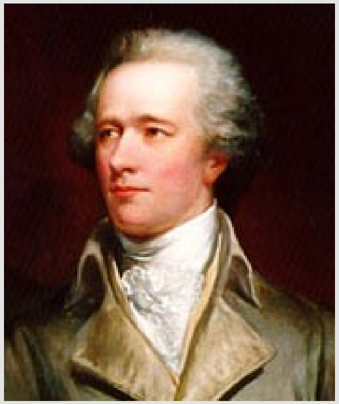
Gradient eines Skalarfeldes

Gradient eines Skalarfeldes

Definition 1:

Unter dem Gradient eines differenzierbaren Skalarfeldes $\Phi\,(x, y)$ versteht man den aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung von Φ gebildeten Vektor

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\vec{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$



Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) irischer Mathematiker, Physiker und Astronom

Hamilton führte den symbolischen Vektor, “Quasi-Vektor”, mit den Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

ein. Er wird Nabla genannt und mit $\vec{\nabla}$ bezeichnet.

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y} \right)$

Er ist kein Vektor im üblichen Sinn, seine “Komponenten” sind Ableitungen.

Der Gradient eines Skalarfeldes Φ ist das formale Produkt aus dem “Nabla-Operator” und dem Skalarfels Φ

$$grad\ \phi = \vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi$$

Das Symbol Nabla ist kein Buchstabe, sondern entstand aus ähnlichen Symbolen der Quaternionenanalysis von *William Rowan Hamilton*. *Peter Guthrie Tait* führte die heutige Form eines auf den Kopf gestellten Deltas Δ ein. Der Name “Nabla” stammt vom Physiker und Theologen *William Robertson Smith (1846–1894)*, den die Form an eine antike Harfe erinnerte.

(Wikipedia)

Das totale Differential einer Funktion beschreibt näherungsweise, wie sich der Funktionswert bei geringfügigen Veränderungen der unabhängigen Variablen ändert

$$\phi = \phi\,(x\,,\; y)$$

$$d\,\phi = \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}\,dx + \frac{\partial\,\phi}{\partial\,y}\,dy\,, \qquad d\,\vec{r} = (dx\,,\; dy)$$

$$d\,\phi = \left(\frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}, \quad \frac{\partial\,\phi}{\partial\,y}\right)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\,\phi\;d\,\vec{r}$$

$$grad\,\phi \equiv \vec{\nabla}\,\phi$$

Auf einer Niveaulinie ist wegen $\Phi = \text{const}$ stets $d\Phi = 0$ und somit

$$\vec{\nabla}\,\phi\;d\,\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\,\phi \perp d\,\vec{r}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes verläuft stets senkrecht zu den Niveaulinien!

Der Gradient ist ein mathematischer Operator, ein Differentialoperator, der auf ein Skalarfeld angewandt werden kann und in solchem Fall ein Gradientenfeld genanntes Vektorfeld liefert, das die Änderungsrate und Richtung der größten Änderung des Skalarfeldes angibt.

Der Gradient wird zusammen mit anderen Differentialoperatoren wie Divergenz und Rotation in der Vektoranalysis, einem Teilgebiet der mehrdimensionalen Analysis untersucht. Sie werden mit dem gleichen Vektoroperator Nabla gebildet.

Geometrisch betrachtet ist der Gradient eines Skalarfelds an einem Punkt ein Vektor, der in Richtung des steilsten Anstieges des Skalarfeldes weist. Dabei entspricht der Betrag des Vektors der Stärke des Anstieges. Befindet man sich an einem lokalen Minimum oder Maximum (Extremum) oder einem Sattelpunkt, so ist der Gradient an dieser Stelle der Nullvektor.

Mit Hilfe des Gradienten lässt sich auch der Anstieg in jeder beliebigen Richtung, Richtungsableitung genannt, ermitteln.

Gradient eines Skalarfeldes $\Phi\ (x, y, z)$

$$\phi = \phi\,(x\,,\, y\,,\, z)$$

$$grad\ \phi = \vec{\nabla}\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Auch für ein Skalarfeld $\Phi\ (x, y, z)$ bestimmen wir den Gradient als das formale Produkt von “Nabla-Operator” und Skalarfeld Φ. Er steht senkrecht auf den Niveauflächen von Φ und zeigt in die Richtung des größten Zuwachses von Φ.

Rechenregeln für Gradienten

$$grad\, c = 0$$

$$grad\, (c\, \phi) = c\;\, grad\, \phi$$

$$grad\, (\phi + c) = grad\, \phi$$

$$grad\, (\phi + \psi) = grad\, \phi + grad\, \psi$$

$$grad\, (\phi \cdot \psi) = \phi\;\, grad\, \psi + \psi\; grad\, \phi$$

$$\vec{\nabla}\, c = 0$$

$$\vec{\nabla}\, (c\, \phi) = c\; \vec{\nabla}\, \phi$$

$$\vec{\nabla}\, (\phi + c) = \vec{\nabla}\, \phi$$

$$\vec{\nabla}\, (\phi + \psi) = \vec{\nabla}\, \phi + \vec{\nabla}\, \psi$$

$$\vec{\nabla}\, (\phi \cdot \psi) = \phi\, \vec{\nabla}\, \psi + \psi\, \vec{\nabla}\, \phi$$

Bestimmen Sie die Niveaulinien und den Gradienten des ebenen Skalarfeldes $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$. Zeichnen Sie den Gradient in den Punkten

$A\ (1, 1), \quad B\ (-1, 1), \quad C\ (-0.5, 0)$

$D\ (0.5, 0), \quad E\ (1, -0.5), \quad F\ (0, 1)$

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2$$

Niveaulinie : $\Phi = const \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C$

$$C = 1 \quad : x^2 + y^2 = 1 \quad (R = 1)$$

$$C = 2 \quad : x^2 + y^2 = 2 \quad (R = \sqrt{2})$$

$$C = 3 \quad : x^2 + y^2 = 3 \quad (R = \sqrt{3})$$

$$C = 4 \quad : x^2 + y^2 = 4 \quad (R = 2)$$

$$C = 5 \quad : x^2 + y^2 = 5 \quad (R = \sqrt{5})$$

$$C = 6 \quad : x^2 + y^2 = 6 \quad (R = \sqrt{6})$$

$$C = 7 \quad : x^2 + y^2 = 7 \quad (R = \sqrt{7})$$

Die Niveaulinien sind konzentrische Kreise mit den Radien $R = \sqrt{C}$

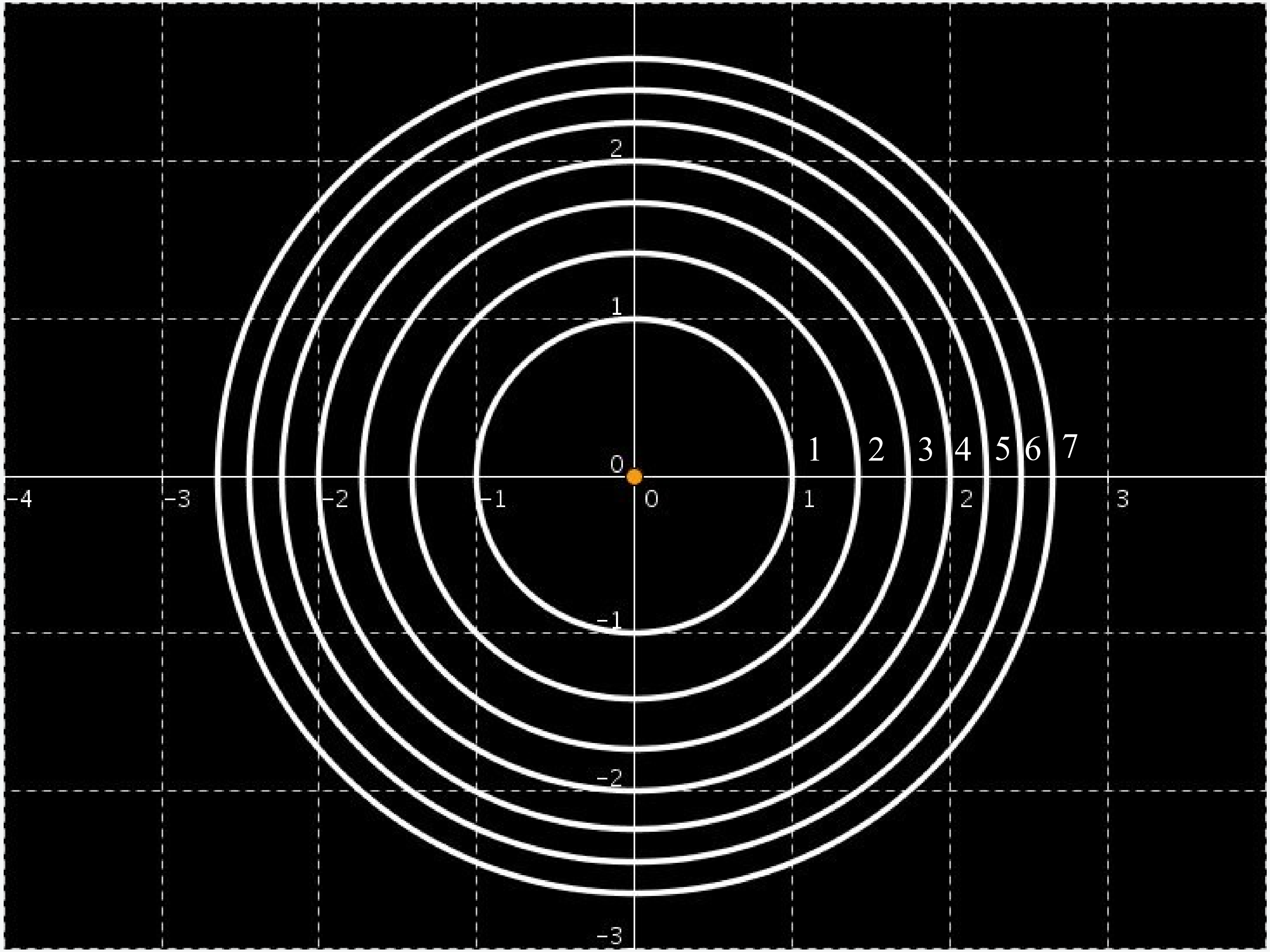


Abb. L1-1: Niveaulinien der Funktion $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$. Die Werte des Parametrs $C = 1, 2, \ldots, 7$ entsprechen der Gleichung $C = x^2 + y^2$

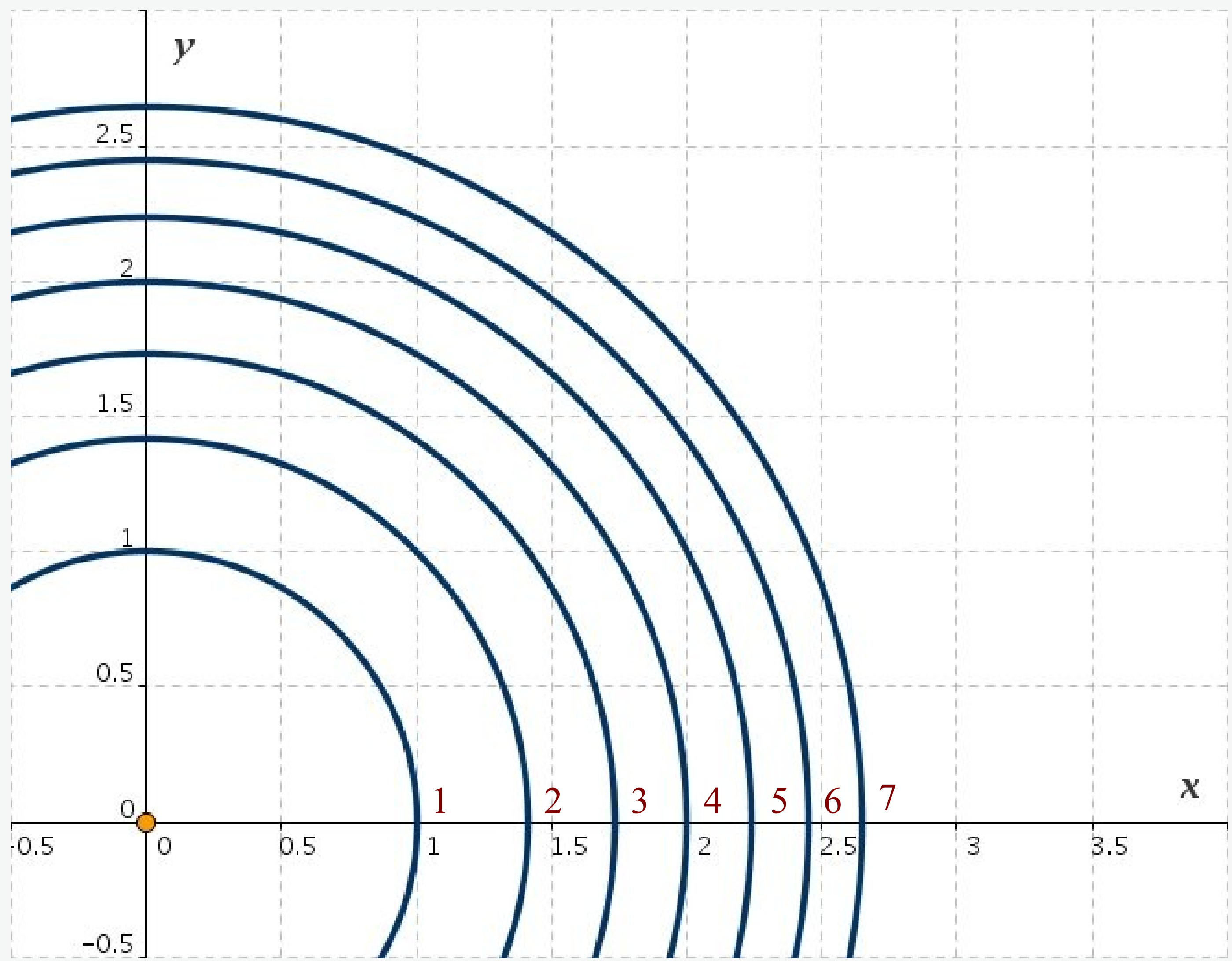


Abb. L1-2: Niveaulinien der Funktion $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ im ersten Quadranten. Die Werte des Parametrs $C = 1, 2, \ldots, 7$ entsprechen der Gleichung $C = x^2 + y^2$

$$grad\,\Phi = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} = (2x,\ 2y) = 2(x,\ y) = 2\,\vec{r}$$

$$grad\,\Phi_{(1,\,1)} = (2,\ 2), \qquad grad\,\Phi_{(-1,\,-1)} = (-2,\ -2)$$

$$grad\,\Phi_{(-0.5,\,0)} = (-1,\ 0), \qquad grad\,\Phi_{(0.5,\,0)} = (1,\ 0)$$

$$grad\,\Phi_{(1,\,-0.5)} = (2,\ -1), \qquad grad\,\Phi_{(0,\,1)} = (0,\ 2)$$

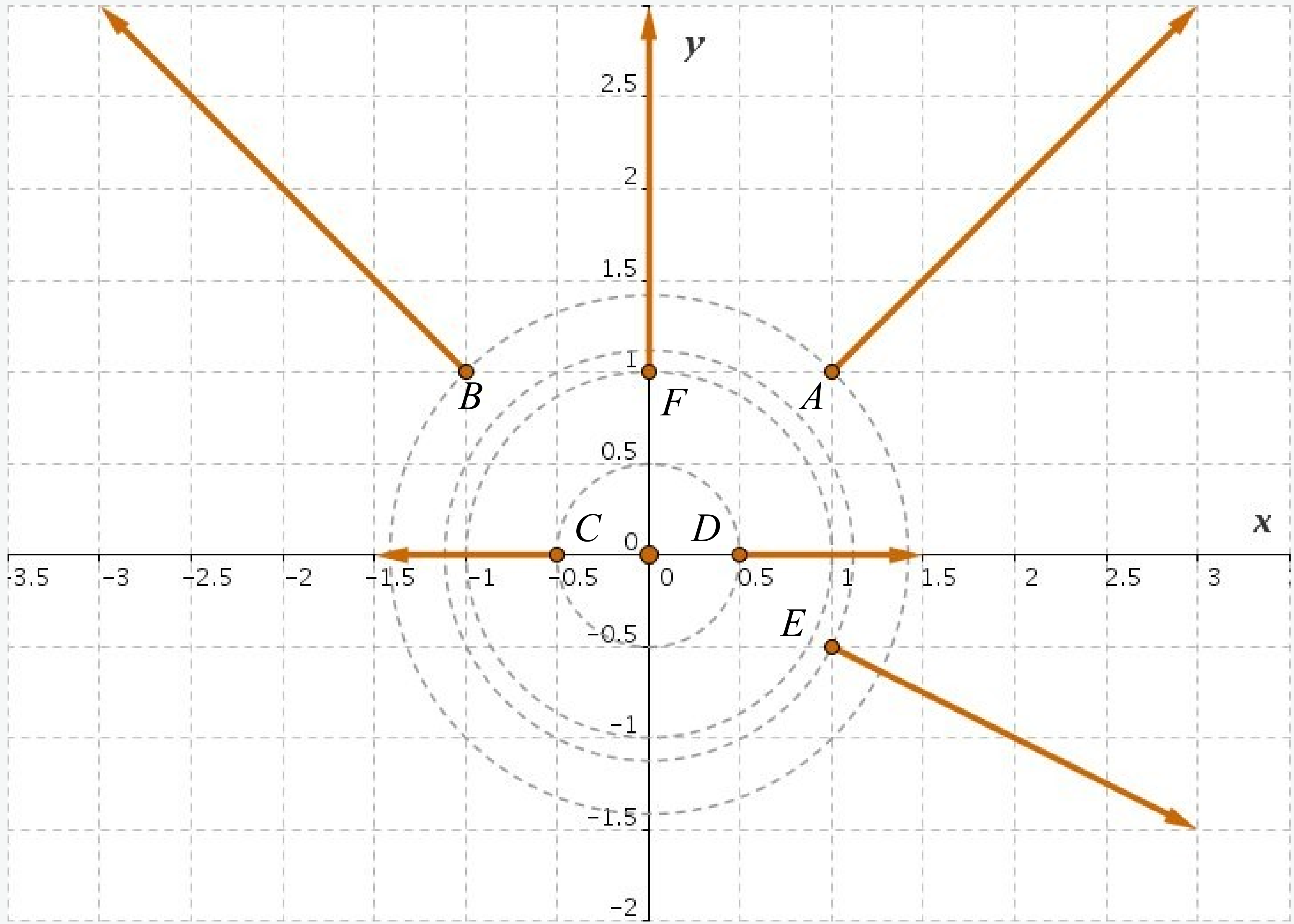


Abb. L1-3: Gradientvektoren der Funktion $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ in den Punkten A (1, 1), B (-1, 1), C (-0.5, 0), D (0.5, 0), E (1, -0.5), F (0, 1)

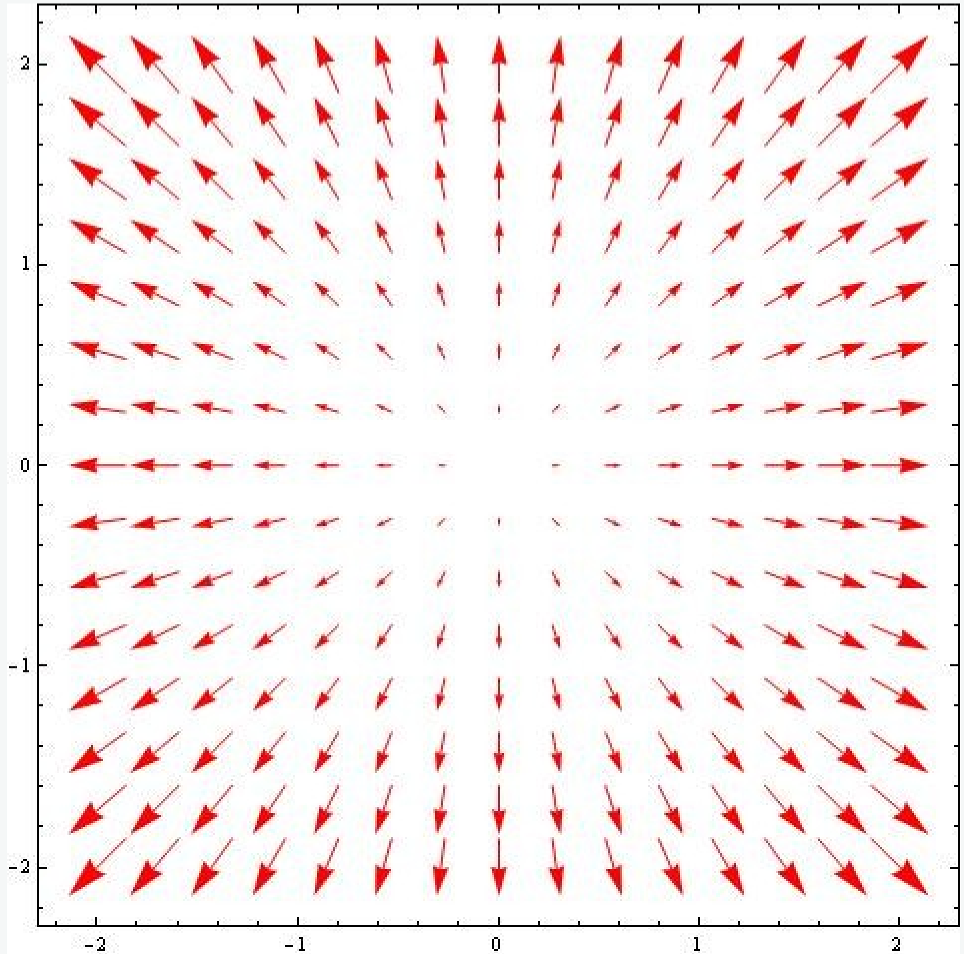


Abb. L1-4: Gradientenfeld der Funktion $z = \Phi(x, y)$ $(-2 \le x, y \le 2)$

- Der Gradient ist radial nach außen gerichtet und steht senkrecht auf den Niveaulinien.
- Der Gradient zeigt in die Richtung des größten Zuwachses der Funktion.

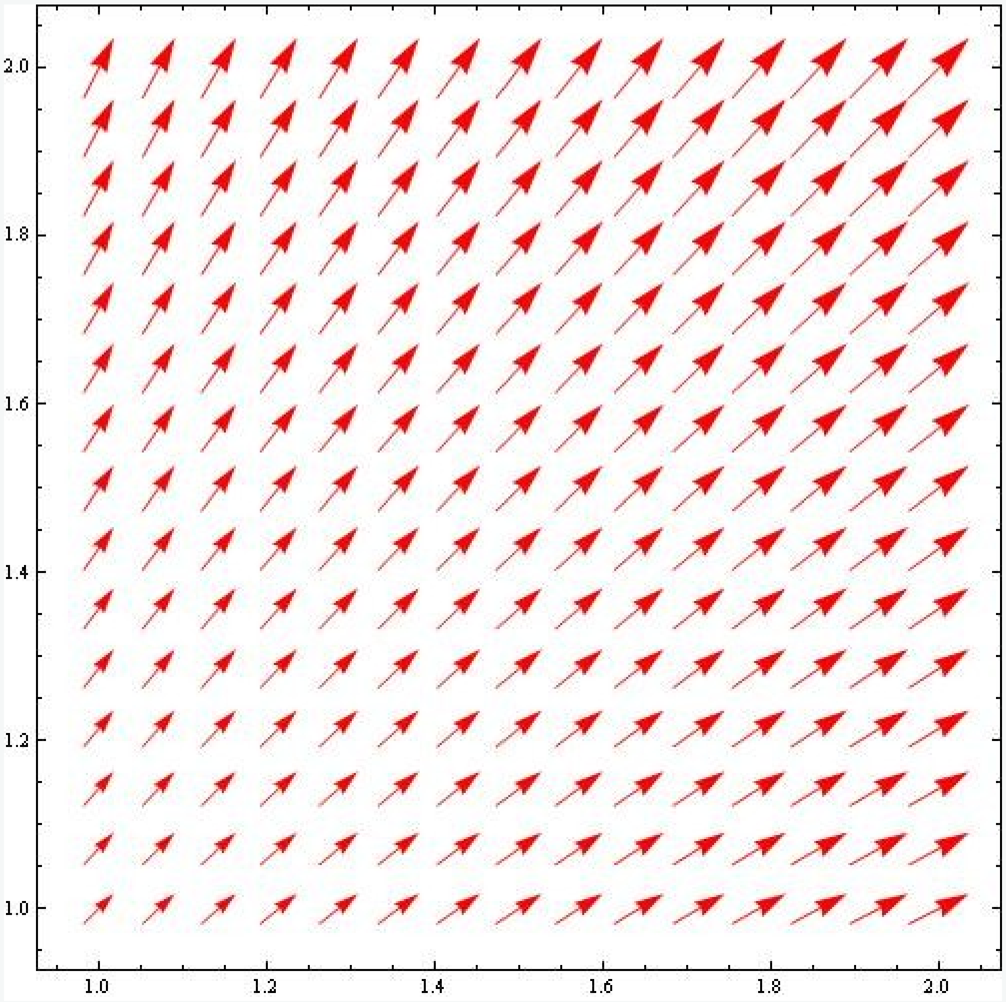


Abb. L1-5: Gradientenfeld der Funktion $z = \Phi(x, y)$ $(1 \leq x, y \leq 2)$

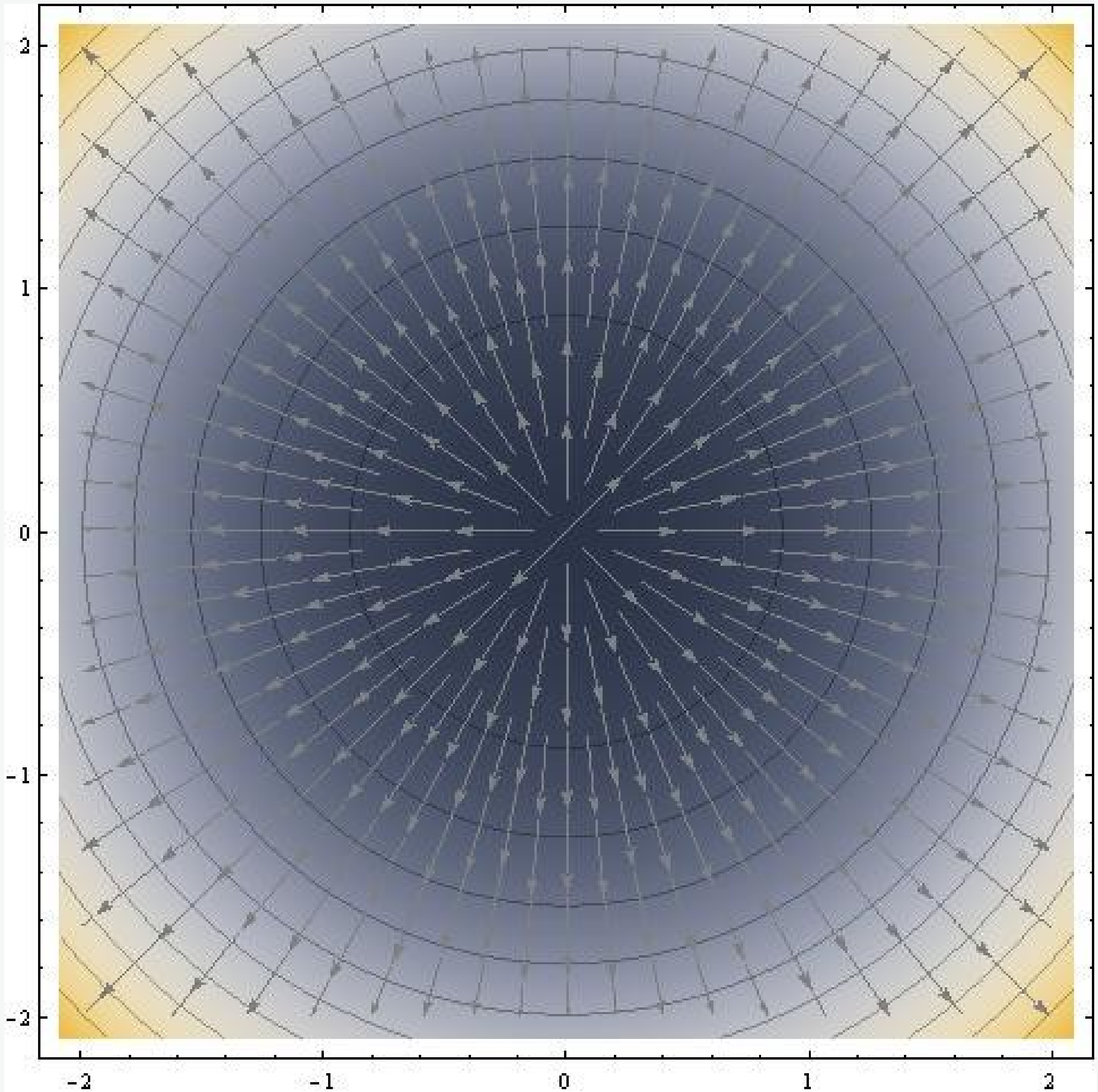


Abb. L1-6: Höhenliniendiagramm und Gradientenfeld der Funktion $z = \Phi (x, y)$