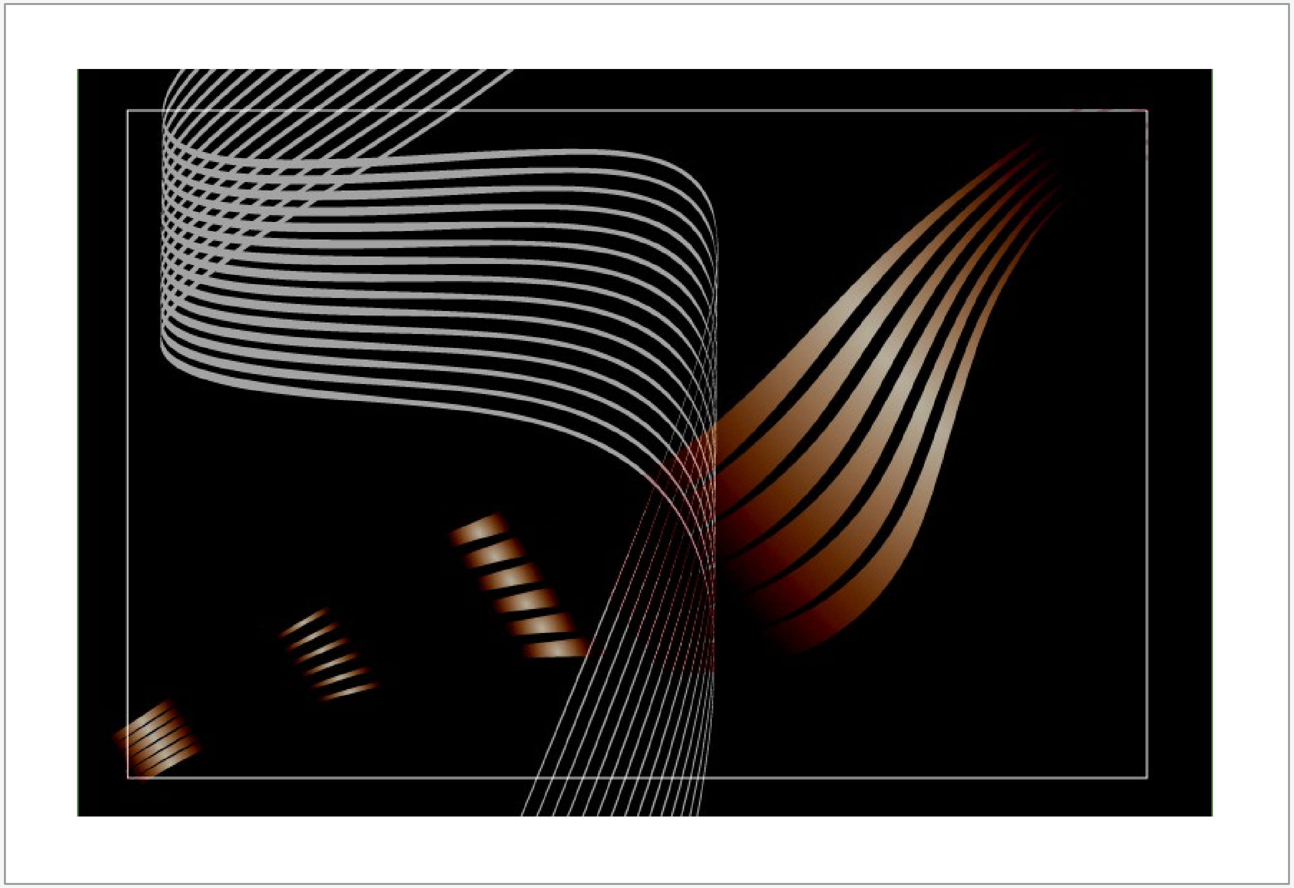

http://www.flickr.com/photos/vectors/2715732601/sizes/o/

Gradient eines Skalarfeldes

Einleitende Fragen

In diesem Teil sind folgende wichtige Fragen zu beantworten:

- Wie bestimmt man die Änderung einer Funktion in einer vorgegebenen Richtung?

- Wie bestimmt man die Richtung des größten Zuwachses eines skalaren Feldes?

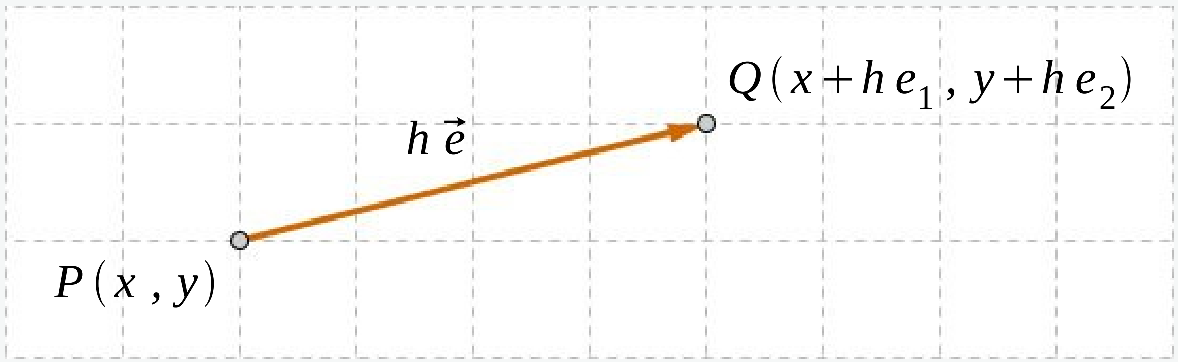

Abb. 1

Wir untersuchen die Änderung des Funktionswertes einer skalaren Funktion $\Phi\,(x, y)$ im Punkt P in Richtung eines Einheitsvektors $\boldsymbol{e}$

$$\vec{e}_v = e_1\,\vec{i} + e_2\,\vec{j}\,, \qquad |\,\vec{e}\,| = 1$$

$\vec{i}\,,\ \vec{j}$ – Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen

$$P\,(x\,,\ y)\,, \qquad Q\,(x + h\,e_1\,,\ y + h\,e_2)\,, \qquad |\,P\,Q\,| = |\,h\,\vec{e}\,| = h$$

Die Richtungsableitung eines ebenen Skalarfeldes Φ in Richtung eines vorgegebenen Einheitsvektors wird auf folgende Weise bestimmt

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x + h e_1, \ y + h e_2) - \phi(x, \ y)}{h}$$

$$\vec{e} = e_1 \vec{i} + e_2 \vec{j}, \qquad |\vec{e}| = 1$$

1). $\vec{e} = \vec{i} \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = 1, \quad e_2 = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x + h, \ y) - \phi(x, \ y)}{h} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

2). $\vec{e} = \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = 0, \quad e_2 = 1$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x, \ y + h) - \phi(x, \ y)}{h} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Richtungsableitung eines Skalarfeldes: Aufgabe 1

Bestimmen Sie für jede Funktion f, g und h, ob die Richtungsableitungen in einem gegebenen Punkt in Richtung $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ positiv, negativ oder gleich Null sind.

In den Abbildungen werden Höhenliniendiagramme mit den auf den Höhenlinien eingezeichneten Funktionswerten dargestellt.

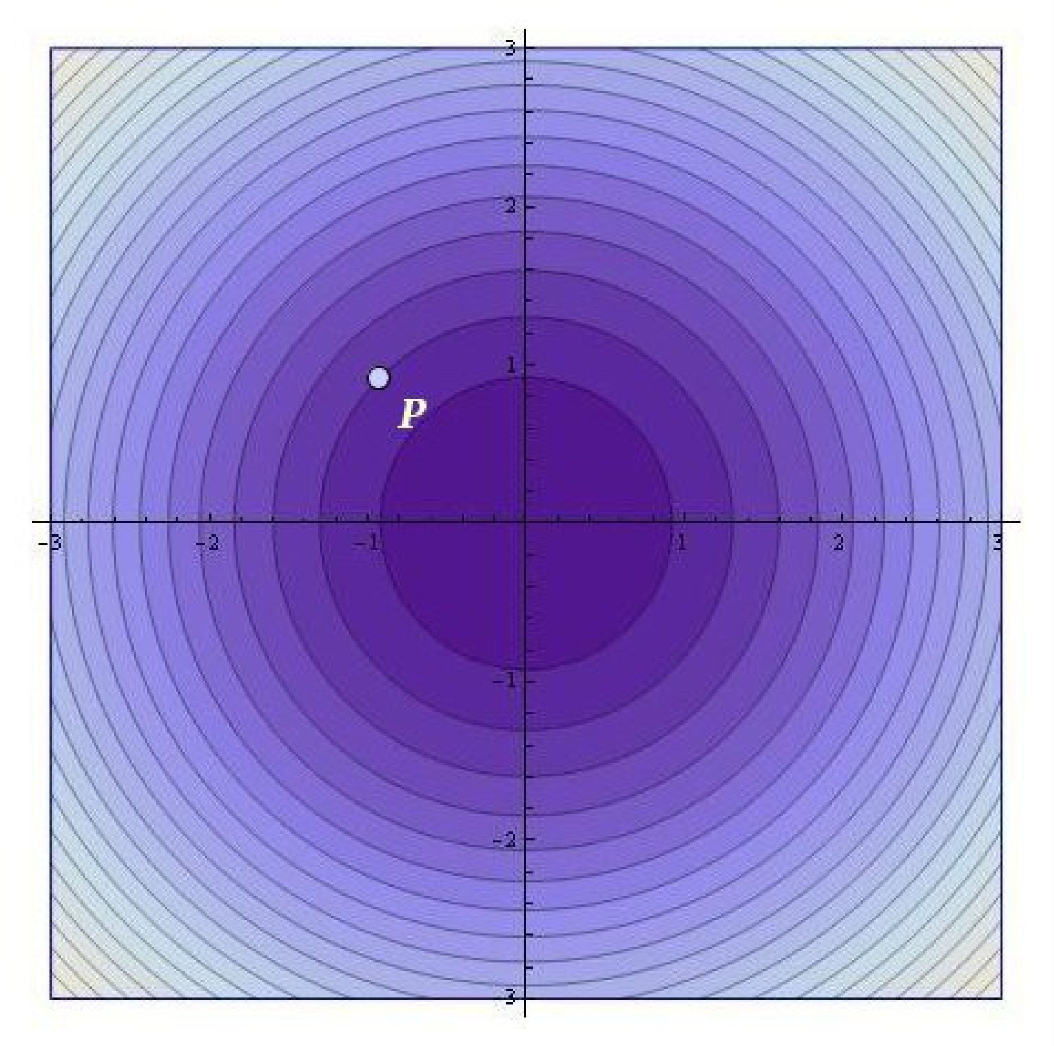

Abb. 2-1a: Höhenliniendiagramm der Funktion $z = f(x, y)$, Punkt P, $(-3 \le x, y \le 3)$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

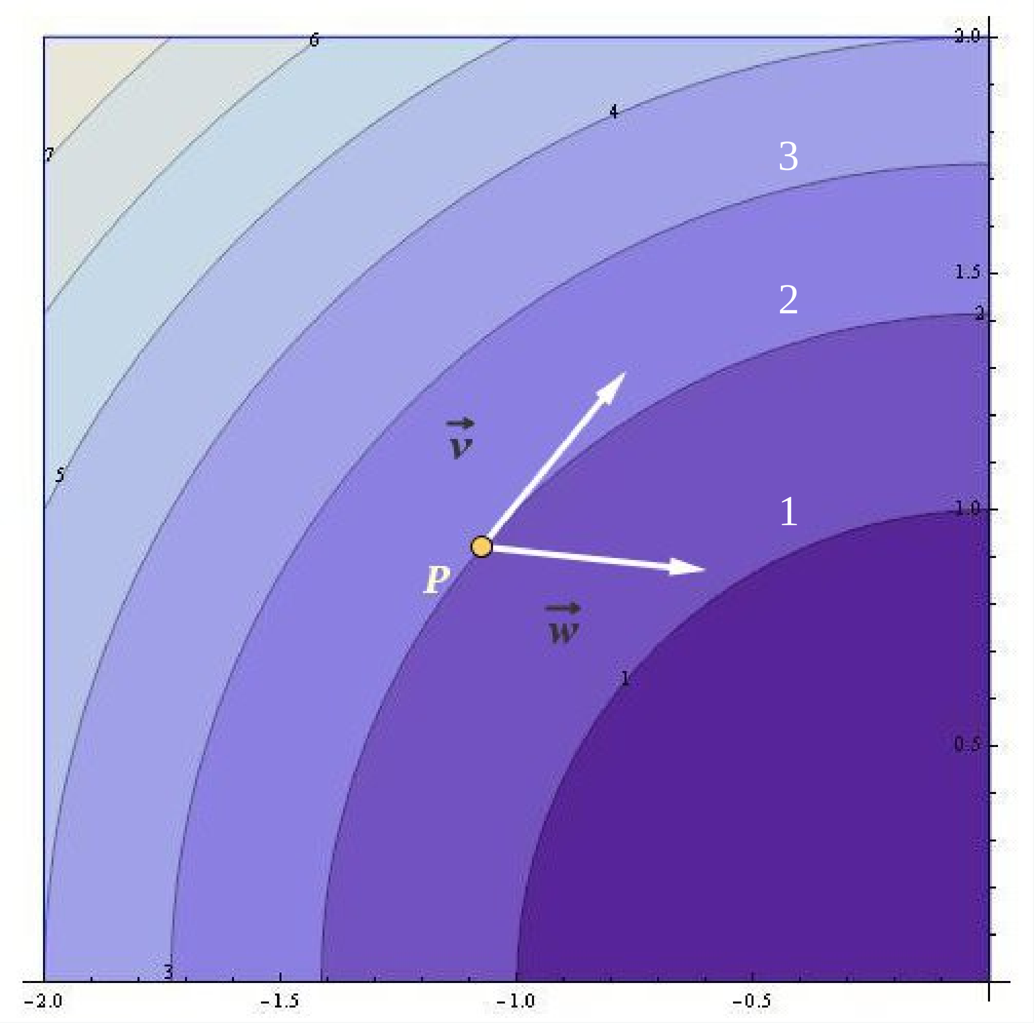

Abb. 2-1b: Höhenliniendiagramm der Funktion $z = f(x, y)$, Punkt P, Vektoren ***v*** *und* ***w*** *($-2 \leq x, \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 2$)*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

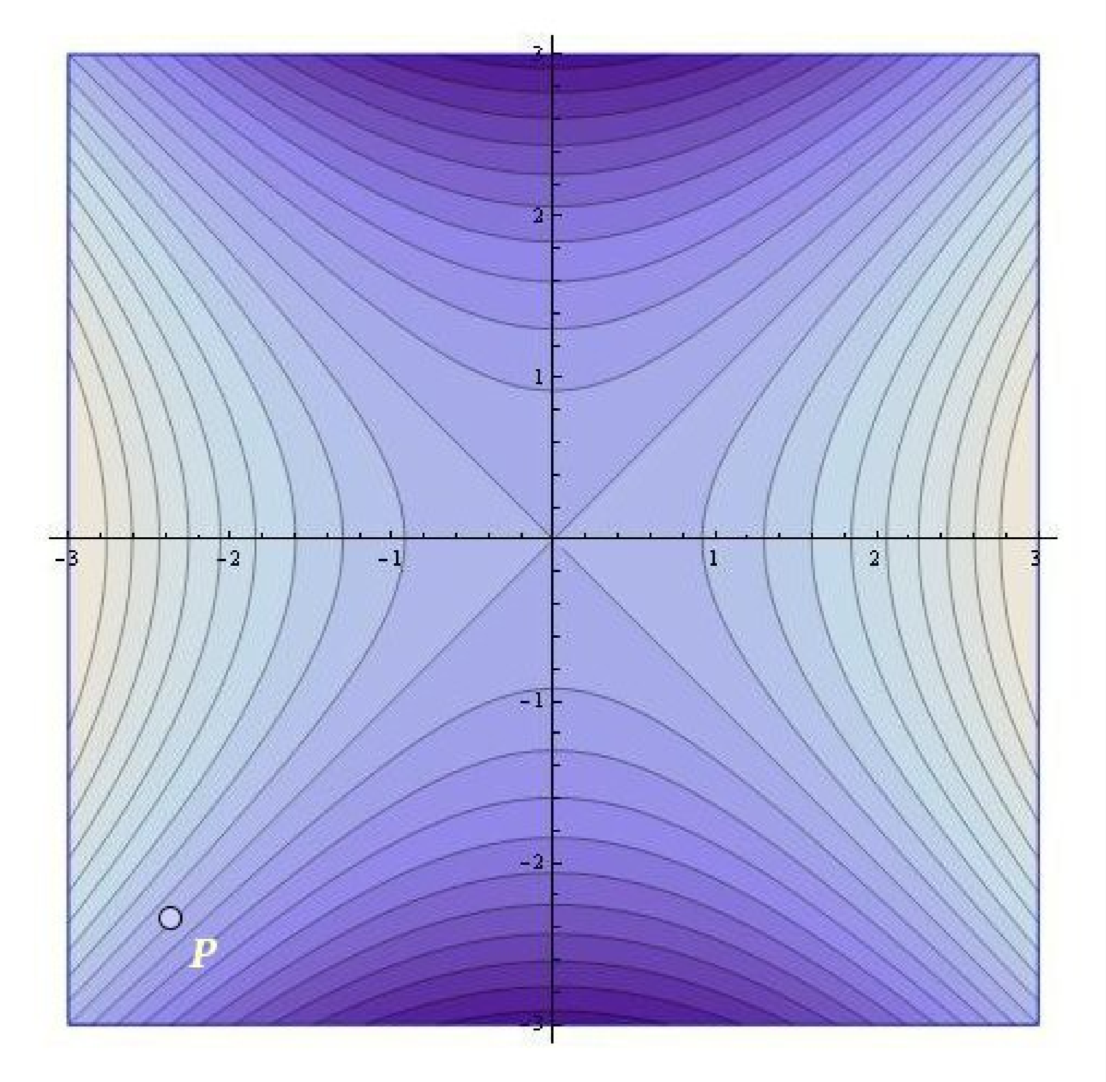

Abb. 2-2a: Höhenliniendiagramm der Funktion z = g (x, y), Punkt P, (-3 ≤ x, y ≤ 3)

$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

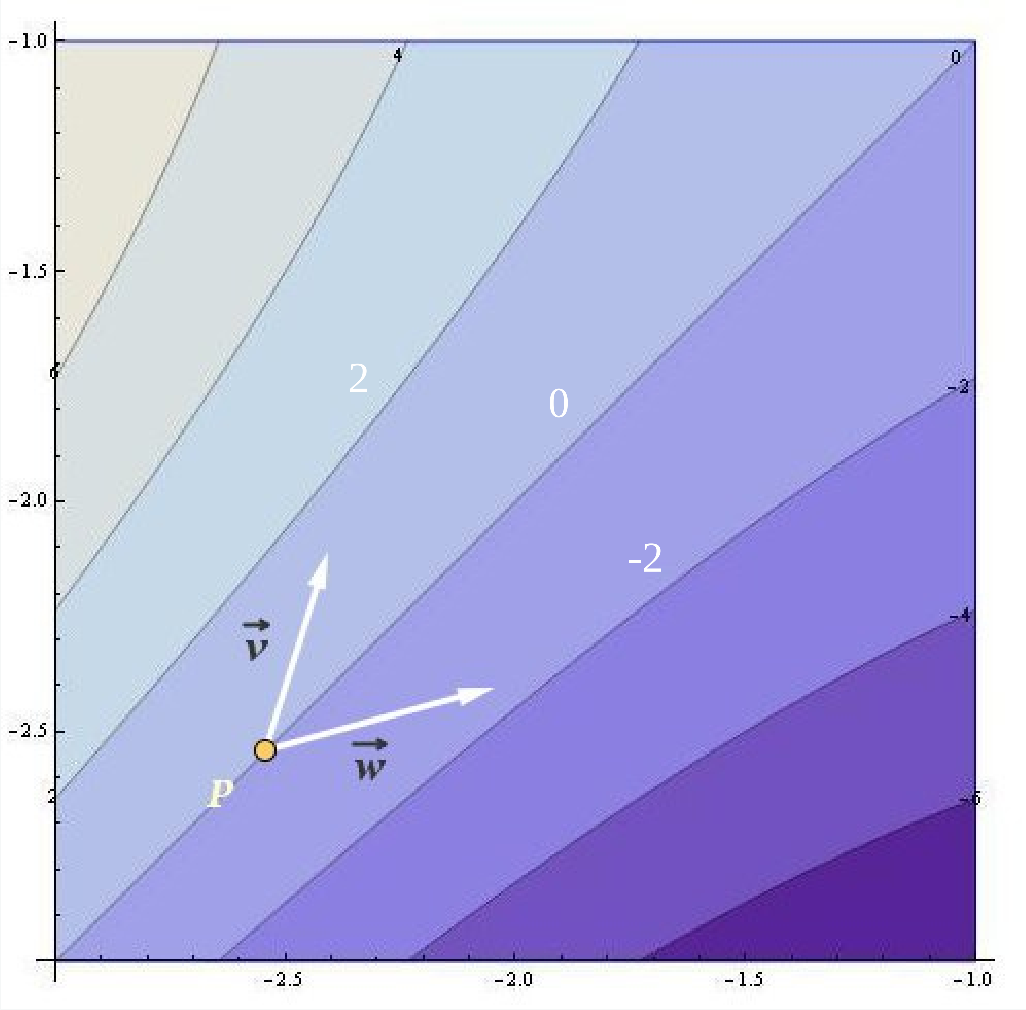

*Abb. 2-2b: Höhenliniendiagramm der Funktion $z = g(x, y)$, Punkt P, Vektoren **v** und **w** ($-3 \leq x, \leq -1$, $-3 \leq y \leq -1$)*

$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

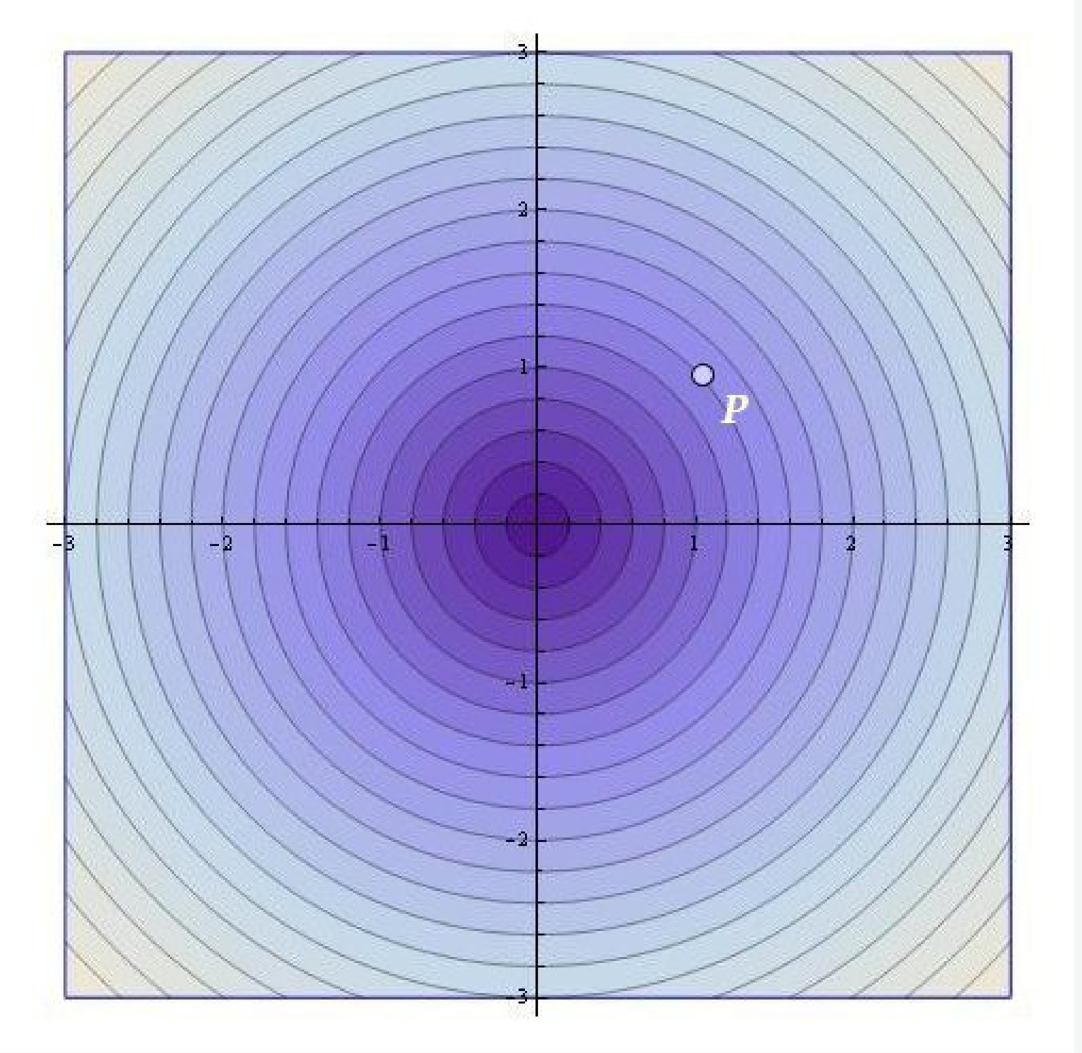

Abb. 2-3a: Höhenliniendiagramm der Funktion $z = h(x, y)$, Punkt P, $(-3 \leq x, y \leq 3)$

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

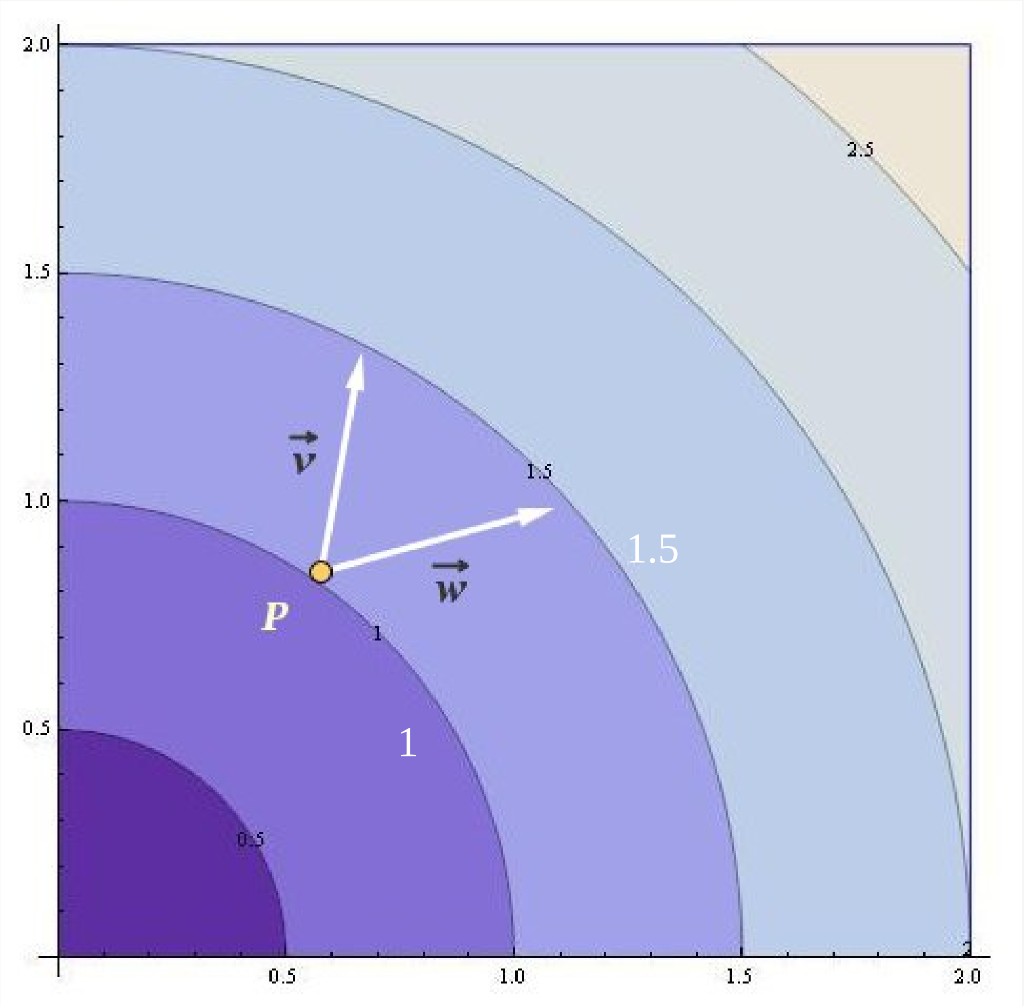

Abb. 2-3b: Höhenliniendiagramm der Funktion $z = h(x, y)$, Punkt P, Vektoren **v** *und* **w** $(0 \le x, \le 2, \; 0 \le y \le 2)$

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Funktion $z = f(x, y)$, *Abb. 2-1b*:

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist tangential zu der Höhenlinie mit dem Funktionswert *2*. In der Richtung der Tangente ändern sich die Werte der Funktion nicht. Die Richtungsableitung $\partial f / \partial v$ ist gleich Null. Der Vektor $\boldsymbol{w}$ zeigt von der Linie mit dem Wert *2* in Richtung der Linie mit dem Wert 1. Die Funktionswerte nehmen in dieser Richtung ab.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 : \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} < 0$$

Entsprechen kann man weitere Richtungsableitungen beschreiben:

Funktion $z = g(x, y)$, *Abb. 2-2b*:

$$g(x, y) = x^2 - y^2 : \qquad \frac{\partial g}{\partial \vec{v}} > 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial \vec{w}} < 0$$

Funktion $z = h(x, y)$, *Abb. 2-3b*:

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} : \qquad \frac{\partial h}{\partial \vec{v}} > 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial \vec{w}} > 0$$

Wir bestimmen die Richtungsableitung eines Skalarfeldes $\Phi = x^2 + y^2$ im Punkt $P\,(1, 0)$ in Richtung eines Vektors

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$$

Zuerst berechnen wir den Einheitsvektor in der vorgegebenen Richtung

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}, \qquad |\,\vec{a}\,| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{e}_a = e_1\,\vec{i} + e_2\,\vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}_a} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x + h\,e_1,\; y + h\,e_2) - \phi(x,\; y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x + h/\sqrt{2},\; y + h/\sqrt{2}) - \phi(x,\; y)}{h}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}_a}(1, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(1 + h/\sqrt{2},\, h/\sqrt{2}) - \phi(1, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h/\sqrt{2})^2 + (h/\sqrt{2})^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2}\,h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (\sqrt{2} + h) = \sqrt{2}$$

Richtungsableitung eines Skalarfeldes

Wie kann man die Richtungsableitung eines Skalarfeldes bestimmen, ohne die Grenzwertbildung explizit durchzuführen?

Lokale Linearität

Eine differenzierbare Funktion kann in der Umgebung eines Punktes linearisiert werden.

$$\phi_{\vec{e}}(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \vec{e}} = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x + h e_1, y + h e_2) - \phi(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta \phi}{h}$$

$$\Delta \phi = \phi(x + h e_1, y + h e_2) - \phi(x, y)$$

$$\Delta x = (x + h e_1) - x = h e_1$$

$$\Delta y = (y + h e_2) - y = h e_2$$

$$\Delta \phi \simeq \phi_x(x, y) \Delta x + \phi_y(x, y) \Delta y = \phi_x(x, y) h e_1 + \phi_y(x, y) h e_2$$

$$\frac{\Delta \phi}{h} \simeq \phi_x(x, y) e_1 + \phi_y(x, y) e_2$$

$$h \to 0: \quad \phi_{\vec{e}}(x, y) = \phi_x(x, y) e_1 + \phi_y(x, y) e_2$$

Die Richtungsableitung eines Skalarfeldes in Richtung eines vorgegebenen Vektors e hat die Form

$$\boxed{\phi_{\vec{e}}(x, y) = \phi_x(x, y) e_1 + \phi_y(x, y) e_2}$$

Wir bestimmen $\phi_{\vec{e}}\,(1,0)$

$$\phi(x\,,\;y) = x^2 + y^2\,,\quad P = P(1,0)\,,\quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j}\,,\quad \vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\phi_x(x\,,y) = 2\,x\,,\qquad \phi_y(x\,,y) = 2\,y$$

$$\phi_{\vec{e}}\,(1,0) = \phi_x(1\,,0)\;e_1 + \phi_y(1,0)\;e_2 = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

Diesen Wert haben wir schon im Beispiel 1 bestimmt.