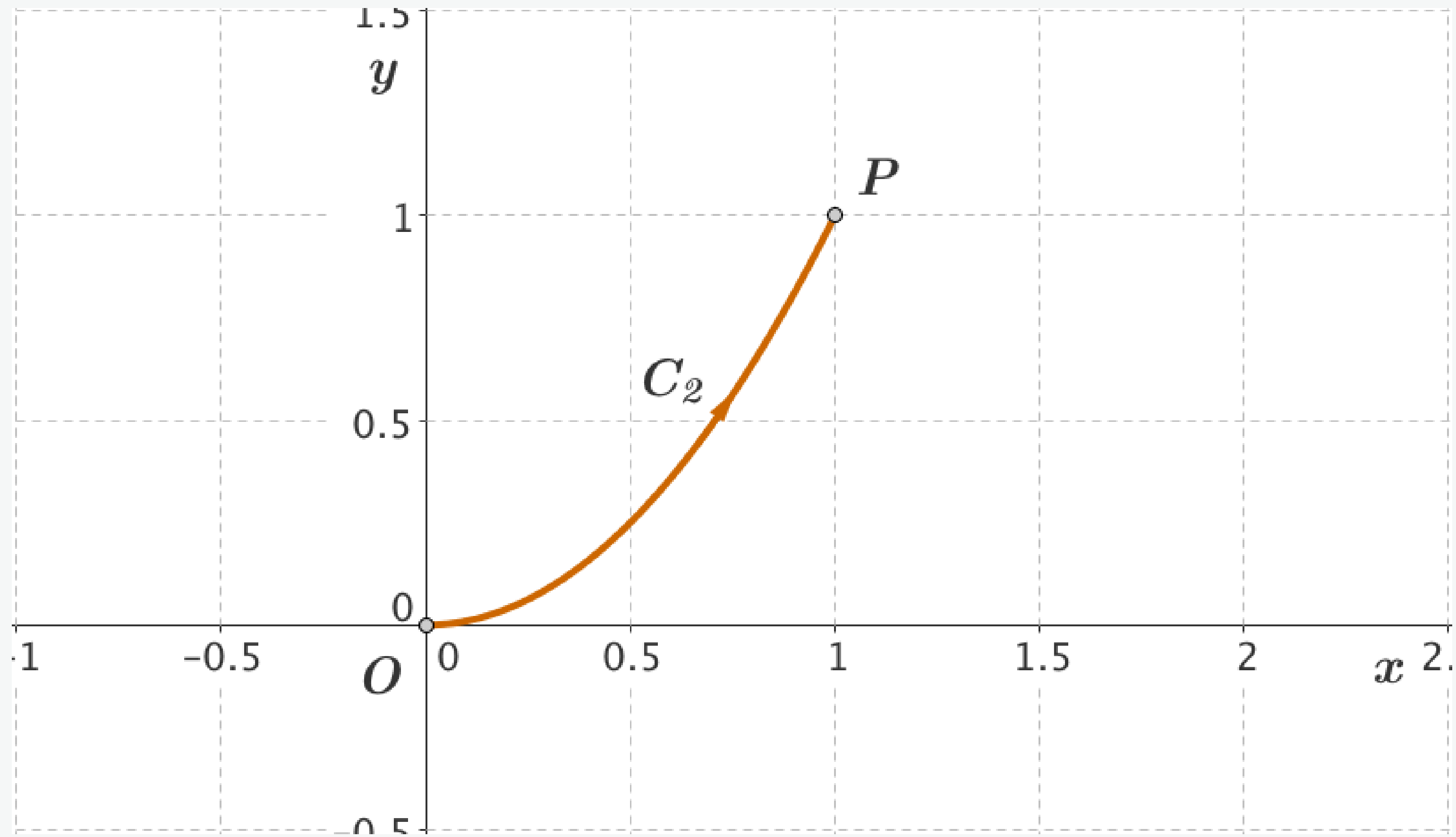

Abb. L2-2: Der Integrationsweg ist eine parabelförmige Verbindung vom Punkt O (0, 0) zum Punkt P (1, 1)

$$C_2 \quad : y = x^2, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$C_2 \quad : y = x^2 \qquad : \vec{F} = \begin{pmatrix} x\,y^2 \\ x\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^5 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2, \qquad f'(x) = 2\,x$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_2 = \int_{C_2} \left[F_x + F_y \cdot f'(x) \right] dx = \int_0^1 (x^5 + 2\;x^4)\;dx = \frac{17}{30} \simeq 0.567$$

Das Kurvenintegral hängt nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab, sondern auch vom vorgegebenen Weg.

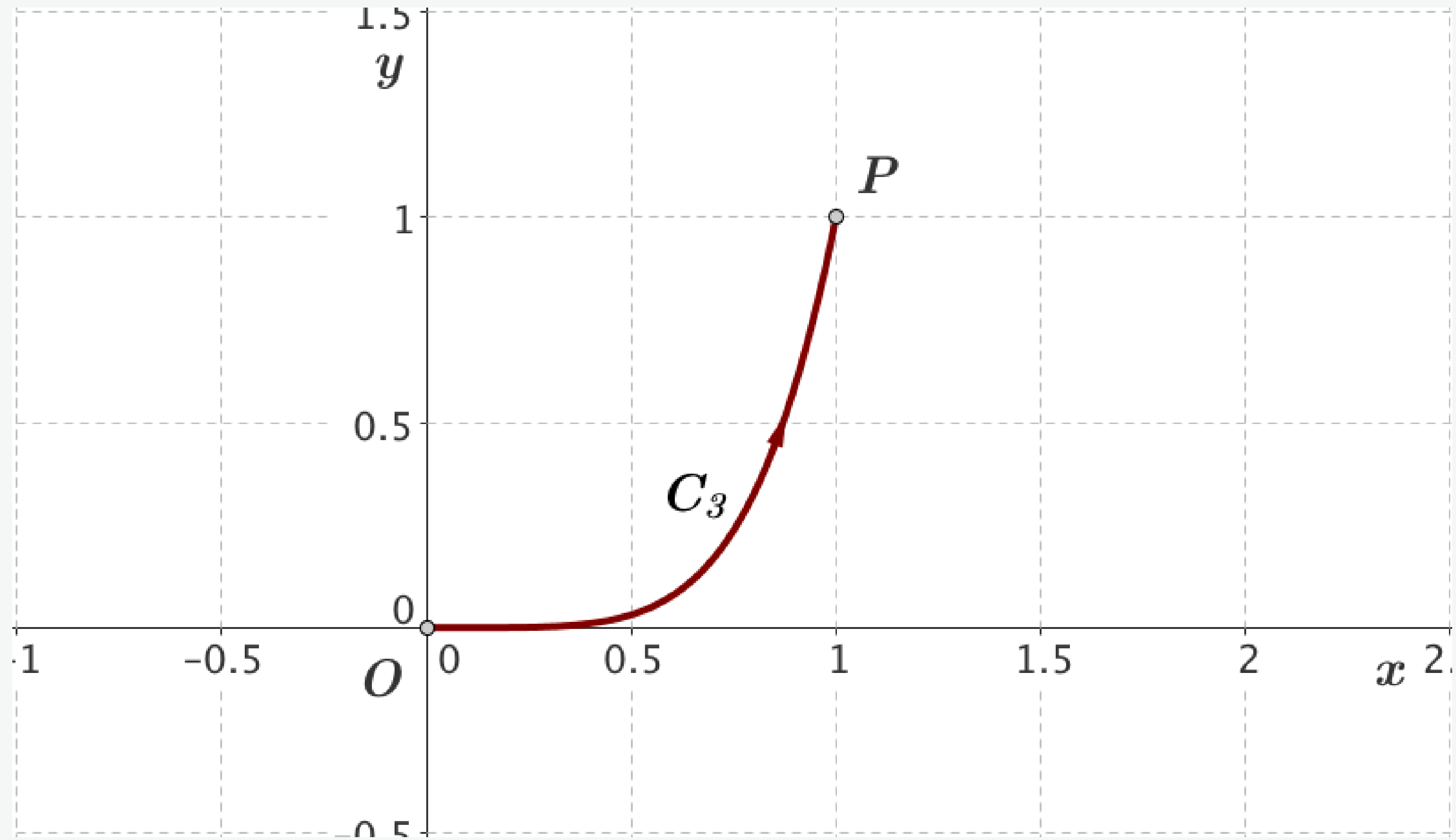

Abb. L2-3: Der Integrationsweg vom Punkt O (0, 0) zum Punkt P (1, 1)

$$C_3 : \quad y = x^5, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^5 \end{pmatrix}, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$C_3 : \quad y = x^5 : \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} x\, y^2 \\ x\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{11} \\ x^6 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^5, \qquad f'(x) = 5\, x^4$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_3 = \int_{C_3} \left[F_x + F_y \cdot f'(x) \right] dx = \int_0^1 (x^{11} + 5\, x^{10})\, dx = \frac{1}{12} + \frac{5}{11} =$$

$$= \frac{71}{132} \simeq 0.538$$

Das Kurvenintegral hängt nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab, sondern auch vom vorgegebenen Weg.

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} \simeq 0.583, \qquad W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} \simeq 0.567$$

$$W_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} \simeq 0.538,$$

$$W_1 > W_2 > W_3$$

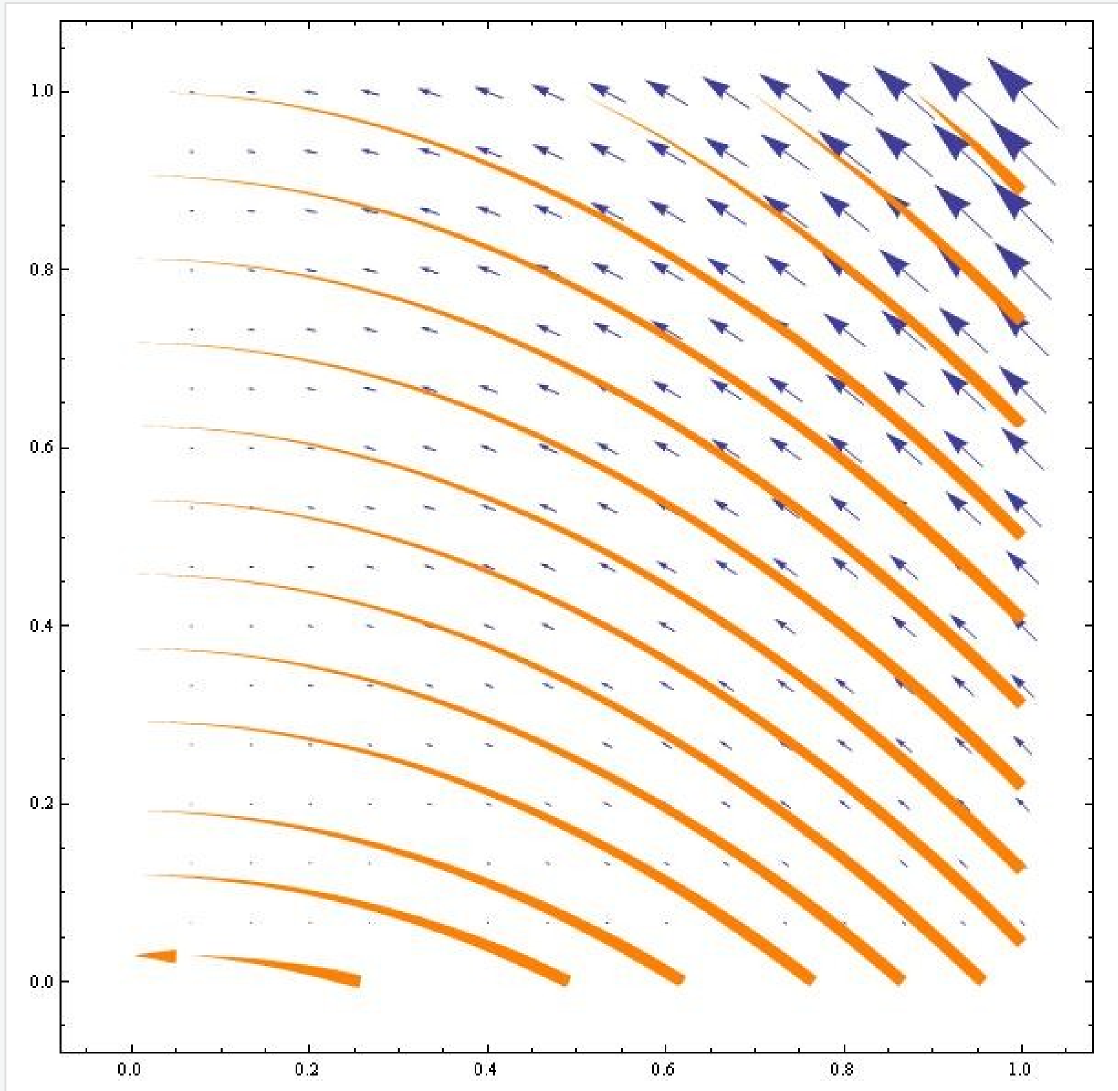

Abb. L3-1: Das ebene Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x, y) = (-x\,y,\ x^2\,y)$ *und die Feldlinien*

$$C_1 \quad : y = x \qquad : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -x\,y \\ x^2\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x, \qquad f'(x) = 1$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_1 = \int_{C_1} \left[F_x + F_y \cdot f'(x) \right] dx = \int_0^1 (-x^2 + x^3)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{12} \simeq -0.083$$

$$C_2 \quad : y = x^2 \qquad : \vec{F} = \begin{pmatrix} -x\,y \\ x^2\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2, \qquad f'(x) = 2x$$

Die vom Kraftfeld ***F** (x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_2 = \int_{C_2} \left[F_x + F_y \cdot f'(x) \right] dx = \int_0^1 (-x^3 + 2x^5)\ dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \simeq 0.083$$

$$C_3 : \quad y = x^5 : \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} -x\,y \\ x^2\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^6 \\ x^7 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^5, \qquad f'(x) = 5\,x^4$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_3 = \int_{C_3} \left[F_x + F_y \cdot f'(x) \right] dx = \int_0^1 \left(-x^6 + 5\,x^{11} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^7}{7} + \frac{5\,x^{12}}{12} \right]_0^1 = \frac{23}{84} \simeq 0.274$$

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = -0.083, \qquad W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = 0.083,$$

$$W_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = 0.274$$

$$W_3 > W_2 > W_1$$

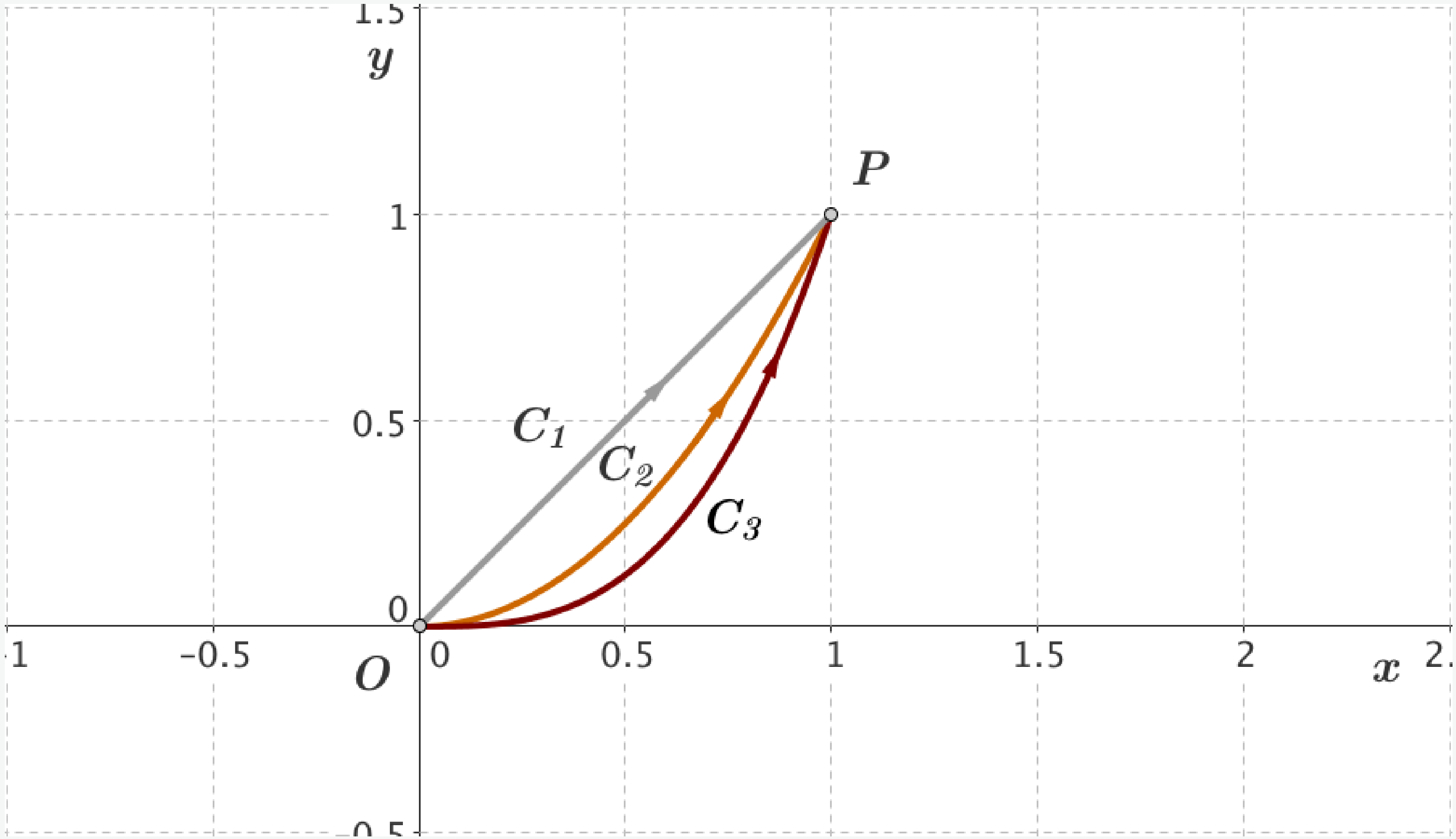

Abb. L4: Graphische Darstellung des Intagrationsweges vom Punkt O (0, 0) zum Punkt P (1, 1): 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y = x^3$

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C (y \cdot e^x \, dx + e^x \, dy)$ längs einer Kurve C zwischen den Punkten $O\,(0, 0)$ und $P\,(1, 1)$: 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y = x^3$

a) Der Integrationsweg ist eine gradlinige Strecke zwischen den Punkten O und P.

$$C_1 \quad : y = x \qquad : dy = dx\,, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$W_1 = \int_{C_1} (y \cdot e^x\, dx + e^x\, dy) = \int_0^1 (x\, e^x\, dx + e^x\, dx) = \left[\, x\, e^x \,\right]_0^1 = e$$

b) Der Integrationsweg ist ein Kurvensegment der Funktion $y = x^2$ zwischen den Punkten O und P.

$$C_2 \quad : y = x^2 \qquad : dy = 2\,x\,dx\,, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$W_2 = \int_{C_2} (y \cdot e^x\, dx + e^x\, dy) = \int_0^1 (x^2\, e^x\, dx + 2\,x\,e^x\, dx) =$$

$$= \left[\, x^2\, e^x \,\right]_0^1 = e$$

Entsprechende Integrale werden auf Seite 7-3 behandelt.

c) Der Integrationsweg ist ein ein Kurvensegment der Funktion $y = x^3$ zwischen den Punkten O und P.

$$C_3 \quad : y = x^3 \qquad : dy = 3\,x^2\,dx\,, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$W_3 = \int_{C_3} (y \cdot e^x \; dx + e^x \; dy) = \int_0^1 (x^3 \; e^x \; dx + 3\,x^2\,e^x \; dx) =$$

$$= \left[\, x^3 \; e^x \,\right]_0^1 = e$$

Entsprechende Integrale werden auf Seite 7-3 behandelt.

$$I(n,a) = \int x^{n} e^{a x}\, dx = \frac{1}{a}\, x^{n} e^{a x} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{a x}\, dx + C$$

$a)$ $$I(1,a) = \int x\, e^{a x}\, dx = \frac{e^{a x}}{a^{2}} (a x - 1) + C$$

$$I(1,1) = \int x\, e^{x}\, dx = e^{x} (x - 1) + C$$

$b)$ $$I(2,a) = \int x^{2} e^{a x}\, dx = e^{a x} \left(\frac{x^{2}}{a} - \frac{2x}{a^{2}} + \frac{2}{a^{3}} \right) + C$$

$$I(2,1) = \int x^{2} e^{x}\, dx = e^{x} \left(x^{2} - 2x + 2 \right) + C$$

$c)$ $$I(3,a) = \int x^{3} e^{a x}\, dx = \frac{1}{a}\, x^{3} e^{a x} - \frac{3}{a^{2}}\, e^{a x} \left(x^{2} - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^{2}} \right)$$

$$I(3,1) = \int x^{3} e^{x}\, dx = (-6 + 6x - 3x^{2} + x^{3})\, e^{x} + C$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C (y\ dx + x\ dy)$ längs einer Kurve C zwischen den Punkten $O\ (0, 0)$ und $P\ (1, 1)$:

a) eine geradlinige Verschiebung $y = x$

b) Verschiebung längs einer Parabel $y = x^2$

c) Verschiebung längs eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(1, 0)$ und dem Radius $R = 1$

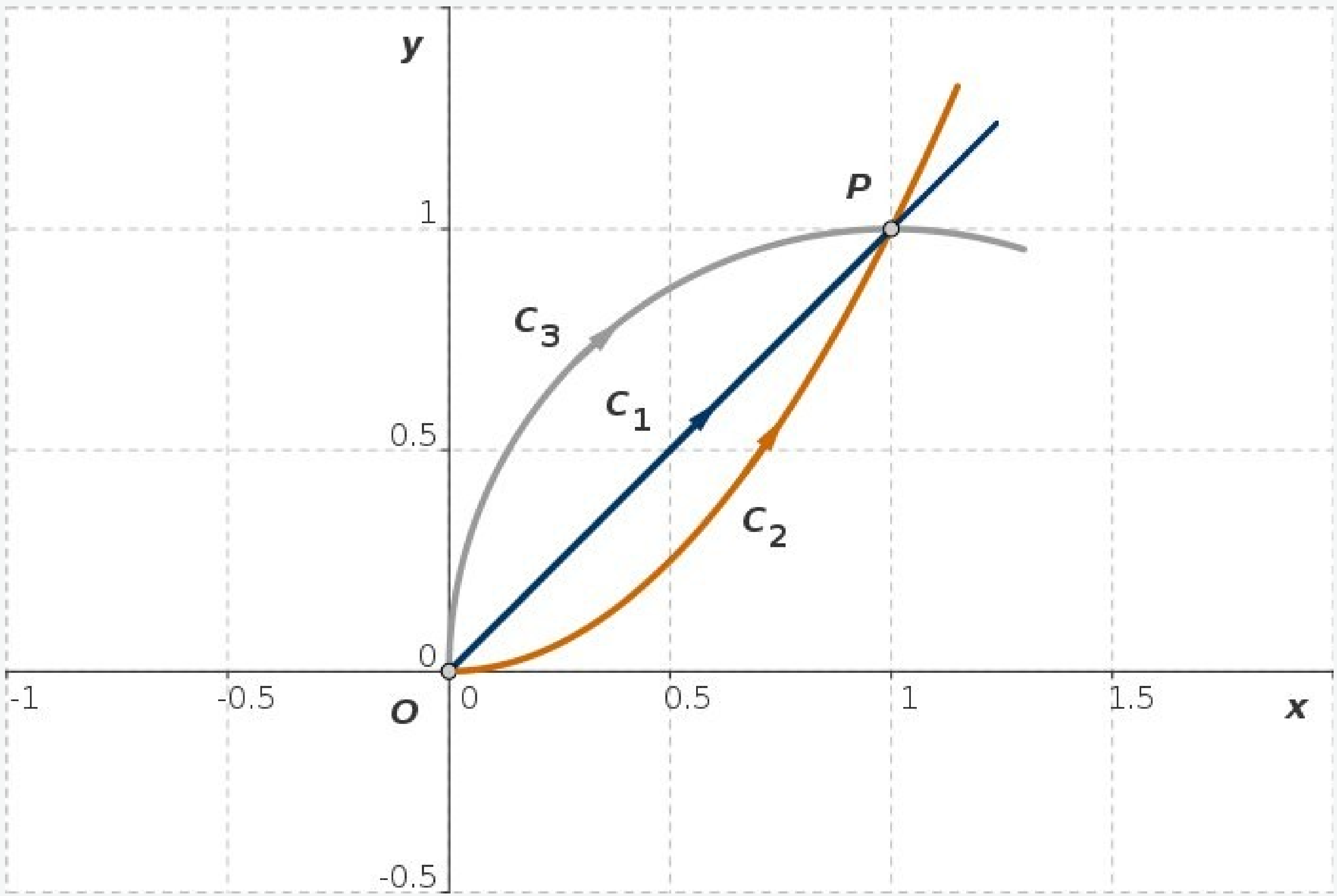

Abb. A5: Graphische Darstellung der Intagrationswege vom Punkt O (0, 0) zum Punkt P (1, 1)

$$C_1 \;\; : y = x\,, \qquad C_2 \;\; : y = x^2\,, \qquad C_3 \;\; : y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

$$C_1 \quad : y = x \qquad : dy = dx \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$W_1 = \int_{C_1} (y \ dx + x \ dy) = \int_0^1 (x \ dx + x \ dx) = 2 \int_0^1 x \ dx = 1$$

$$C_2 \quad : y = x^2 \qquad : dy = 2\,x\,dx \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$W_2 = \int_{C_2} (y \ dx + x \ dy) = \int_0^1 (x^2 \ dx + 2\,x^2\,dx) = 3 \int_0^1 x^2 \ dx = 1$$

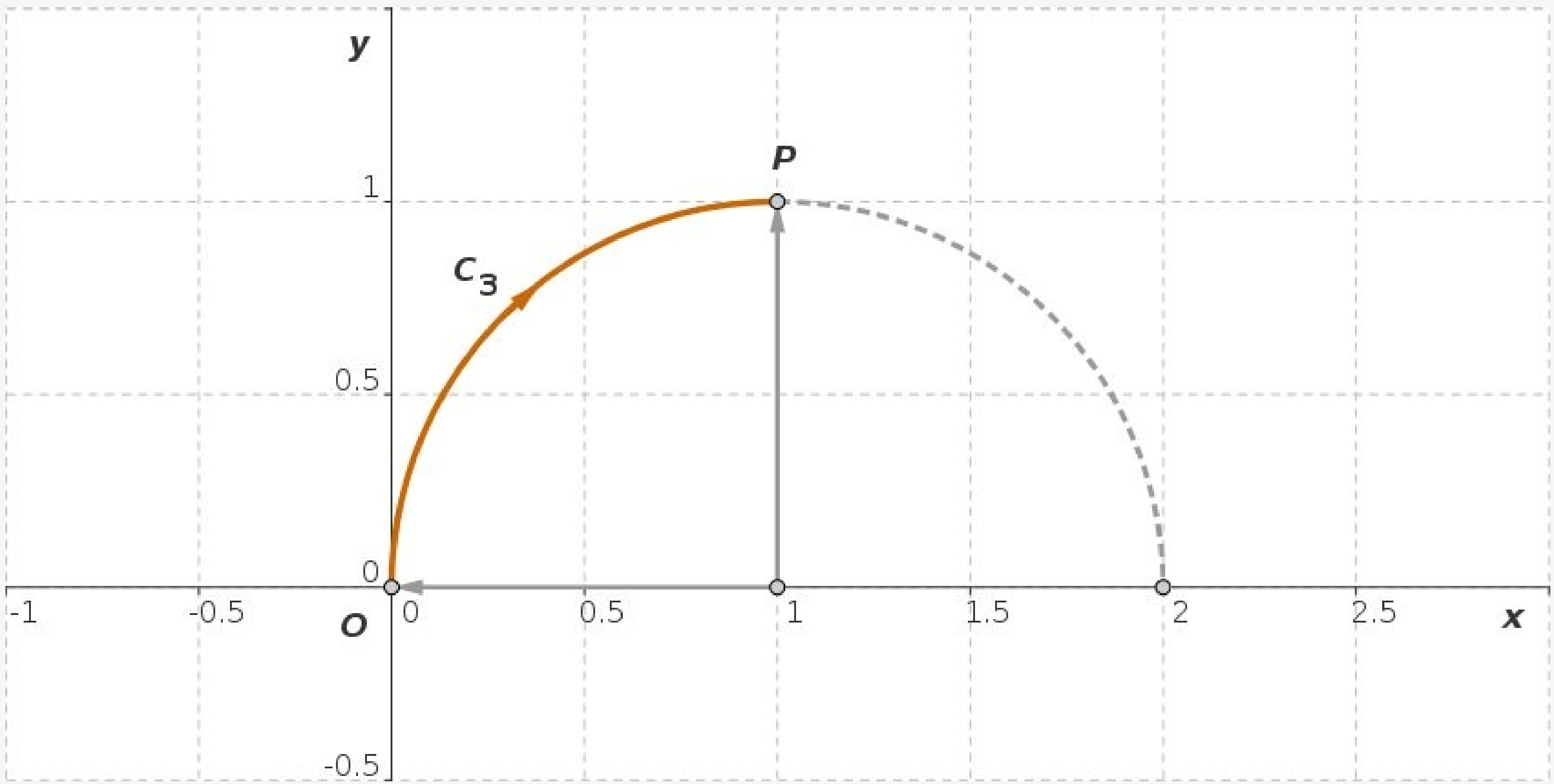

Abb. A5: Graphische Darstellung des Intagrationsweges längs eines Kreises mit Mittelpunkt (1, 0) und Radius R = 1 vom Punkt O (0, 0) zum Punkt P (1, 1)

Bei diesem Teil der Aufgabe ist es am einfachsten den Intagrationsweg in einer Parameterform darzustellen:

$$C_3 : \quad x = 1 + \cos\varphi , \qquad y = \sin\varphi , \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi \right)$$

$$C_3 : \quad x = 1 + \cos\varphi\,, \qquad y = \sin\varphi\,, \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi\right)$$

$$W_3 = \int_{C_3} (y\ dx + x\ dy) =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left[\,\sin\varphi\ (-\sin\varphi\, d\,\varphi) + (1 + \cos\varphi)\ \cos\varphi\, d\,\varphi\,\right] =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left[\,\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right] d\,\varphi =$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left[\,\cos\varphi + \cos(2\,\varphi)\,\right] d\,\varphi = 1$$