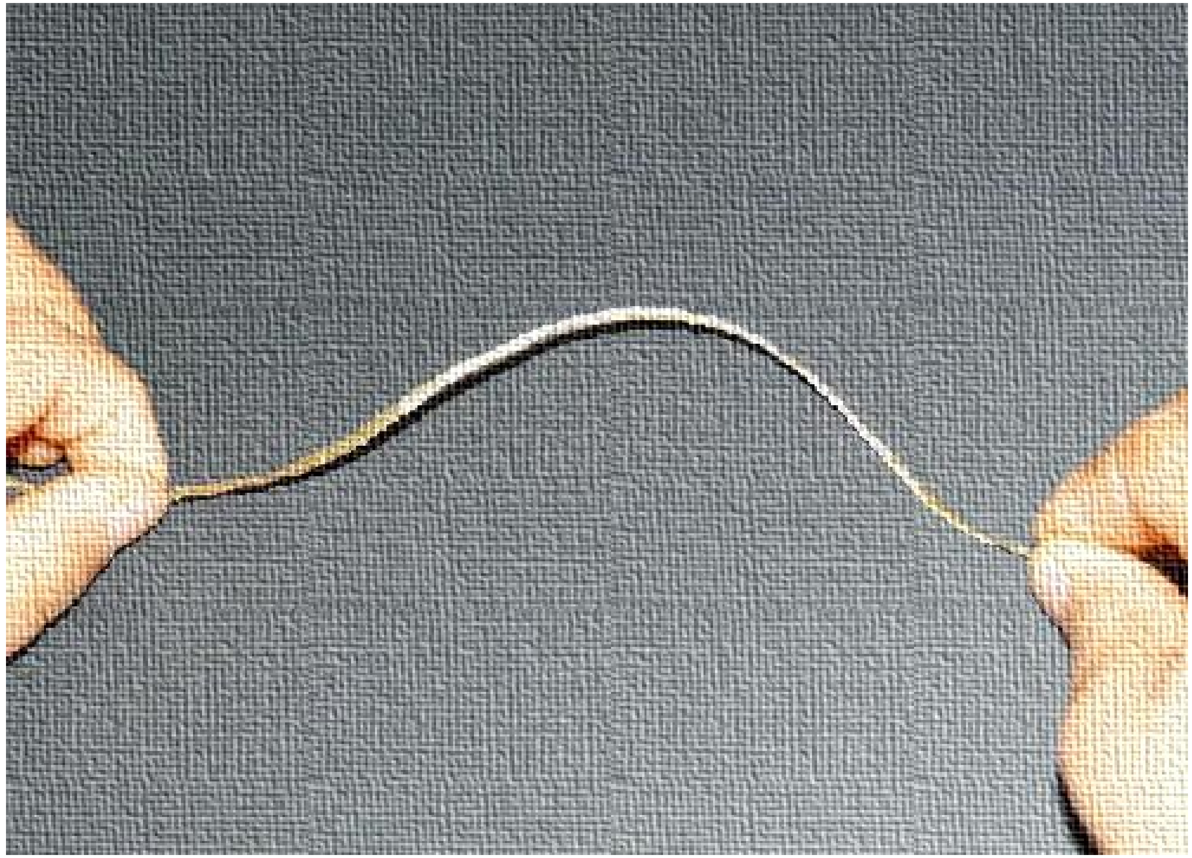


Linien- oder Kurvenintegrale

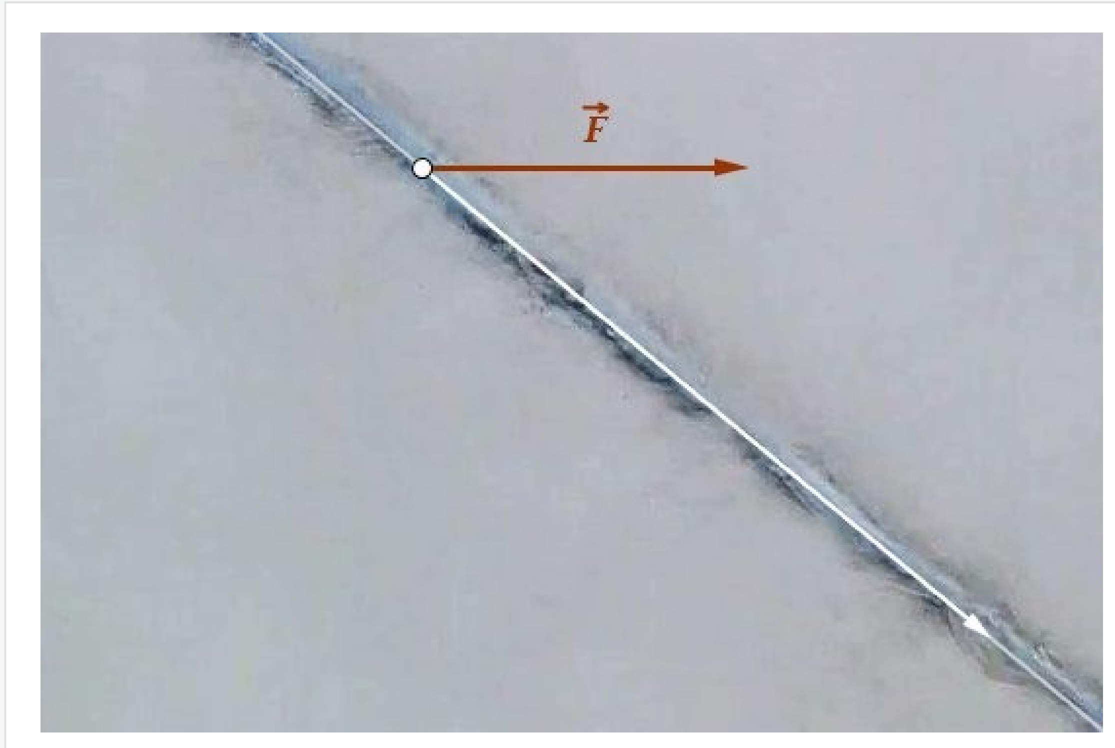


Abb. 1-1: Zum Begriff der Arbeit einer konstanten Kraft

Wir führen den Begriff eines Linien- oder Kurvenintegrals am Beispiel der physikalischen Arbeit ein, die von einem Kraftfeld beim Verschieben eines Massenpunkts verrichtet wird.

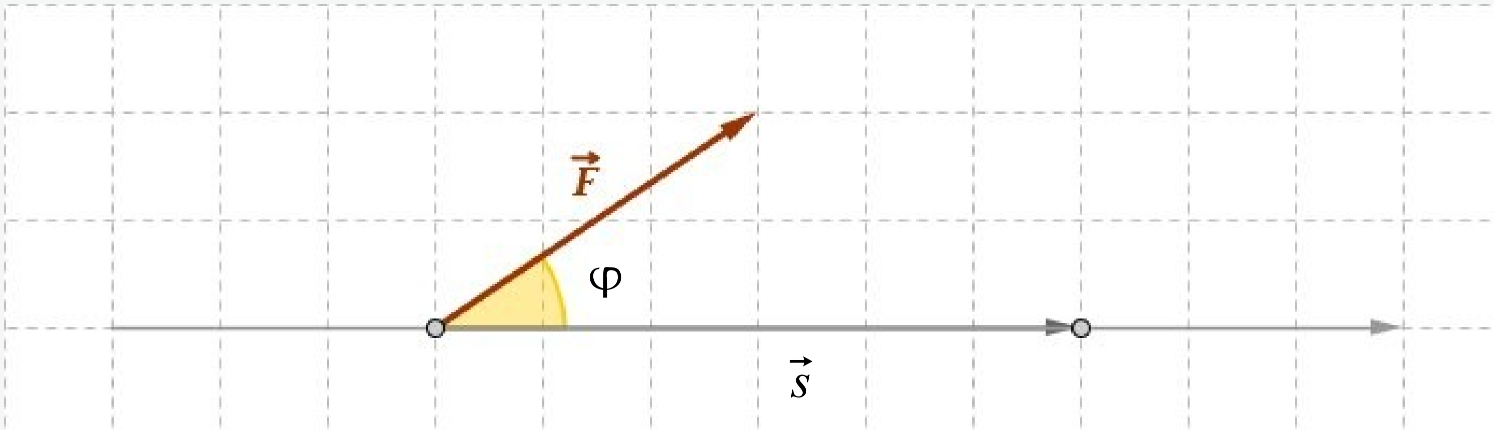


Abb. 1-2: Zum Begriff der Arbeit einer konstanten Kraft

Der Massenpunkt wird durch eine konstante Kraft ***F*** längs einer Geraden um den Vektor ***s*** verschoben. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\varphi$$

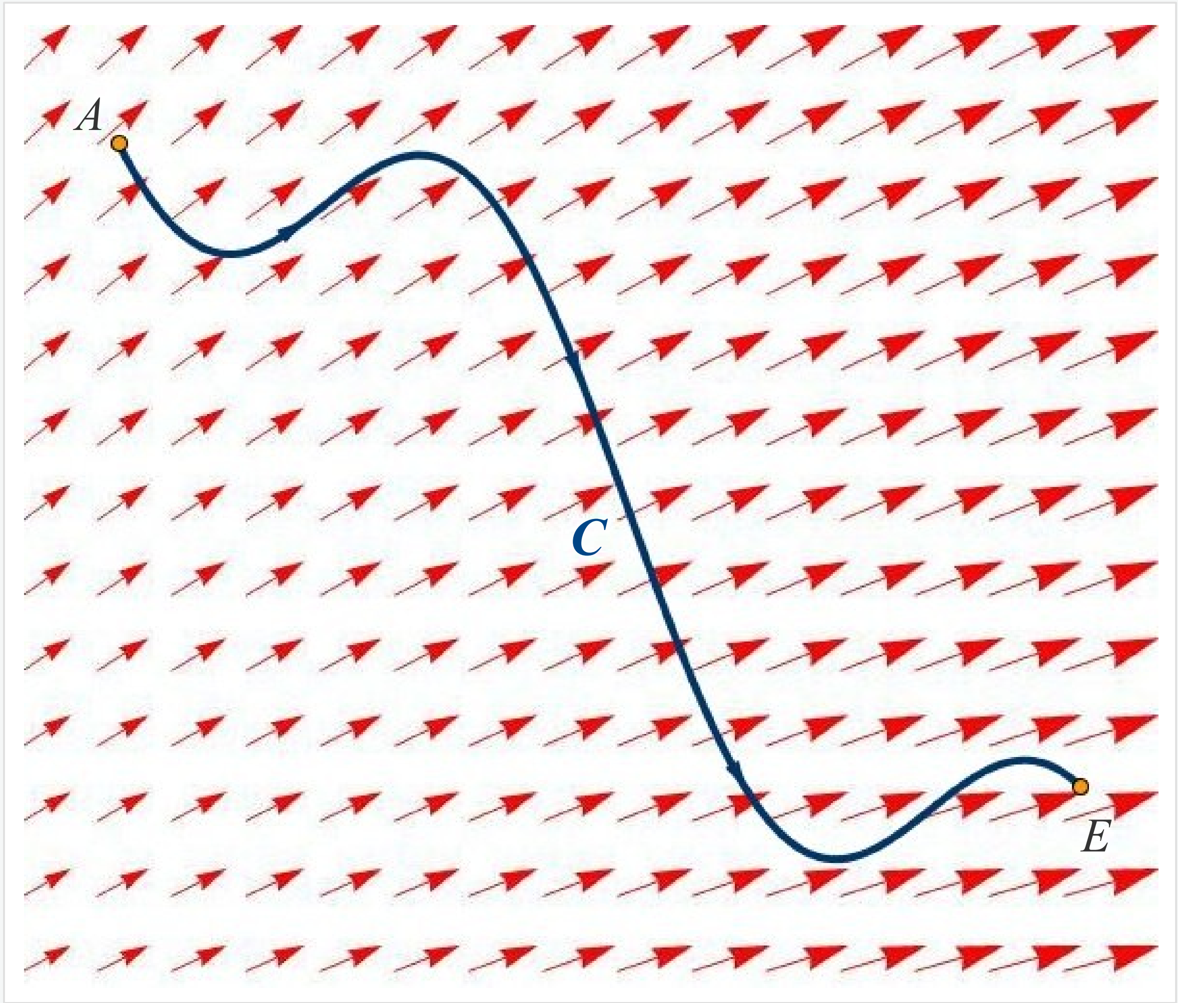


Abb. 1-3: Zum Begriff der Arbeit in einerm ebenen Kraftfeld

Ein Massenpunkt bewegt sich in einem ebenen Kraftfeld $\boldsymbol{F}(x, y)$ längs einer vorgegebenen Kurve C. Wir bestimmen die Arbeit, die bei der Bewegung auf C von A bis E von der Kraft am Massenpunkt geleistet wird.

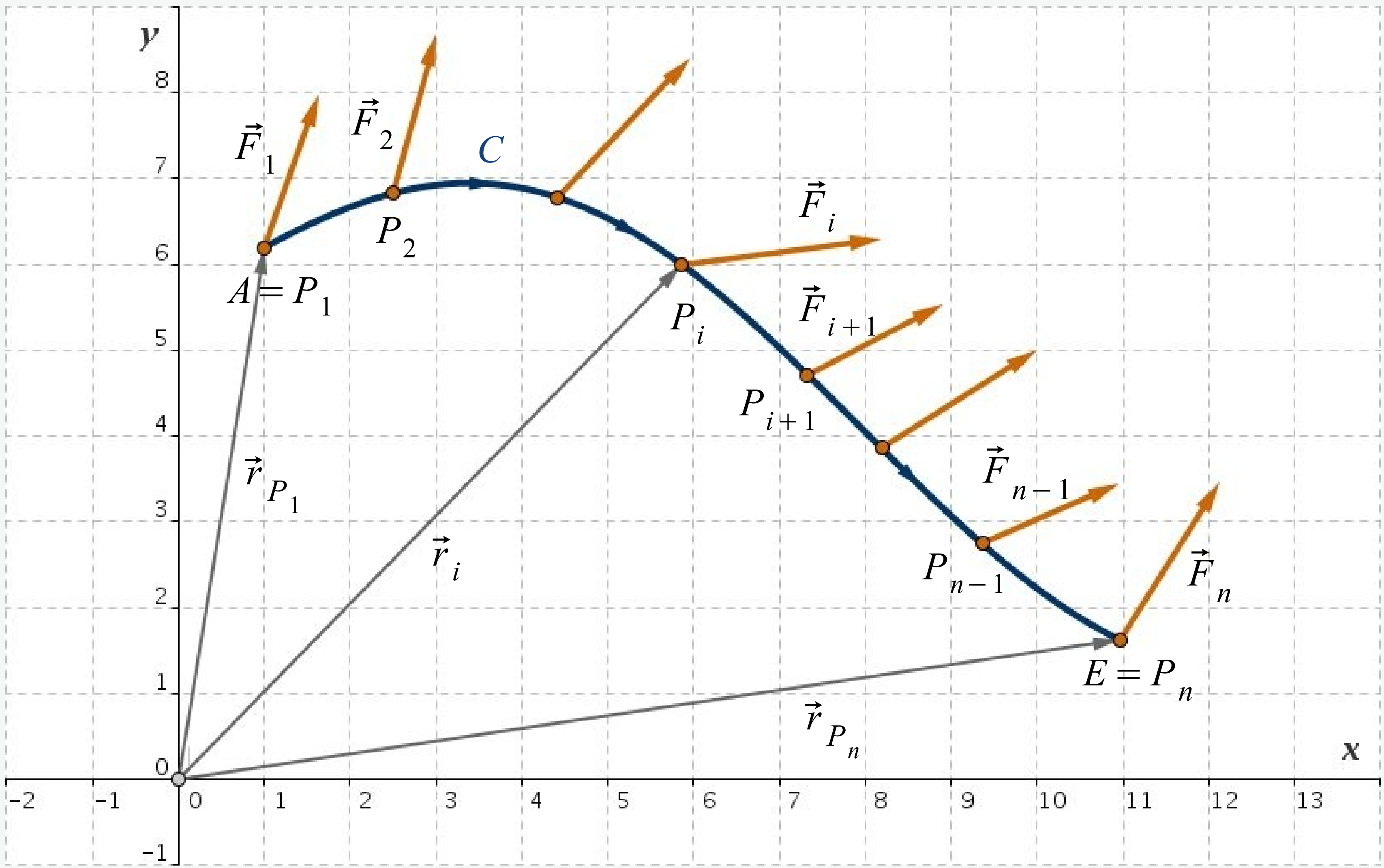


Abb. 1-4: Zum Begriff der Arbeit in einem ebenen Kraftfeld. Auf der Kurve werden n Punkte mit der entsprechenden in den Punkten wirkenden Kraft gezeichnet

$$P_1 = A, \quad P_2, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_n, \quad P_n = E$$

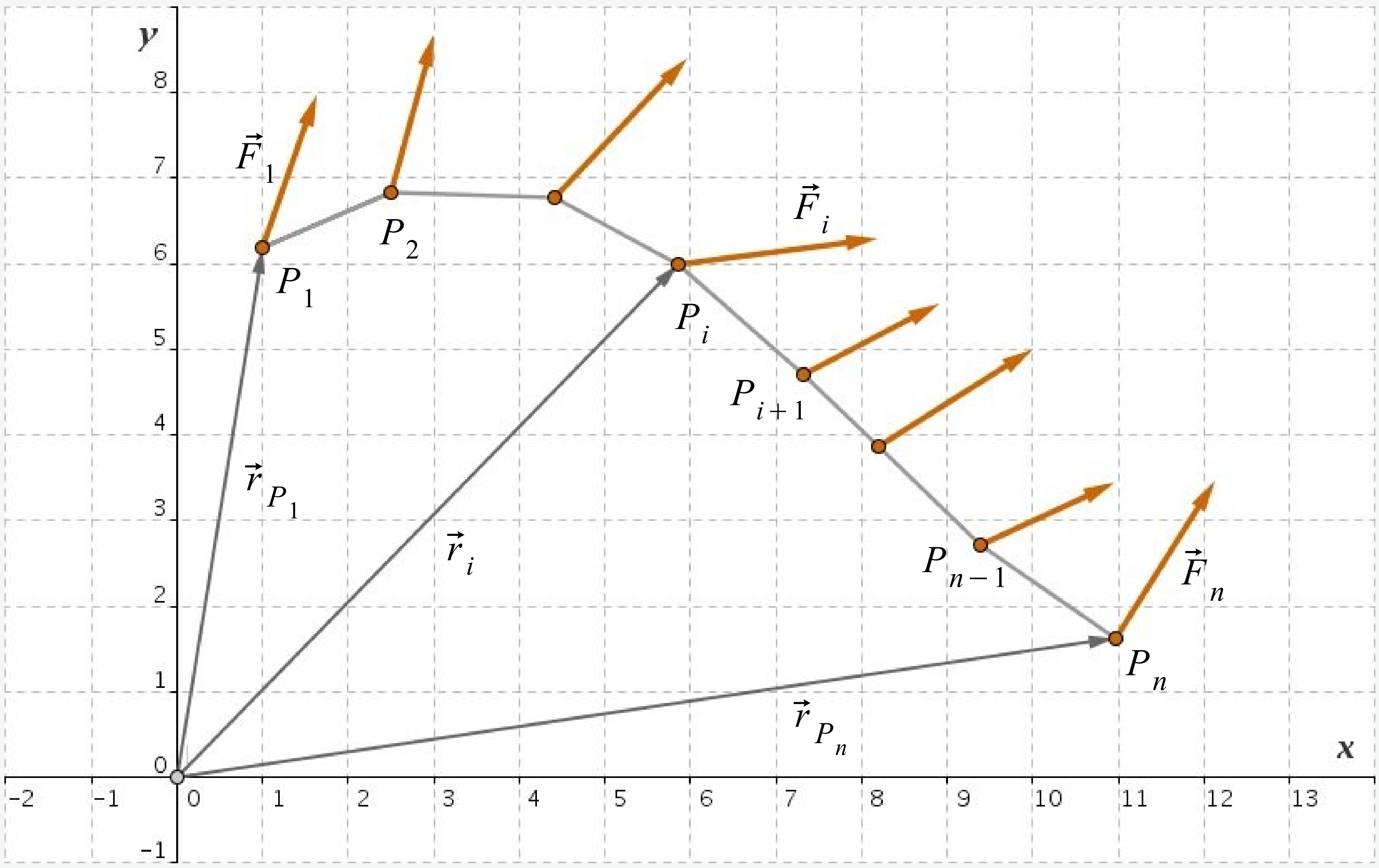


Abb. 1-5: Die Kurve wird entsprechend den gezeichneten Punkten durch n - 1 Segmente ersetzt. Im Folgenden nehmen wir an, dass die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt, innerhalb eines jeden Segments konstant ist

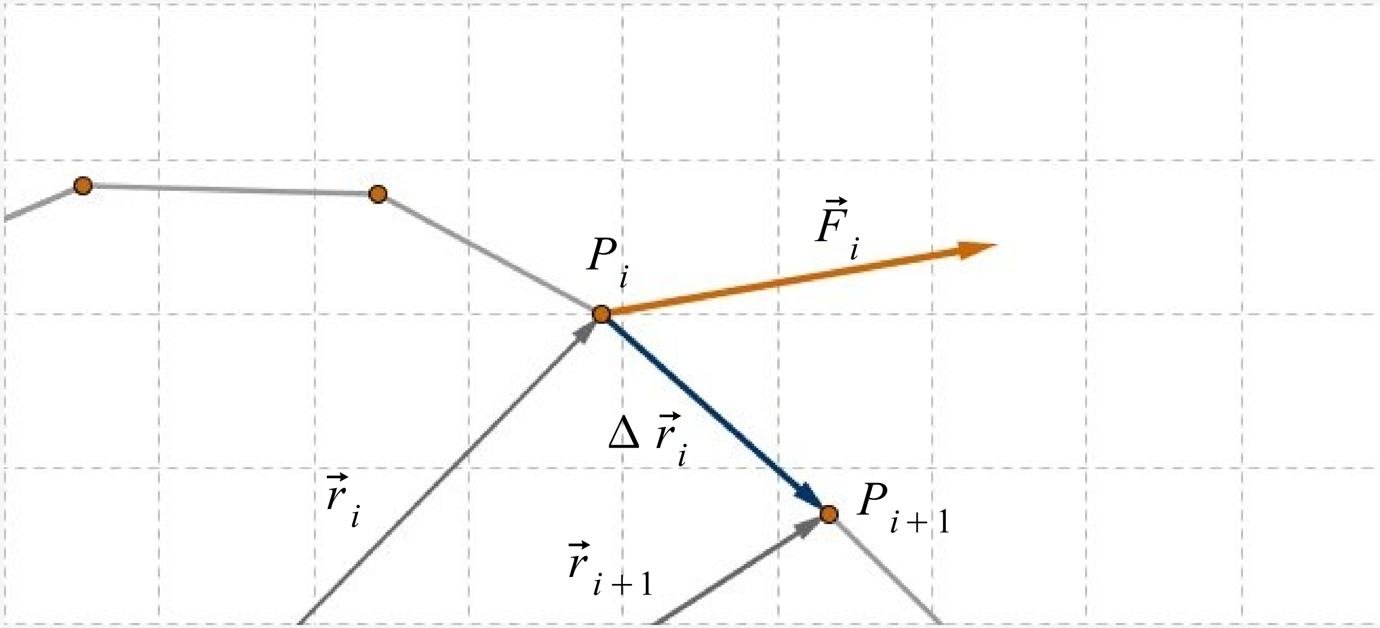


Abb. 1-6: Zum Begriff der Arbeit in einerm ebenen Kraftfeld

$\vec{r}_i$ ist der Ortsvektor von P_i und $\vec{F}_i$ ist die in diesem Punkt angreifende Kraft des Feldes.

$$\Delta\,\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$$

Bei der Verschiebung des Massenpunktes von P_i nach P_{i+1} leistet die Feldkraft die Arbeit

$$\Delta\,W_i = \vec{F}_i(r_i) \cdot \Delta\,\vec{r}_i$$

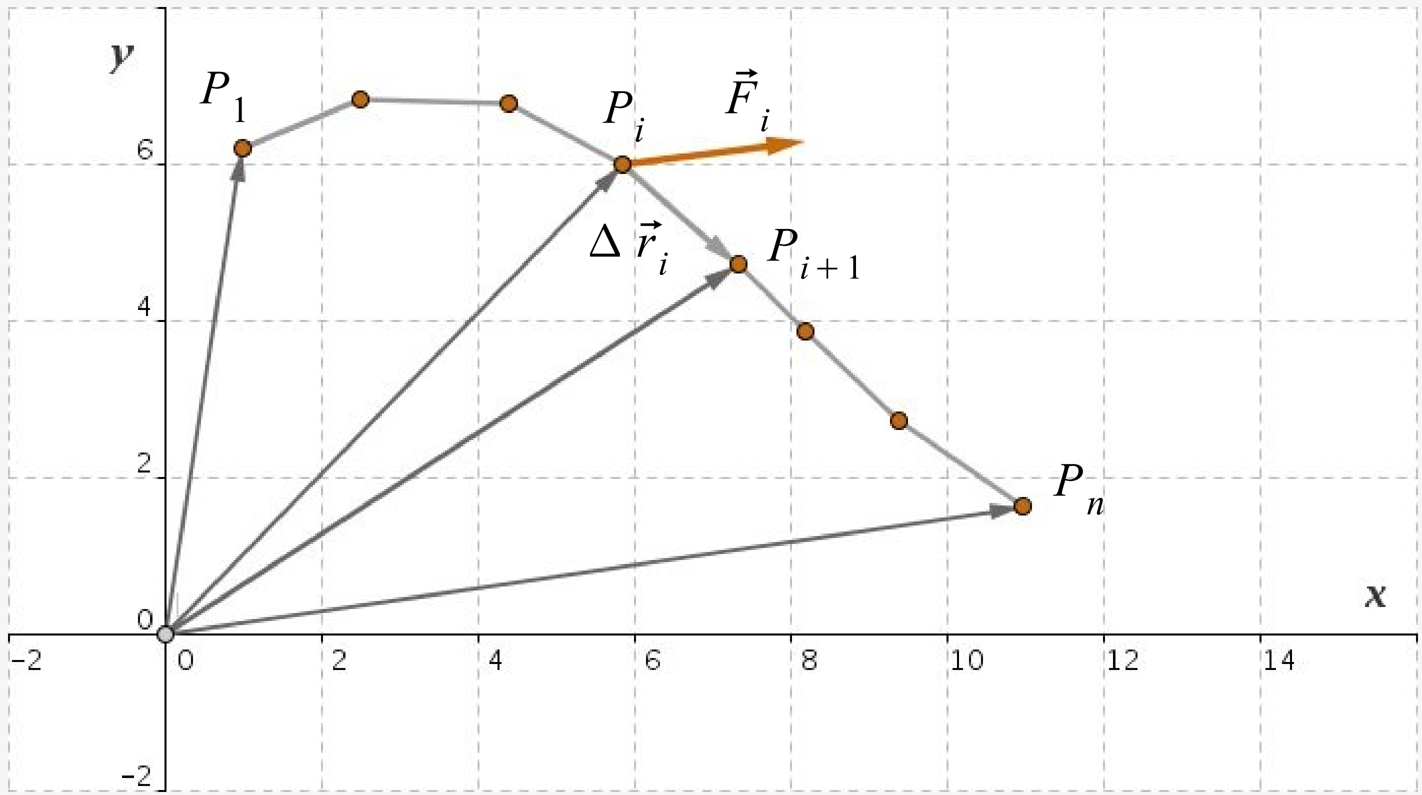


Abb. 1-7: Zum Begriff der Arbeit in einerm ebenen Kraftfeld

Die Gesamtarbeit W bei der Bewegung des Massenpunktes auf C von A nach B wird durch die Summe bestimmt

$$W \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Bei einer ständig feiner werdenden Zerlegung der Kurve C, d.h. für

$$n \to \infty, \qquad \Delta \vec{r}_i \to 0$$

folgt

$$W = \int_C d\,W = \int_C \vec{F}\,(\vec{r}) \cdot d\,\vec{r}$$

$$\vec{F}\,(\vec{r}) \cdot d\,\vec{r} = \begin{pmatrix} F_x(x\,,\,y) \\ F_y(x\,,\,y) \end{pmatrix} \cdot (dx\,,\ dy) = F_x(x\,,\,y)\ dx + F_y(x\,,\,y)\ dy$$

Die bei einer Verschiebung auf einer ebenen Kurve C insgesamt vom Kraftfeld aufzubringende Arbeit ist

$$W = \int_C \vec{F}\,(\vec{r}) \cdot d\,\vec{r} = \int_C (F_x(x\,,\,y)\ dx + F_y(x\,,\,y)\ dy)$$

Falls C eine Kurve im *3D*-Raum ist, wird die Arbeit in der Form geschrieben

$$W = \int_C \vec{F}\,(\vec{r}) \cdot d\,\vec{r} = \int_C (F_x(x\,,\,y\,,\,z)\ dx + F_y(x\,,\,y\,,\,z)\ dy + F_z(x\,,\,y\,,\,z)\ dz)$$

Ist der Anfangspunkt auch Enpunkt der Kurve, also $A = E$, d.h. C ist eine geschlossene Kurve, dann schreibt man:

$$W = \oint_C \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\,\vec{r}$$

Ein solches Kurvenintegral wird in den physikalisch-technischen Anwendungen als Zirkulation des Vektorfeldes längs der geschlossenen Kurve C bezeichnet.

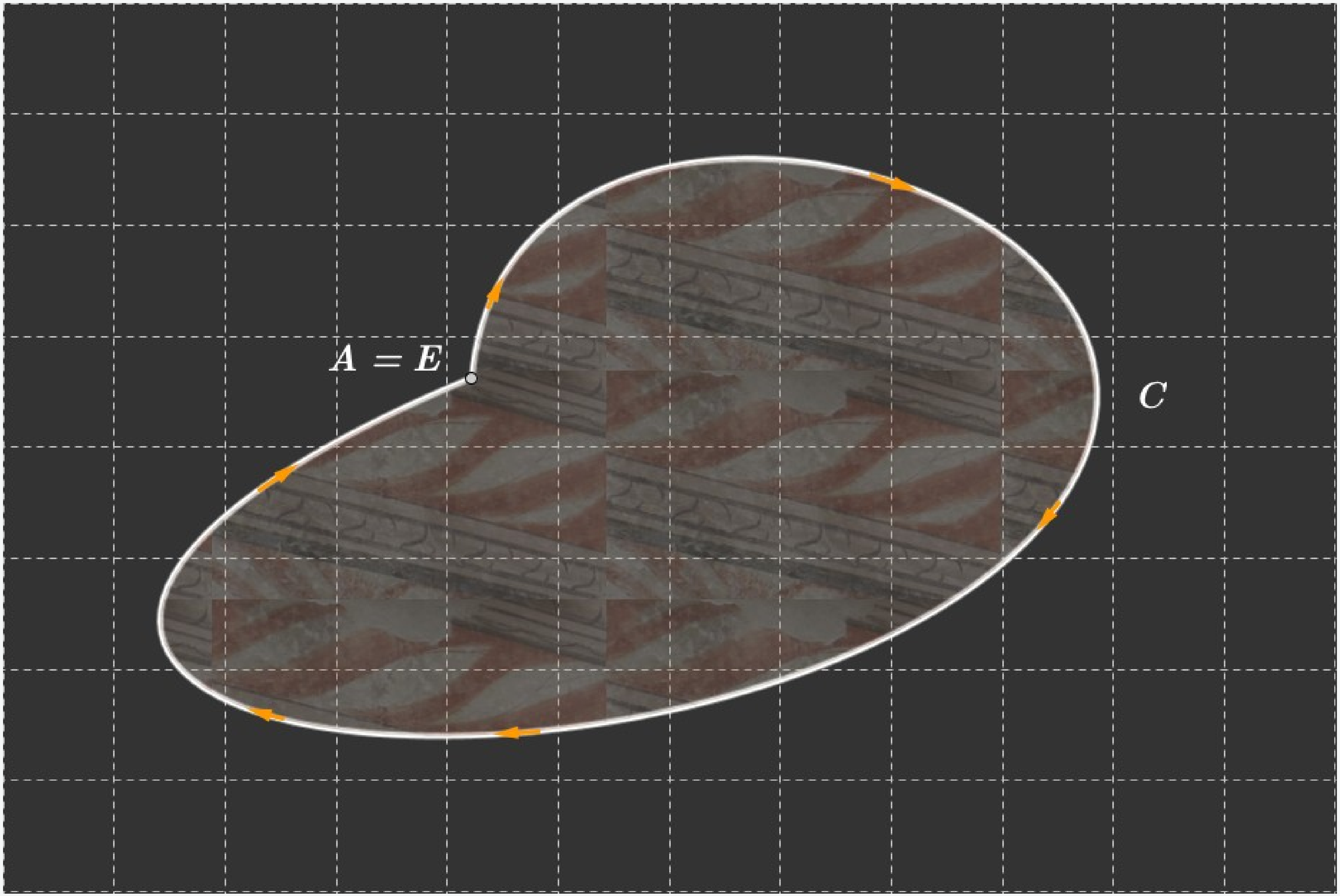


Abb. 1-8: Eine geschlossene Kurve von Anfangpunkt A nach Endpunkt E, A = E

Bei der Berechnung des Arbeitsintegrals längst der Kurve C in einem ebenen Kraftfeld ***F*** *(x, y)*

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\,\vec{r} = \int_C \left(F_x(x, y)\ dx + F_y(x, y)\ dy \right),$$

soll berücksichtigt werden, dass das Kraftfeld von den Koordinaten x und y des Kurvenpunktes P abhängt. Die Koordinaten x und y sind aber voneinander nicht unabhängig, sondern über die Kurvengleichung miteinander verknüpft. Für die Koordinaten x und y setzt man daher Die Parametergleichungen $x(t)$ bzw. $y(t)$ der Integrationskurve C ein. Die längs der Kurve wirkende Kraft hängt dann nur noch vom Kurvenparameter t ab. Das Wegelement *d**r*** ersetzt man durch den Tangentenvektor *d**r**/dt* und das Differential dt des Parameters t

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad d\,\vec{r}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}\,dt = \dot{\vec{r}}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt$$

Zur Erinnerung: $\dot{x}(t) = \dfrac{d\,x(t)}{dt}, \qquad \dot{y}(t) = \dfrac{d\,y(t)}{dt}$

Das Arbeitsintegral (Linienintegral) geht mit Hilfe dieser Substitution in ein gewöhnliches Integral über. Für eine ebene Kurve C

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}})\, dt = $$
$$= \int_{t_1}^{t_2} [F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t)]\, dt$$

für eine Kurve im *3D*-Raum

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}})\, dt = $$
$$= \int_{t_1}^{t_2} [F_x \cdot \dot{x}(t) + F_y \cdot \dot{y}(t) + F_z \cdot \dot{z}(t)]\, dt$$

Berechnen Sie die Arbeit, die das ebene Kraftfeld $\boldsymbol{F}(x, y) = (-y,\ x)$ bei einer Verschiebung vom Punkt O nach dem Punkt P (im Fall *a*, *b* und *c*) und vom Punkt A nach dem Punkt B (im Fall *d*) an einem Massenpunkt verrichtet

a) Verschiebung längs einer Parabel $C_1: \ y = x^2, \quad O = (0, 0), \quad P = (1, 1)$

b) eine geradlinige Verschiebung $C_2: \ y = x, \quad O = (0, 0), \quad P = (1, 1)$

c) Verschiebung längs einer Kurve $C_3: \ y = x^7, \quad O = (0, 0), \quad P = (1, 1)$

d) Verschiebung längs eines Einheitskreises ($R = 1$): $A\,(1, 0), \quad B\,(0, 1)$

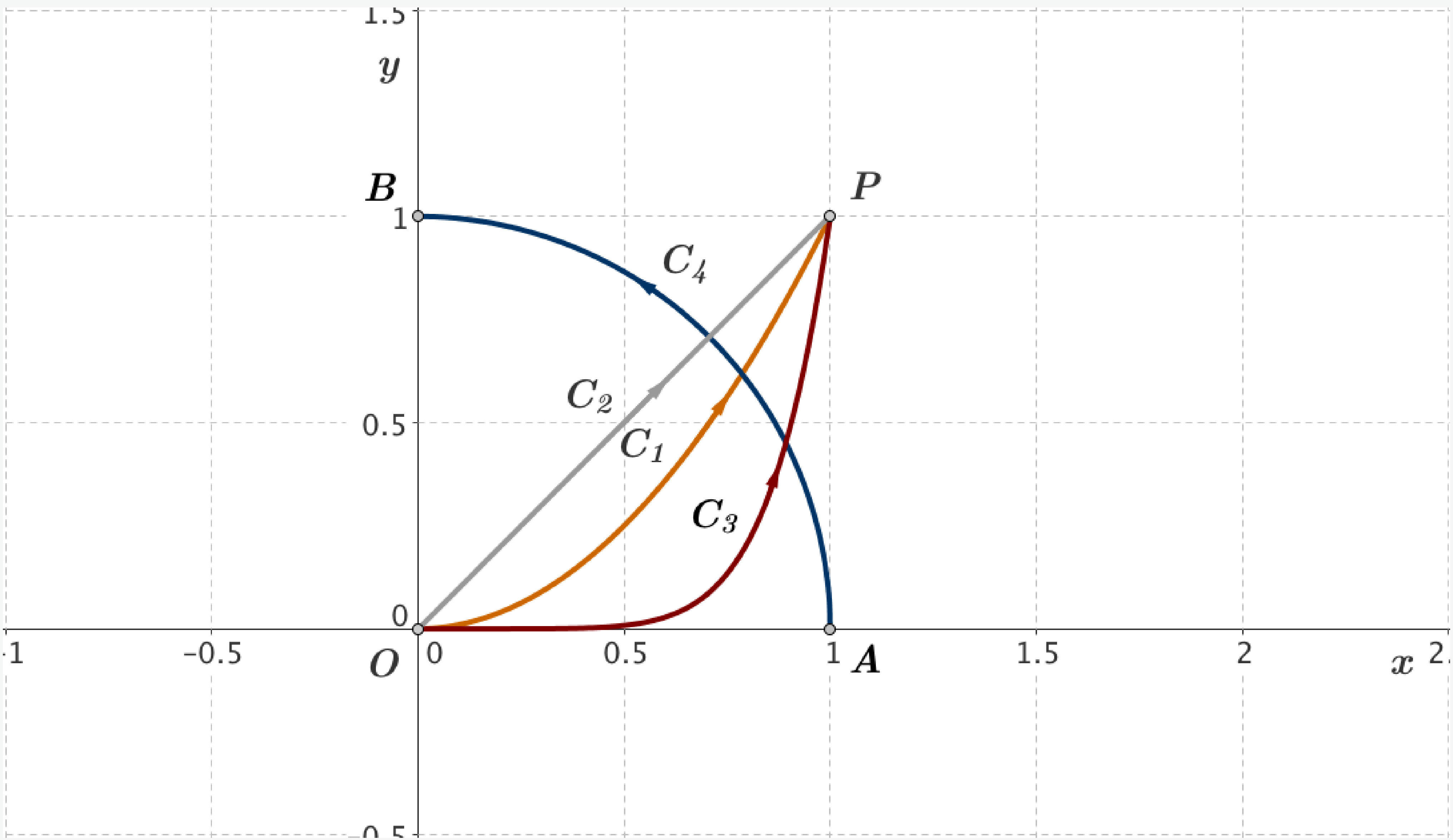


Abb. A1: Verschiebungskurven der Aufgabe

Im Folgenden wird das Vektorfeld $\boldsymbol{F} = (-y, x)$ graphisch dargestellt.

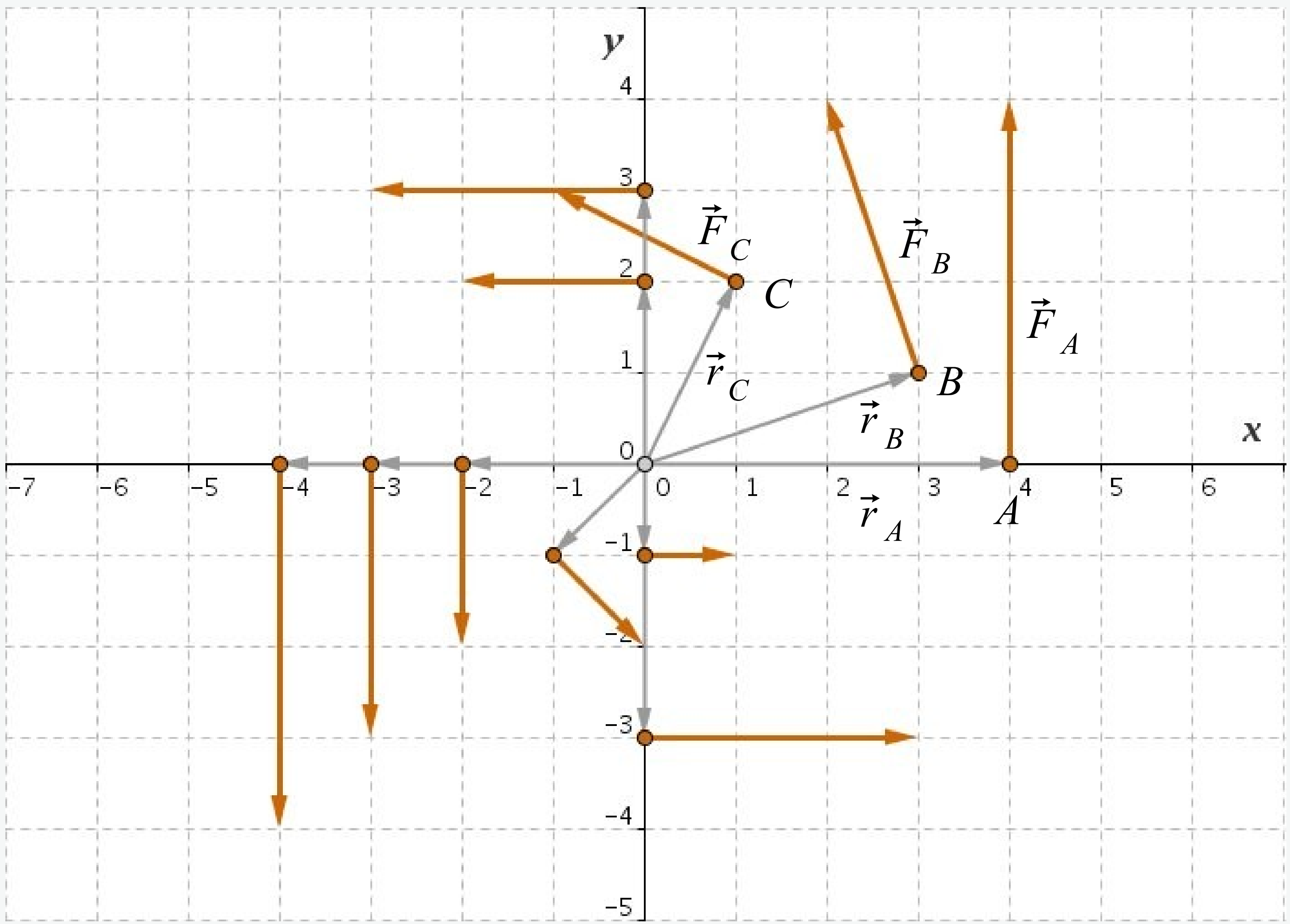


Abb. L1-1: Jedem Punkt der x,y-Ebene mit dem Ortsvektor **r** *= (x, y) wird der Feldvektor* **F** *= (-y, x) zugeordnet. Die Orts- und Feldvektoren sind orthogonal zueinander*

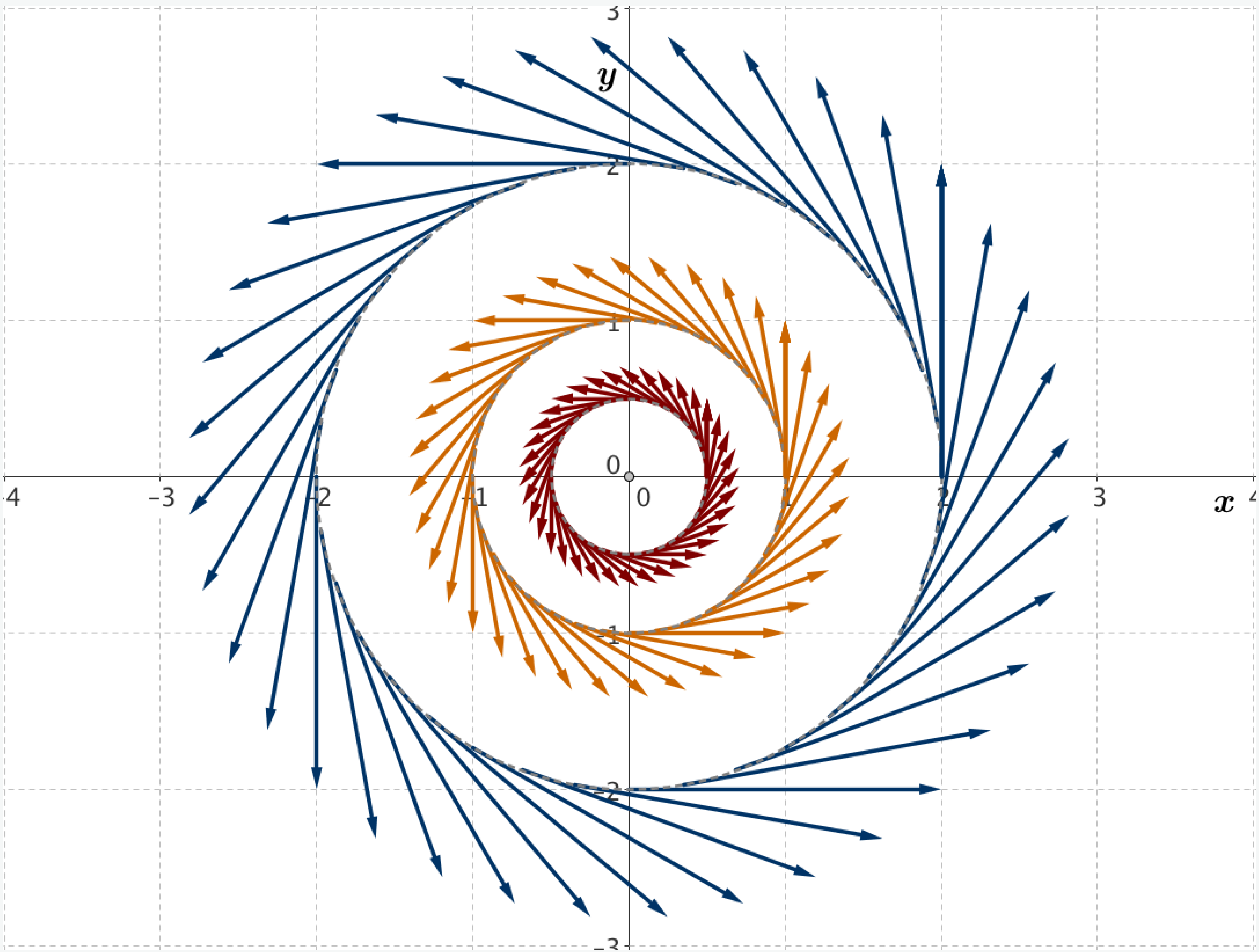


*Abb. L1-2: Vektorfeld **F** = (-y, x) in einigen Punkten von drei Kreisen mit den Radien 0.5, 1 und 2*

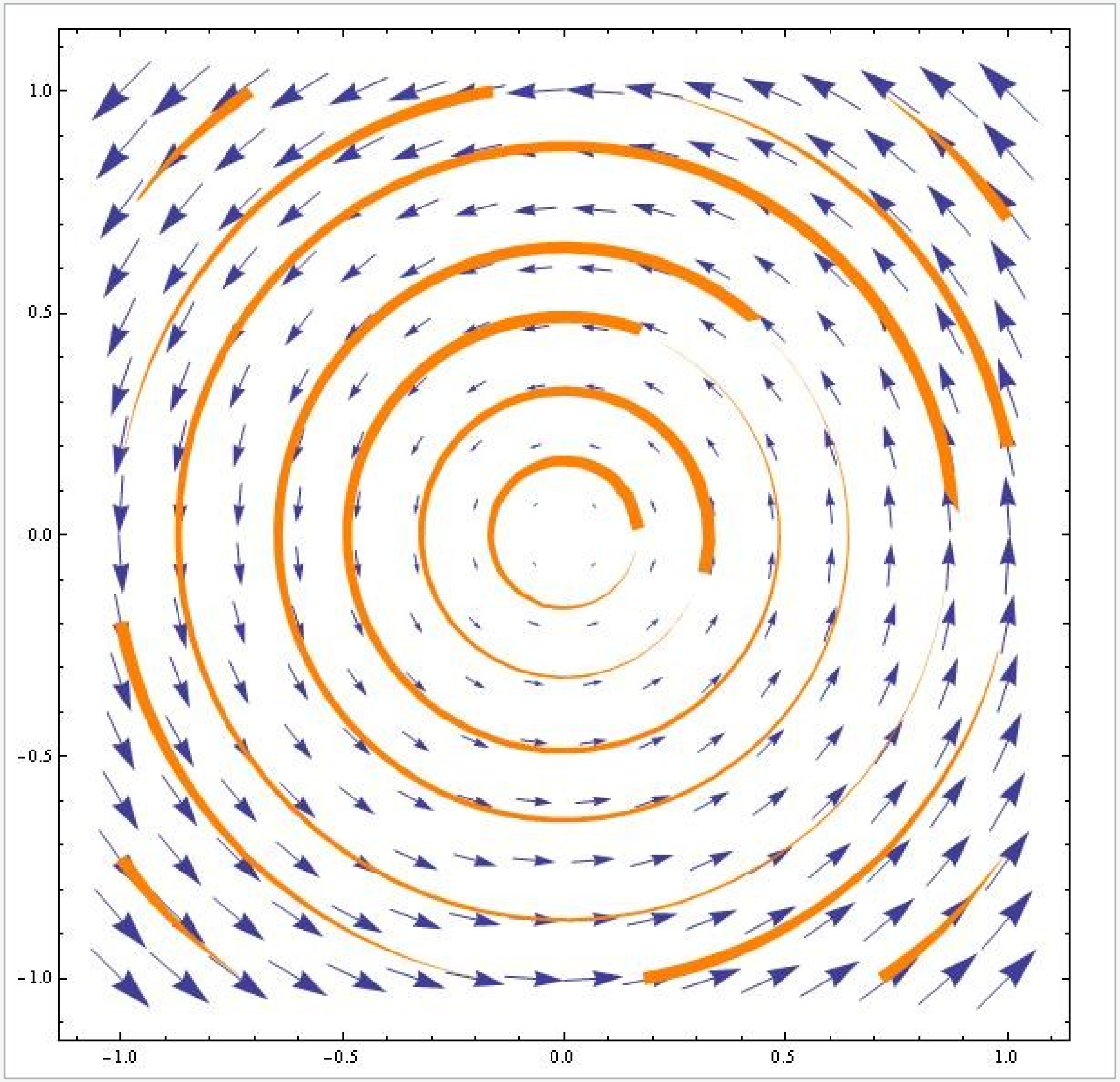


Abb. L1-3: Vektorfeld $\boldsymbol{F}\,(x, y) = (-y, x)$ *und Feldlinien*

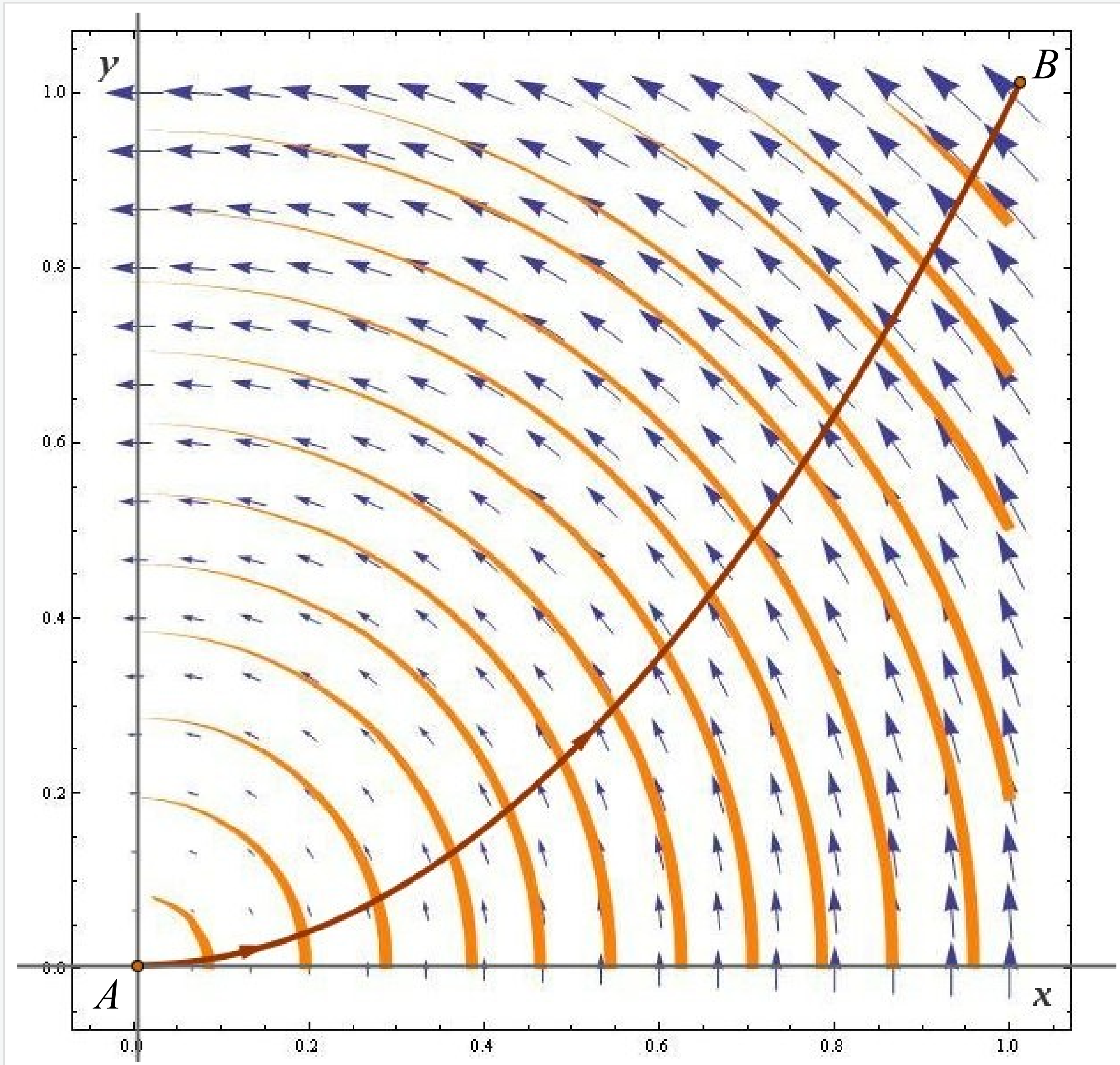


Abb. L1-4: Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ *und Feldlinien. Die Kurve C ist ein parabelförmiges Segment vom Punkt A (0, 0) zum Punkt B (1, 1)*

Der Integrationsweg ist ein parabelförmiger Verbindungsweg vom Punkt *A (0, 0)* zum Punkt *B (1, 1)*:

$$C_1: \quad x(t) = t, \quad y(t) = t^2$$

$$C_1: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (-t^2, \ t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = t^2$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

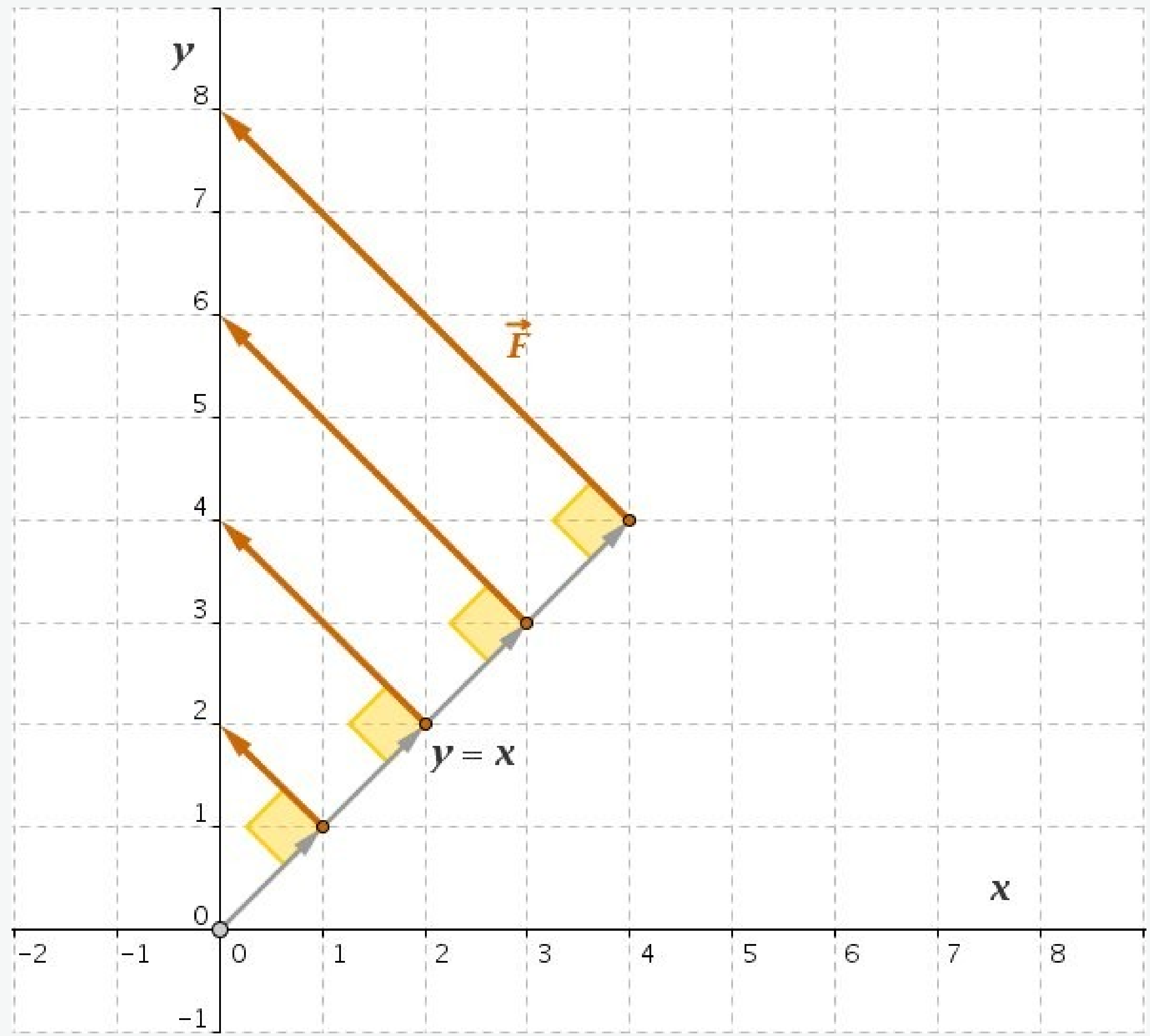


*Abb. L1-5: Vektorfeld **F** = (-y, x), gezeichnet in den Punkten (1, 1), (2, 2), (3, 3) und (4, 4) der Geraden y = x. Die Vektoren sind orthogonal zu der Geraden y = x*

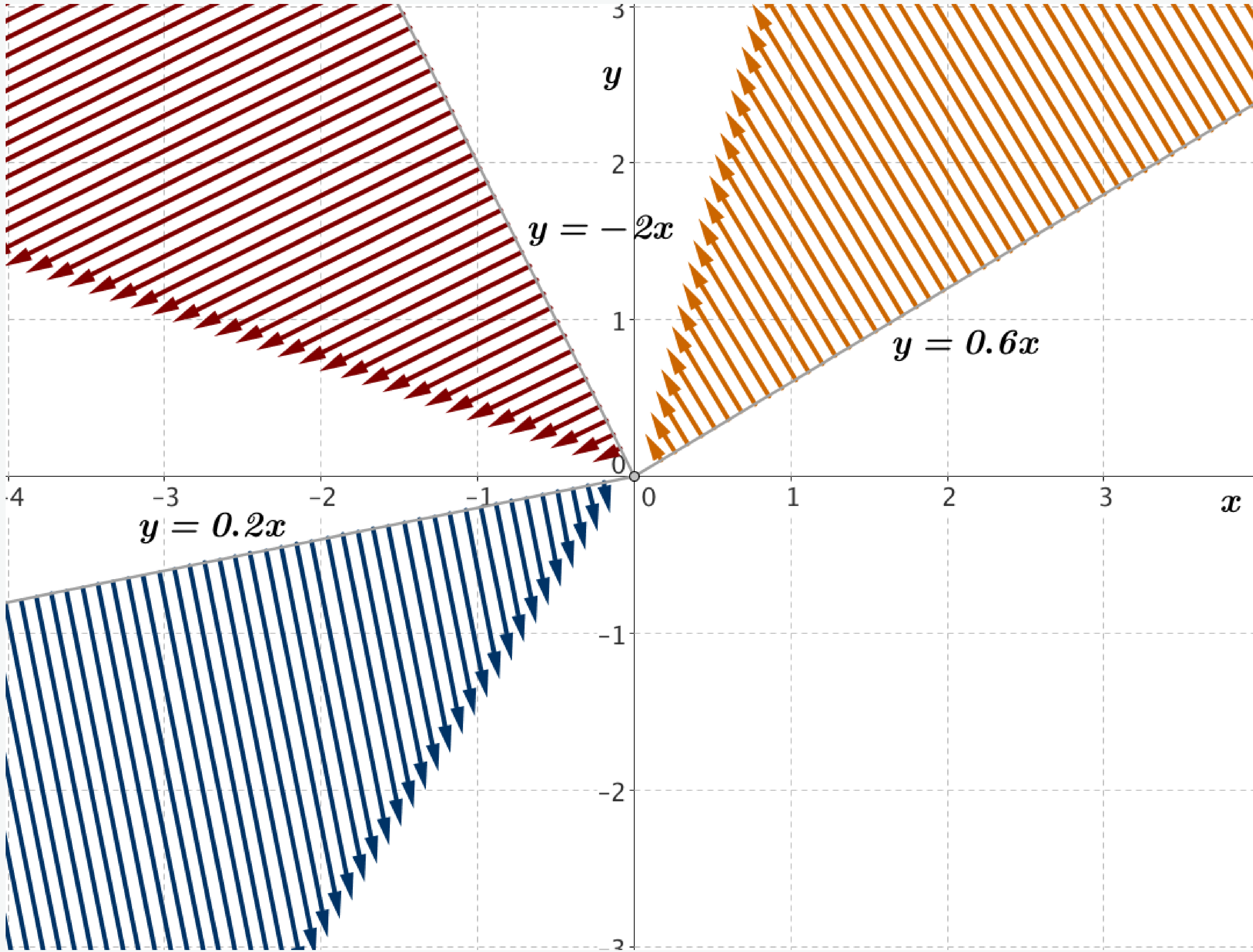


Abb. L1-6: Das Vektorfeld $\boldsymbol{F} = (-y, x)$ *ist senkrecht zu jeder Ursprungsgeraden* $y = a\,x$

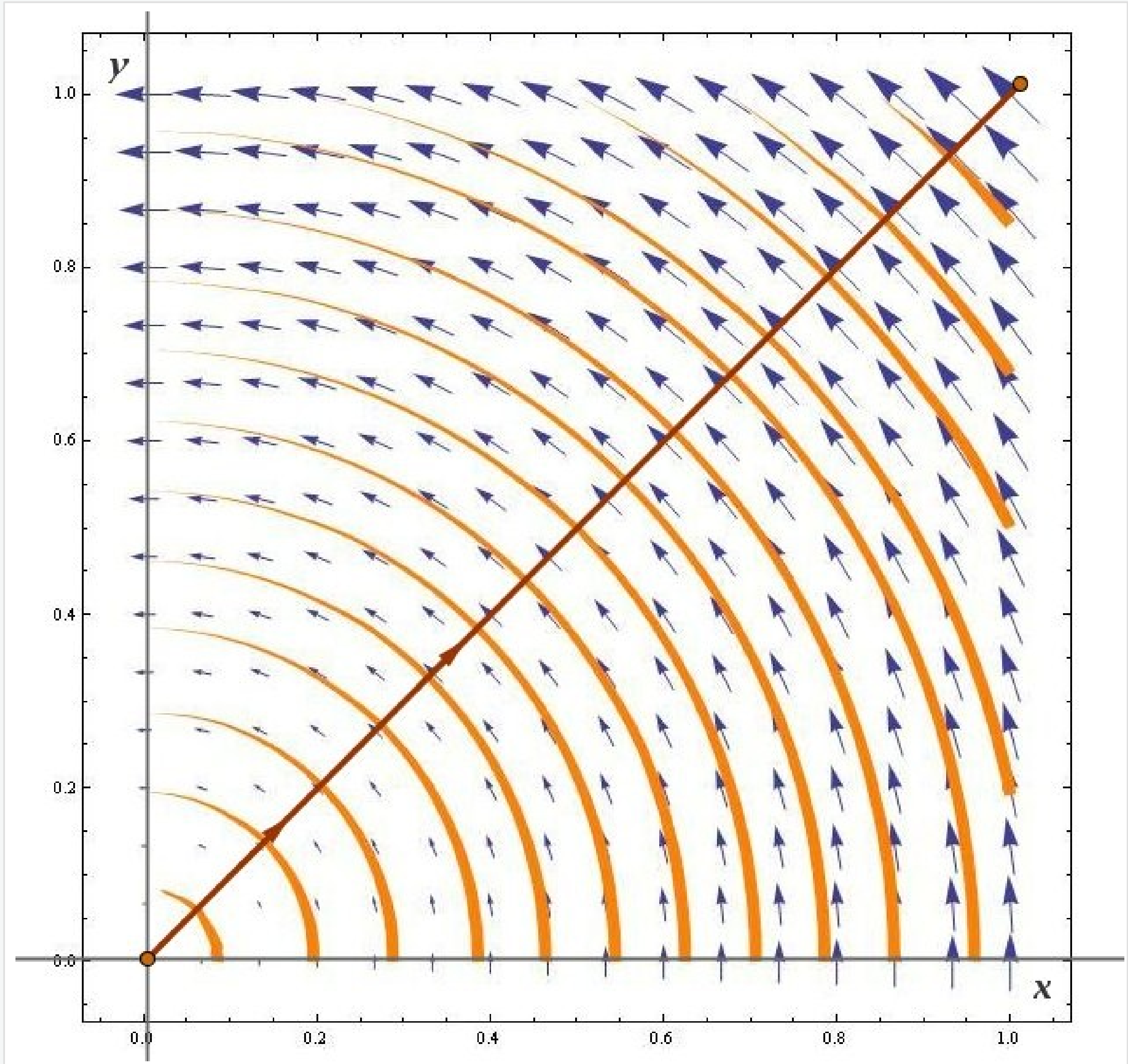


Abb. L1-7: Vektorfeld und Feldlinien der Funktion $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$*. Kurve C: ein geradliniges Segment vom Punkt A (0, 0) zum Punkt B (1, 1)*

Man kann schon im Voraus sagen, welchen Wert das Integral haben wird. Da die Kurve und das Vektorfeld orthogonal zueinander sind, ist auch das Skalarprodukt $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ überall gleich Null. Das zeigen wir jetzt analytisch

$$C_b : \quad x(t) = t\,, \qquad y(t) = t$$

$$C_b : \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (-t\,,\ t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -t + t = 0$$

Die vom Kraftfeld $\boldsymbol{F}(x, y)$ geleistete Arbeit ist gleich Null.

$$W_b = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = 0$$

Der Integrationsweg ist ein parabelförmiger Verbindungsweg vom Punkt *A (0, 0)* zum Punkt *B (1, 1)*:

$$C_c: \quad x(t) = t, \qquad y(t) = t^7$$

$$C_c: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^7 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7\,t^6 \end{pmatrix}, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^7 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt} = (-t^7,\ t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7\,t^6 \end{pmatrix} = -t^7 + 7\,t^7 = 6\,t^7$$

Die vom Kraftfeld ***F*** *(x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_c = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt}\, dt = 6 \int_0^1 t^7\, dt = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$C_d : \quad x(t) = \cos t\,, \qquad y(t) = \sin t$$

$$C_d : \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt} = (-\sin t\,,\ \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Die vom Kraftfeld ***F** (x, y)* geleistete Arbeit beträgt

$$W_d = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Das Arbeitsintegral: Lösungen 1 a-d

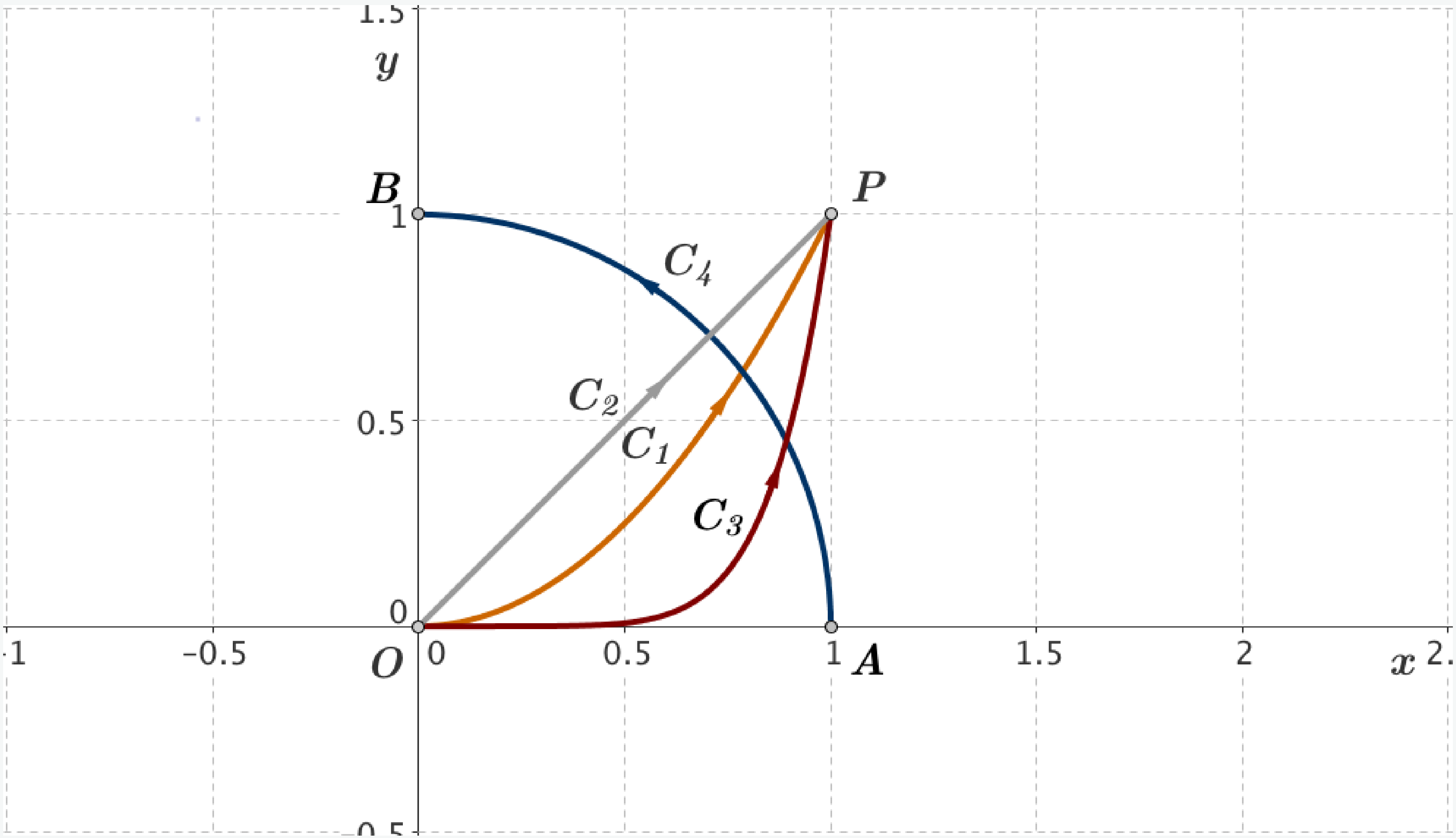
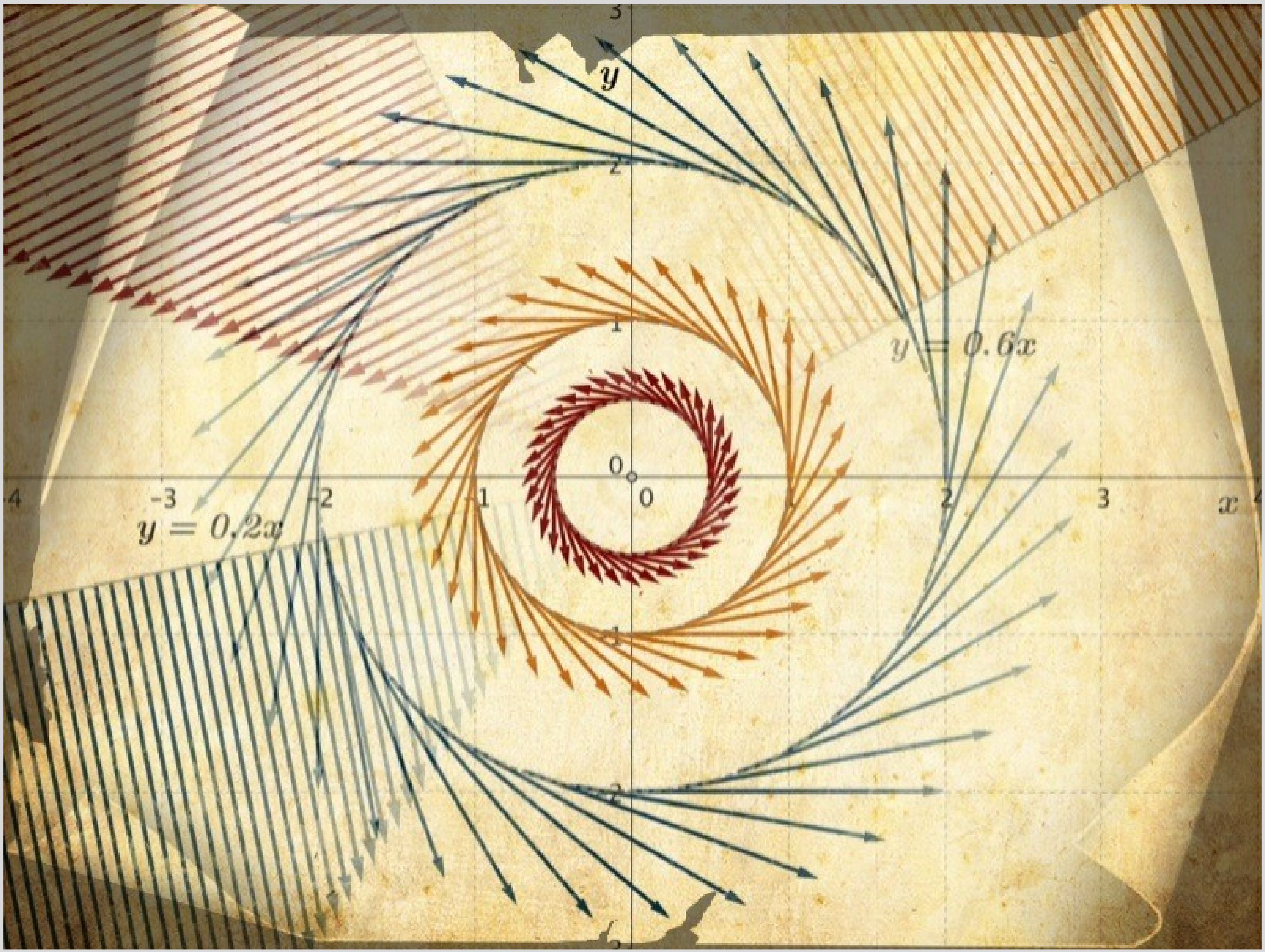


Abb. L1-8: Verschiebungskurven der Aufgabe 1

$$W_1 = \frac{1}{3}, \qquad W_2 = 0, \qquad W_3 = \frac{3}{4}, \qquad W_4 = \frac{\pi}{2}$$


y
y = 0.6x
y = 0.2x
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3